

Tentamen Wat is Wiskunde B

29 januari 2004

9.00–12.00 uur

DIT TENTAMEN BEVAT 6 OPGAVEN; ZIE OOK DE ACHTERKANT. ALLE OPGAVEN TELLEN EVEN ZWAAR. ZET OP IEDER VEL DAT JE INLEVERT JE NAAM EN REGISTRATIENUMMER; ZET OP HET EERSTE VEL DE NAAM VAN JE PRAKTICUMDOCENT.

SUCCES!

Opgave 1. Zij f de reëelwaardige functie gegeven door

$$f(x) = \log(\sqrt{x-4} - 5)$$

- Bepaal het domein en het bereik van f .
- Bewijs dat f injectief is op zijn domein.
- Bepaal f^{-1} .

Opgave 2. Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) = x^2 - 4x + 5$. Laat $A = [1, 3]$ en $B = (-1, 2]$.

- Bepaal $f^{-1}(f(A))$.
- Bepaal $f(f^{-1}(B))$.
- Is f injectief? Surjectief? Motiveer je antwoord!

Opgave 3. We geven met $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ de machtsverzameling van \mathbb{N} aan, en met $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ de verzameling van *oneindige* deelverzamelingen van \mathbb{N} .

- Verzin een injectieve afbeelding van $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ naar $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$.
- Bewijs, dat $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ en $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ dezelfde kardinaliteit hebben.

Opgave 4

- a) Geef een voorbeeld van een verzameling X en een operatie \circ op X die wel commutatief, maar niet associatief is.
- b) Maak de volgende tabel zó af, dat de verzameling $\{a, b, c, d\}$ met de operatie $*$ een commutatieve groep wordt. Bepaal ook het eenheidselement.

$*$	a	b	c	d
a	d	c		
b		d		
c			d	
d				d

Opgave 5.

- a) Laat $\langle x_n \rangle$ een rijtje in \mathbb{R} zijn. Bewijs: als $a \in \mathbb{R}$ een verdichtingspunt van de verzameling $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ is, dan heeft $\langle x_n \rangle$ een deelrij die naar a convergeert.
- b) Laat het rijtje $\langle x_n \rangle$ recursief gedefinieerd zijn door:

$$x_1 = 1 \quad \text{en} \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + x_n^2}$$

Bewijs, dat $\langle x_n \rangle$ convergeert.

Opgave 6. De functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 3x - 76}{x - 4} & \text{als } x \neq 4 \\ 17 & \text{als } x = 4 \end{cases}$$

- a) Bewijs dat f een limiet heeft in $x = 4$, en bereken deze limiet.
- b) Laat het rijtje $\langle y_n \rangle$ gedefinieerd zijn door

$$y_n = f\left(\left(2 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^2\right)$$

Bewijs dat y_n convergent is, en bepaal de limiet.