Opgave 1

Zij $f(x) = x^2 - 4x+7$

a) Bepaal het domein en het bereik van f.

Antwoord:

Voor elk $x \in \mathbb{R}$ is $f(x)$ goed gedefieneerd, dus is het domein van f gelijk aan $\mathbb{R}$.

f is een daalparabool, dus is het bereik van f gelijk aan $[m, \infty]$ waar m de (enige) minimus van f is. De afgeleide is $f'(x) = 2x - 4$, dus $x = 2$ is het punt waar de minimus beriekt is. Dus $m = f(2) = 4 - 8 + 7 = 3$. Uiteindelijk is het bereik van f gelijk aan $[3, \infty]$.

b) Bepaal een verzameling $D \subset \mathbb{R}$zodanig $3 \in D$ en f is injectief op D.

Antwoord:

Zij $D = \{3\}$. Dan is zeker $3 \in D$ en is f ook duidelijk injectief (elke functie met domein een 1 element verzameling is injectief).

d) Bepaal $f(D)$ en $f^{-1}(D)$.

Antwoord:

$f(D) = \{f(3)\} = \{9-12+7\} = \{4\}$ en de functie $f^{-1} : f(D) \to D$ is: $f^{-1}(4) = 3$

Opdracht 2

Zij $A \subset \mathbb{N}$ een eindige deelverzameling. Definieer $max(A)$ als het grootste element van A.

Zij verder $V_n = \{A \in P(\mathbb{N}) | \text{A is eindig en } max(A) = n\}$.

Bewijs: voor elke $n \in \mathbb{N}$ is $V_n$eindig.

Antwoord:

Zij $n \in \mathbb{N}$. Voor elke $A \in V_n$ geldt $max(A) = n$ dat betekent dat in A is er geen element a met $a > n$. Dus geldt $A \subseteq \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Uit dit volgt dat $V_n \subseteq P(\{1, 2, 3, \ldots, n\})$. Maar we weten dat $|P(\{1, 2, 3, \ldots, n\})| = 2^n$. Dus is V_n eindig omdat hij een deelverzameling is van een eindige verzameling.

Bepaal $|V_n|$

Antwoord:

Zij $n \in \mathbb{N}$ en zij $B_n = \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$. We gaan een bijectie geven tussen $P(B_n)$ en V_n. Uit deze bijectie zou volgen dat deze twee verzamelingen even groot zijn en omdaat $|P(B_n)| = 2^{n-1}$ zou volgen dat $|V_n| = 2^{n-1}$.

De functie $f : P(B_n) \to V_n$ is de functie die de deelverzameling $B \in P(B_n)$ naar de verzameling $B \cup \{n\}$ stuurt. We moeten bewijzen dat f heeft V_n als bereik. Om dat te doen zij $B \in P(B_n)$. Omdat $B \subseteq \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$ volgt dat $max(B \cup \{n\}) = n$ dus $f(B) \in V_n$. Om te bewijzen dat f bijectief is gaan we een inverse voor f finden. Zij $g : V_n \to P(B_n)$ de functie die de verzameling $A \in V_n$ naar de verzameling $A - \{n\}$stuurt. Nogmaals moeten we bewijzen dat het bereik van g $P(B_n)$ is. Zij dus $A \in V_n$. Uit $max(A) = n$ volgt dat n het grootste element van A is. Dus is de verzameling $A - \{n\}$ een deelverzameling van $\mathbb{N}$ waarin het grootste element kleiner is dat n, dat betekent dat $A - \{n\} \subseteq \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$ dus geldt $g(A) \in P(B_n)$. Nu gaan we bewijzen dat g de inverse functie van f is. We moeten bewijzen dat $fg = id$ en $gf = id$. We beginnen met fg. Zij $A \in V_n$. Dan is $n \in A$ (anders geldt niet $max(A) = n$). Laten we $fg(A)$ berekenen.

$$f(g(A)) = f(A - \{n\}) = (A - \{n\}) \cup \{n\} = A$$

dus geldt $fg = id$. Zij nu $B \in P(B_n)$. Dan is $n \notin B_n$, en we hebben dat:

$$g(f(B)) = g(B \cup \{n\}) = (B \cup \{n\}) - \{n\} = B$$

dus geldt $gf = id$, en we zijn klaar.

Opdracht 3

Zij $f : X \to Y$ een functie.

a) Laten $A, B \subseteq Y$ met $A \cap B = \phi$. Bewijs dat $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \phi$.

Antwoord:

Stel dat $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \neq \phi$, en zij $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Dus is $x \in f^{-1}(A)$ en $x \in f^{-1}(B)$. Uit dit volgt dat $f(x) \in A$ en $f(x) \in B$ dus $f(x) \in A \cap B$, maar dat is in tegenspraak met $A \cap B = \phi$.

b) Stel f is injectief. Laten $C, D \subseteq X$ met $C \cap D = \phi$ Bewijs dat $f(C) \cap f(D) = \phi$.

Antwoord:

Stel dat $f(C) \cap f(D) \neq \phi$ en zij $x \in f(C) \cap f(D)$. Dus $x \in f(C)$ dus is er een $c \in C$ met $f(c) = x$. x is ook een element van $f(D)$ dus is er een $d \in D$ met $f(d) = x$. Maar f is injectief dus uit $f(c) = x = f(d)$ volgt $c = d$. Maar dan is $c \in C \cap D$ in tegenspraak met $C \cap D = \phi$.

Stel $X = Y = \mathbb{R}$, $C(-\infty, 0]$ en $D = (0, \infty)$. Geef een voorbeeld van een functie f zodat $f(C) \cap f(D) = \phi$, terwijl f niet injectief is.

Antwoord:

Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de functie $f(x) = 1$ als $x \leq 0$ is en $f(x) = 2$ als $x > 0$ is. f is duidelijk niet injectief, terwijl $f(C) = \{1\}$ en $f(D) = \{2\}$, dus $f(C) \cap f(D) = \phi$.

Opdracht 4

a) Zij $X = \mathbb{Z}$ en $\circ$ de operatie gedefinieerd door $a \circ b = a^2 + b^2$. Is deze operatie commutatief? Is hij associatief?

Antwoord:

De operatie is commutatief omdat voor elke $a, b \in \mathbb{Z}$ geldt

$$a \circ b = a^2 + b^2 = b^2 + a^2 = b \circ a$$

De operatie is niet associatief. Als een tegenvoorbeeld kunnen we $a = 1, b = 2, c = 3$ nemen, dan geldt:

$$a \circ (b \circ c) = 1 \circ (2 \circ 3) = 1 \circ (2^2 + 3^2) = 1 \circ 13 = 1^2 + 13^2 = 1 + 169 = 170$$

terwijl:

$$(a \circ b) \circ c = (1 \circ 2) \circ 3 = (1^2 + 2^2) \circ 3 = 5 \circ 3 = 5^2 + 3^2 = 25 + 15 = 40$$

b) Zij $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ en de operatie $*$ gedefinieerd door: $a * b = c$ met $c \in X$ en $c = ab(mod 5)$. Laar zien dat hierdoor een groep gedefinieer wordt.

Antwoord:

Deze verzameling is precies de verzameling $\mathbb{Z}_5$ met de operatie van vermenigvuldigen mod 5. Dus is er hier sprake van de groep $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$.

Opdracht 5

a) Laat dat een groep met drie elementen $\{a, b, c\}$ waarbij geldt $a * c = b$ en $c * a = a$ Bestaat niet.

Antwoord:

Stel dat zo'n groep bestaat wel. Dan hebben wij een groep waarin geldt: $a * c = b$ en $c * a = a$. In een groep heeft elk element in invers dus ook a. Als we de tweede vergelijkinng door a^{-1} op de rechterkant zou vermenigvuldigen dan krijgen we:

$$(c * a) * a^{-1} = a * a^{-1} = e$$

maar $(c * a) * a^{-1} = c * (a * a^{-1}) = c * e = c$ dus volgt $c = e$, het identiteitselement. Maar dan uit de eerste vergelijking volgt:

$$b = a * c = a * e = a$$

maar dan bevat de groep minder dan drie elementen. Tegenspraak.

b) Zij G een groep met drie elementen en $x \in G$. Bewijs dat als $x * x = e$ dan $x = e$.

Antwoord:

Stel dat $x * x = e$ en $x \neq e$. Zij y het derde element, dus $G = \{e, x, y\}$. Laten we onderzoeken wat $x * y$ kan zijn. Stel $x * y = e$. Dan geldt $y = x^{-1} = x$ (omdat $x * x = e$), en dat kan niet. Stel $x * y = x$. Dan geldt $y = e$ en dat kan niet. Stel $x * y = y$. Dan geldt $x = e$ en dat kan niet. Er zijn dus geen mogelijkheden voor $x * y$ en dus ook geen groep.