



## Hertentamen Wat is Wiskunde B, donderdag 26 februari 2004

- \* Zet op elk blaadje dat je inlevert je naam en studentnummer. Zet op het eerste blad ook de naam van je docent.
- \* Alle opgaven tellen even zwaar
- \* Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van computer, dictaat, boeken of aantekeningen is niet toegestaan.

1. Laat  $g : A \rightarrow B$  en  $f : B \rightarrow C$  functies zijn.
  - (a) Stel dat  $f \circ g : A \rightarrow C$  injectief is, laat dan zien dat  $g : A \rightarrow B$  ook injectief is.
  - (b) Stel dat  $f \circ g : A \rightarrow C$  surjectief is, laat dan zien dat  $f : B \rightarrow C$  surjectief is.
  - (c) Geef een voorbeeld van verzamelingen  $A, B, C$  en functies  $g : A \rightarrow B$  en  $f : B \rightarrow C$  waarbij  $f$  en  $f \circ g$  surjectief zijn, maar  $g$  niet surjectief is.
2. Zij  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  gedefinieerd door  $f(x) = |\cos(x)|$ . Laat  $A = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ,  $B = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  en  $C = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ 
  - (a) Bepaal  $f(f^{-1}(A))$ .
  - (b) Bepaal  $f^{-1}(f(B))$ .
  - (c) Bepaal  $f^{-1}(C)$ .
3. Zij  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  de machtsverzameling van  $\mathbb{N}$ , en  $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{N} : 1 \in A\}$ .
  - (a) Laat zien dat de functie  $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{A}$  gegeven door  $f(A) = \{2n : n \in A\} \cup \{1\}$  injectief is.
  - (b) Laat zien dat  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  en  $\mathcal{A}$  dezelfde kardinaliteit hebben.
4. Zij  $\circ$  een operatie op  $\mathbb{R}$  gedefinieerd door  $a \circ b = ab + a + b$ .
  - (a) Laat zien dat  $\circ$  associatief en commutatief is.
  - (b) Bepaal de identiteitselement van  $\circ$ , d.w.z. bepaal een  $e \in \mathbb{R}$  zodanig dat  $a \circ e = e \circ a = a$  voor alle  $a \in \mathbb{R}$ .
  - (c) Is  $(\mathbb{R}, \circ)$  een groep? Motiveer je antwoord.

5. De functie  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  is gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & \text{als } x \neq 1 \\ 3 & \text{als } x = 1. \end{cases}$$

- (a) Bewijs dat  $f$  een limiet heeft in  $x = 1$ , en bereken deze limiet.
- (b) Definieer voor  $n \geq 1$ ,  $a_n = \frac{n+1}{n}$  en  $y_n = \frac{a_n-1}{\sqrt{a_n}-1}$ . Laat zien dat de rij  $(y_n)$  convergent is, en bepaal de limiet.
6. (a) Zij  $(x_n)$  een rij in  $\mathbb{R}$ , en laat  $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Stel dat de verzameling  $A$  twee verdichtingspunten heeft  $x, y$  met  $x \neq y$ . Laat zien dat de rij  $(x_n)$  **niet** convergent is.
- (b) Zij  $a_1 = 1$ , en  $a_n = \frac{1}{1+a_{n-1}}$  voor  $n \geq 2$ . Laat zien dat de rij  $(a_n)$  convergent is, en bepaal de limiet.