Universiteit Utrecht
Mathematisch Instituut

Universiteit Utrecht

Boedapestlaan 6
3584 CD Utrecht

Hertentamen Wat is Wiskunde A, maandag 22 december 2003

* Zet op elk blaadje dat je inlevert je naam en studentnummer. Zet op het eerste blad ook de naam van je docent.
* Alle opgaven tellen even zwaar
* Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van computer, dictaat , boeken of aantekeningen is niet toegestaan.

1. Construeer waarheidstabllen voor de onderstaande expressies:
   (a) $\neg(\neg P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$.
   (b) $(P \rightarrow Q) \wedge (P \wedge \neg Q)$.

2. Voor $n \geq 1$, laat $A_n = [0, 1 + \dfrac{1}{n}]$ en $B_n = [0, 1 - \dfrac{1}{n}]$. Bepaal
   (a) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.
   (b) $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.
   (c) $\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n - B_n)$.

3. Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld van de volgende beweringen:
   (a) Voor ieder natuurlijk getal n is $n^3 + n^2 + 11$ een priemgetal.
   (b) Voor ieder geheel getal a, als 3 een deler is van $a^2 - 81$, dan is 3 een deler van a.

4. Definieer de relatie $\sim$ op $\mathbb{R}$ als volgt:
   $$(a, b) \sim (c, d) \quad \text{als} \quad a + b = c + d.$$
   (a) Bewijs dat $\sim$ een equivalentie relatie is.
   (b) Bepaal de equivalentieklasse van het punt $(1, 0)$.
   (c) Geef een meetkundige beschrijving van de equivalentieklassen van $\sim$.

5. Bewijs met volledige inductie dat voor elk natuurlijk getal n geldt dat $2^{2n-1} + 3^{2n-1}$ deelbaar is door 5.

6. Zij n een natuurlijk getal en a, b gehele getallen. Stel dat $\text{ggd}(a, n) = 1$.
   (a) Laat zien dat er een $x \in \mathbb{Z}$ bestaat zodat $ax - b$ deelbaar is door n.
   (b) Stel nu dat $n = 11$, $a = 19$ en $b = 1$. Bepaal een $x \in \mathbb{Z}$ zodat $19x - 1$ deelbaar is door 11.