

14 Slotopdrachten

Voor de afronding van de lessen reeks *Combinatoriek en Partities* is het de bedoeling dat jullie in groepjes van twee een werkstuk maken over één van de onderwerpen die in dit hoofdstuk staan. Kies uit deze onderwerpen één die jullie aanspreekt en ga er mee aan de slag. Maak een document waarin jullie verslag doen van wat jullie onderzocht hebben, welke resultaten jullie verkregen hebben en tegen welke moeilijkheden je bent aangelopen. Beschouw de tekst die hier over het onderwerp staat niet als afbakening, maar als inspiratiebron en globale richtinggever.

De komende weken werken jullie aan dit werkstuk en op maandagen leveren jullie een tussen-versie in of een document met vragen of overwegingen waar jullie feed-back op willen krijgen. Voor de laatste les bereiden jullie een presentatie voor van 5 à 10 minuten over jullie onderwerp en jullie werkstuk. Tijdens de laatste les op 29 maart houdt ieder tweetal een presentatie en is er gelegenheid elkaar vragen te stellen over het gepresenteerde. Hierna hebben jullie nog één week om het werkstuk definitief te maken.

Het werkstuk dient een omvang te hebben die overeenkomt met 10 à 15 uur werk per persoon. Dit is inclusief de voorbereiding voor de presentatie.

14.1 4-dimensionale partities

Denkend aan de manier waarop je 3d-partities kunt noteren in een matrix van niet-negatieve getallen, hoe kun je dan 4-dimensionale partities definiëren? Vind een handige notatie. Zijn er meerdere notaties mogelijk? Kun je ze opbouwen uit 3-dimensionale? Zo ja hoe en op welke manieren? Stel dat het getal van zo'n partitie weer de som is van alle getallen die voorkomen, hoeveel 4d-partities zijn er dan voor kleine getallen n ?

14.2 Priempartities

In plaats van naar gewone partities te kijken, kunnen we ons ook afvragen op hoeveel manieren een getal te schrijven is als som van priemgetallen. We noemen dit een priempartitie. Wat is de bijbehorende telfunctie? Bereken eens voor kleine waarden van n het aantal priem-partities. Gebruik de methode van Euler uit Hoofdstuk 10 om recursief het aantal priempartities te bepalen. Kijk ook eens naar strikte priempartities.

14.3 Gekleurde partities

We kunnen in plaats van naar gewone partities ook kijken naar partities waarbij we getallen kleuren geven. Bijvoorbeeld twee kleuren. Hierbij kan een getal bijvoorbeeld de kleuren zwart of rood hebben. Op hoeveel manieren kun je dan een getal n schrijven in dit soort gekleurde getallen? Het getal 3 is te schrijven als

$$3 = \mathbf{3} = 2 + 1 = \mathbf{2} + 1 = \mathbf{2} + 1 = \mathbf{2} + 1 = 1 + 1 + 1 = \mathbf{1} + 1 + 1 = \mathbf{1} + \mathbf{1} + 1 = \mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{1}.$$

Dus op 10 verschillende manieren. Onderzoek dit soort partities, ook voor meerdere kleuren. Is er een Frobenius notatie mogelijk? Een frequentienotatie? Wat is de telfunctie voor dit soort partities? Wat is de telfunctie voor dit soort strikte partities? Wat is strikt hier? Kan men de methode van Euler toepassen? Etc. etc.

14.4 n -gonale getallen

We zijn zogenaamde pentagonale getallen en driehoeksgetallen tegengekomen. Zie de Figuren 62 en 73. Hetzelfde kun je ook doen voor een willekeurige n -gon. Welke getallen krijg je zo? Probeer een algemene formule te vinden voor de n -gonale getallen.

Drie-dimensionaal zijn er 5 regelmatige veelvlakken, de Platonische lichamen. Ze zijn ontdekt door de Griekse filosoof en wiskundige Plato, die leefde van ± 428 - 347 v.Chr. Eén van deze lichamen is de kubus. Net als bij de pentagonale en driehoeksgetallen kun je de zijanten steeds groter laten worden en tellen hoeveel punten er in zo'n kubus liggen. Tel het aantal punten en stel een formule op. Zoek op Wikipedia de Platonische lichamen op. Kun je hetzelfde doen voor de andere Platonische lichamen?

14.5 Mayavlakvulling

In paragraaf 5 hebben we gezien dat we elke 3d-partitie kunnen schrijven als een oneindige rij van eerst toenemende en dan afnemende 2d-partities

$$\dots \preceq \lambda^{(-2)} \preceq \lambda^{(-1)} \preceq \lambda^{(0)} \succeq \lambda^{(1)} \succeq \lambda^{(2)} \succeq \dots$$

Hierbij hanteren we het symbool $\lambda^{(i)} \preceq \lambda^{(j)}$ om aan te duiden dat partitie $\lambda^{(i)}$ kleiner dan of gelijk aan partitie $\lambda^{(j)}$ is. Dit betekent niet alleen dat het getal van partitie $\lambda^{(i)}$ kleiner dan of gelijk aan het getal van partitie $\lambda^{(j)}$ is. Maar ook dat voor elke $k \geq 1$ geldt dat $\lambda_k^{(i)} \leq \lambda_k^{(j)}$.

Nu kunnen we elke 2d-partitie $\lambda^{(j)}$ laten corresponderen met een Mayadiagram van gewicht j , dat in hoofdstuk 11 gedefiniëerd is. Als we nu deze Mayadiagrammen onder elkaar plakken krijgen we een opvulling van het vlak in hokjes die een bal kunnen bevatten of leeg zijn. Dit noemen we Mayavlakvulling. De linkerkant is altijd leeg en de rechterkant is altijd vol. Bestudeer dit verschijnsel en bepaal voor een aantal 3d-partities de Mayavlakvullingen. Wat gebeurt er als je voor alle $\lambda^{(j)}$ een Mayadiagram neemt van gewicht 0? Is er een connectie met de niet snijdende paden?

14.6 Bewijzen met Ferrers-diagrammen

In paragraaf 9.2 heb je met bewerkingen op Ferrersdiagrammen aangetoond dat het aantal zelf-geconjugeerde partities van n gelijk is aan het aantal strikte partities van n in oneven getallen. Probeer door een bewerking op de mogelijke Ferrersdiagrammen te maken het volgende aan te tonen:

- Het aantal partities van n in niet meer dan k getallen is gelijk aan het aantal partities van n in getallen kleiner of gelijk aan k .
- Het aantal partities van n in niet meer dan k getallen is gelijk aan het aantal partities van $n + k$ in precies k getallen.
- Het aantal strikte partities van n in k oneven getallen is gelijk aan het aantal partities van $n - k^2$ in niet meer dan k even getallen.
- Het aantal partities van n in getallen, waarvan k het grootste getal is, is gelijk aan het aantal partities van $n - k$ in getallen kleiner dan of gelijk aan k .

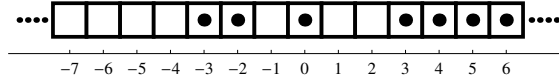
Probeer dit ook te bewijzen door te kijken naar hun telfuncties. Zijn er nog meer identiteiten die je door operaties op Ferrers-diagrammen kunt bewijzen? Bijvoorbeeld dat het aantal partities van n in oneven getallen gelijk is aan het aantal strikte partities van n (lastig).

14.7 Mayadiagrammen en bewegende ballen

Neem het Mayadiagram van gewicht 0 dat correspondeert met de lege partitie. We gaan nu een bewegingsproces beschrijven. Op tijdstip 0 starten we met dit Mayadiagram. Er zitten ballen in de dozen $0, 1, 2, \dots$ en alle negatieve dozen zijn leeg. Elke minuut slaat de klok en wordt willekeurig één bal exact één doos naar links of naar rechts geplaatst. Let op: een doos mag maar hoogstens één bal bevatten, dus een bal die verplaatst wordt moet wel een buurdoos hebben die leeg is. Elke bal, die een lege buurdoos heeft, heeft even grote kans om verplaatst te worden.

Voer dit proces uit voor een aantal stappen/minuten. Maak een boom van de mogelijkheden. Kijk welke configuraties optreden na n stappen. We nemen eerst aan dat naar links stappen dezelfde kans heeft als naar rechts stappen. Kijk welke configuratie voor $n = 1, 2, 3, \dots$ het meest voorkomt.

Wat gebeurt er als je andere kanswaarden toekent aan het naar links en naar rechts stappen? Bijvoorbeeld dat de kans om naar links te stappen twee keer zo groot is dan de kans om naar rechts te stappen. Welke configuratie zal het dan winnen? Bekijk ook eens andere kansen p naar rechts en $1 - p$ naar links. Bestudeer dit proces.



Figuur 85: Een voorbeeld van een Mayadiagram na enkele stappen

Bijvoorbeeld in figuur 85 zie je een situatie met twee gaten. Vanuit deze situatie zijn 5 bewegingen mogelijk. De ballen -3 , 0 en 3 kunnen een beweging naar links maken en de ballen -2 en 0 kunnen een beweging naar rechts maken. Stel de kans waarden zijn $\frac{2}{3}$ voor een beweging naar links en $\frac{1}{3}$ voor een beweging naar rechts. Dan zijn we er nog niet. Want in deze situatie zijn er 5 mogelijkheden waarvoor we de kansen moeten normeren zodat de som 1 is. Maar de verhouding tussen de kansen voor bewegingen naar links of naar rechts is wel $2 : 1$. Als we de gegeven kansen zomaar optellen komen we tot $3 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$. Om dus ook in deze situatie kansen toe te delen die sommeren tot 1 moeten we de kansen delen door $\frac{8}{3}$.

Dus de ballen -3 , 0 en 3 kunnen een beweging naar links maken met elk een kans $\frac{2}{8}$ en de ballen -2 en 0 kunnen een beweging naar rechts maken met elk een kans $\frac{1}{8}$.

Onderzoek nog meer verschillende situaties, zoals de begin situatie, een situatie met één gat, een situatie met meerdere gaten, een situatie met een lange aaneengesloten rij leeg ergens tussen ballen. Beschrijf in deze situaties welke verplaats bewegingen er mogelijk zijn en welke kans elk van die beweging heeft. Doe dit voor concrete waarden voor de kansverdeling tussen een beweging naar links of naar rechts. Maar doe het ook bij kansen p naar rechts en $1 - p$ naar links. Welke variabele moet je hierbij mogelijk nog meer introduceren?

Vertaal het proces naar 2-d partities. Zowel de handelingen van een bal naar links of naar rechts verplaatsen, als de configuraties met een grote kans.

14.8 De methode van Euler voor 3d-partities

In hoofdstuk 10 hebben we een recursieve formule afgeleid voor de gewone partities. Probeer hetzelfde te doen voor de 3d-partities.

Bedenk dat de telfunctie van 3d-partities $\sum_{i \geq 0} P(i)q^i$ gegeven wordt de MacMahon formule (50):

$$\sum_{i=0}^{\infty} P(i)q^i = \prod_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^s)^s}.$$

Als we deze telfunctie nu vermenigvuldigen met

$$\prod_{j=1}^n (1-q^j)^j, \tag{51}$$

dan krijgen we

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^n (1-q^j)^j \sum_{i=0}^{\infty} P(i)q^i &= \prod_{j=1}^n (1-q^j)^j \prod_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^s)^s} \\ &= \prod_{s=n+1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^s)^s}. \end{aligned} \tag{52}$$

De rechterkant van (52) bevat geen term met q^k voor $k = 1, 2, \dots, n$. Dus de linkerkant bevat deze termen ook niet.

Bereken voor kleine waarden van n de formule (51) en gebruik deze om met behulp van (52) een recursieve formule af te leiden voor de $P(i)$ -en.

Gebruik deze formules om een aantal $P(i)$ -en te berekenen.

14.9 Partities in de getallen 1, 2 en 3

We willen het aantal partities vinden van het getal n in de getallen 1, 2, en 3.

Opdracht 14.9.a. Onderzoek het aantal partities van het getal n als we alleen het getal 1 gebruiken.

Opdracht 14.9.b. Vind een formule voor het aantal partities van het getal n als we alleen de getallen 1 en 2 gebruiken.

Opdracht 14.9.c. Bewijs door de formule (27) voor de meetkundige reeks p keer te differentiëren dat

$$\frac{1}{(1-q)^{p+1}} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+p}{p} q^j.$$

Opdracht 14.9.d. Ga na dat het aantal partities van het getal n in de getallen 1, 2, en 3 gelijk is aan de coëfficiënt in de reeks

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}.$$

Opdracht 14.9.e. Bereken de eerste 5 termen van de bijbehorende reeks.

Opdracht 14.9.f. (Lastig) Vind getallen a , b , c en d zodat:

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} = \frac{a}{(1-q)^3} + \frac{b}{(1-q)^2} + \frac{c}{(1-q)} + \frac{d}{(1-q^3)}.$$

Hint: Gebruik kruislings-vermenigvuldiging om de breuken weg te werken. Vermenigvuldig alles uit en kijk naar de coëfficiënten voor de machten van q en bepaal daaruit a , b , c en d .

Opdracht 14.9.g. Gebruik de meetkundige reeks en de resultaten uit de voorafgaande opgaven om

$$\frac{a}{(1-q)^3}, \quad \frac{b}{(1-q)^2}, \quad \frac{c}{(1-q)}, \quad \frac{d}{(1-q^3)}$$

te schrijven als reeksontwikkeling.

Bepaal hiermee expliciet de coëfficiënten voor de machten van q in

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}.$$

Opdracht 14.9.h. Toon nu aan dat het aantal partities van het getal n in de getallen 1, 2, en 3 gelijk is aan het gehele getal dat het dichtst ligt bij $\frac{(n+3)^2}{12}$.

14.10 Andere rastermodellen

Naast het ijsmodel, dat in de literatuur het “six vertex model” heet, bestaat er nog een ander model dat het “eight vertex model” heet. We gebruiken daarbij hetzelfde raster als we voor het ijsmodel hebben.

We laten echter toe dat er 0, 2 of 4 pijlen naar een rasterpunt toe wijzen in plaats van slechts 2 pijlen.

Ga na dat je zo 8 mogelijke pijl-configuraties krijgt. Kijk voor kleine n hoeveel mogelijke configuraties je hebt als je dezelfde randvoorwaarden als voor het ijsmodel oplegt.

We kunnen nu ook een ander model bekijken. Ga uit van een 2-dimensionaal raster dat opgebouwd is uit gelijkzijdige driehoeken. Elk rasterpunt heeft 6 verbindinglijnen naar een ander rasterpunt. Laten we nu aannemen dat naar elk rasterpunt 3 pijlen toewijzen en 3 er vandaan. Onderzoek hoeveel mogelijke pijl-configuraties je per rasterpunt kunt hebben.

Maak gelijkzijdige driehoeken van grootte n deze zijn opgebouwd uit n^2 kleine driehoeken van grootte 1. Leg eens wat randvoorwaarden op en onderzoek voor kleine n hoeveel mogelijkheden er zijn.

Doet nu hetzelfde voor een hexagon. Een hexagon van grootte 1 bestaat uit 6 regelmatige driehoeken. Van grootte 2 uit 24 van grootte n uit $6 \times n^2$ van dit soort driehoeken. Leg opnieuw randvoorwaarden op en onderzoek voor kleine n hoeveel mogelijkheden er zijn.

Bouw een raster op uit alleen maar hexagons en doe hierbij hetzelfde.

Onderzoek ook 3-dimensionale rasters met kubussen of met tetraëders. Beschrijf mogelijke voorwaarden op de rasterpunten en op de randen en onderzoek de mogelijkheden.

14.11 Telfuncties voor Mayadiagrammen over energie heen

In paragraaf 11.2 hebben we gerekend aan de energie van Mayadiagrammen van *gewicht* m . Als we hier mee verder werken, krijgen we dat de telfunctie van het aantal Mayadiagrammen van vast gewicht m waarbij we de energie tellen gelijk is aan

$$q^{\frac{1}{2}m(m-1)} \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = q^{\frac{1}{2}m(m-1)} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^j}.$$

Als we nu dit alles willen combineren, dus alle Mayadiagrammen willen tellen dan kunnen we dit doen door een extra variabele in te voeren die ook het gewicht telt. We nemen hiervoor de variabele t . De macht van t geeft het gewicht van het Mayadiagram aan en de macht van q de *Energie*. De telfunctie die alle Mayadiagrammen telt, is dus gelijk aan

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m \times (\text{de telfunctie van Mayadiagrammen van gewicht } m) = \\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m q^{\frac{1}{2}m(m-1)} \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m q^{\frac{1}{2}m(m-1)} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^j} \end{aligned} \quad (53)$$

We kunnen deze tel formule ook anders beschrijven. We gaan uit van het lege Mayadiagram van gewicht 0 zoals gegeven in figuur 65. We krijgen nu alle mogelijke toestandsconfiguraties van Mayadiagrammen door eindig veel ballen in negatieve dozen te plaatsen en eindig veel ballen weg te halen uit dozen met index $j \geq 0$. Een bal plaatsen in een doos met index $-j < 0$ verlaagt het *gewicht* met 1 en verhoogt de *Energie* met j . Een bal weghalen uit doos i met $i \geq 0$ verhoogt het *gewicht* met 1 en verhoogt de *Energie* met i .

De term *energie* die we hier gebruiken betekent dat je echt werk moet verzetten. Als je met een steen j stappen zet, dan kost dat energie j . Voor het weghalen of het bijplaatsen kun je de energie verklaren doordat de deur bij positie 0 zit. Wil je een steen uit een doos met index $i \geq 0$ weghalen, dan moet je er eerst i stappen mee lopen naar positie 0 en dan pas kun je de deur uit. Wil je een steen bijplaatsen in een doos met index $-j < 0$, dan moet je via de deur bij 0 naar binnen, en dan nog j stappen lopen.

We kunnen een toestand dus vergelijken met het Mayadiagram van figuur 65. Als we ons dus concentreren op één negatieve doos met index $-j$ dan zijn daar twee mogelijkheden.

- (1) er is geen bal aanwezig dan verhoogt deze doos het *gewicht* en *Energie* van deze toestand t.o.v. het Mayadiagram van figuur 65 niet;
- (2) als er wel een bal aanwezig is dan wordt het *gewicht* 1 kleiner en de *Energie* j groter dan het Mayadiagram van figuur 65.

Als we het Mayadiagram van figuur 65 tellen als $t^0 q^0$, dus als $t^0 q^0 = 1$, dan correspondeert het wel of niet aanwezig zijn van een bal in deze doos met

$$(1 + t^{-1}q^j)t^0 q^0 = (1 + t^{-1}q^j).$$

Namelijk 1 correspondeert met geen bal en $t^{-1}q^j$ met een bal in doos $-j$. Omdat we dit voor elke negatieve doos $-j$ kunnen doen correspondeert het wel of aanwezig zijn van bal in de negatieve dozen met

$$t^0 q^0 \prod_{j=1}^{\infty} (1 + t^{-1}q^j) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + t^{-1}q^j).$$

Opdracht 14.11.a. Beschrijf op vergelijkbare wijze de mogelijkheden voor een doos met niet-negatieve index $i \geq 0$. Toon aan dat we voor het wel of niet aanwezig zijn van ballen in niet-negatieve dozen uitkomen op

$$t^0 q^0 \prod_{i=0}^{\infty} (1 + tq^i) = \prod_{i=0}^{\infty} (1 + tq^i).$$

Combineren we dit nu en bekijken we alle dozen dan krijgen we dus dat de telfunctie van alle Mayadiagrammen dus gelijk moet zijn aan

$$t^0 q^0 \prod_{j=1}^{\infty} (1 + t^{-1} q^j) \prod_{i=0}^{\infty} (1 + tq^i) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + t^{-1} q^j) \prod_{i=0}^{\infty} (1 + tq^i). \quad (54)$$

Opdracht 14.11.b. Beschrijf de afleiding van deze telfunctie in andere woorden. Onderzoek het gedrag van deze telfunctie aan de hand van enkele voorbeelden.

Als we nu (53) en (54) combineren krijgen we de volgende identiteit:

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 + t^{-1} q^j) \prod_{i=0}^{\infty} (1 + tq^i) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m q^{\frac{1}{2}m(m-1)} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^j} \quad (55)$$

We kunnen deze nog wat herschrijven en krijgen zo een vorm van een identiteit die bekend staat als de Jacobi-tripel-product identiteit:

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k) \prod_{j=1}^{\infty} (1 + t^{-1} q^j) \prod_{i=0}^{\infty} (1 + tq^i) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m q^{\frac{1}{2}m(m-1)} \quad (56)$$

Opdracht 14.11.c. We zien dat als we in (55) de coëfficiënt van t^0 nemen dat rechts de telfunctie van alle partities staat. De linkerkant lijkt op het product van twee telfuncties van strikte partities. We hebben in paragraaf 4.2 de Frobenius notatie geïntroduceerd en in opdracht 9.3 e gezien dat je een partitie ook anders kunt noteren namelijk als twee strikte partities, waar we ook 0 toelaten. In opdracht 11.2 a heb je Frobenius notaties vertaald naar Mayadiagrammen. Kun je uit deze observatie de rechterkant van (55) verklaren? Denk hierbij aan hoe je in de Frobenius notatie het getal van de partitie opbouwt. Het helpt hierbij om (55) iets anders te schrijven namelijk als:

$$\prod_{i=0}^{\infty} (1 + t^{-1} q^{i+1})(1 + tq^i) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m q^{\frac{1}{2}m(m-1)} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^j}.$$

Opdracht 14.11.d. Vaak vind je in de literatuur de Jacobi-tripel-product identiteit (56) geformuleerd als

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^{2n})(1 + x^{2n-1} z^2) \left(1 + \frac{x^{2n-1}}{z^2}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^{m^2} z^{2m} \quad (57)$$

Leid (57) uit (56) af. Hint: druk q en t uit in x en z .