

Combinatoriek en partities

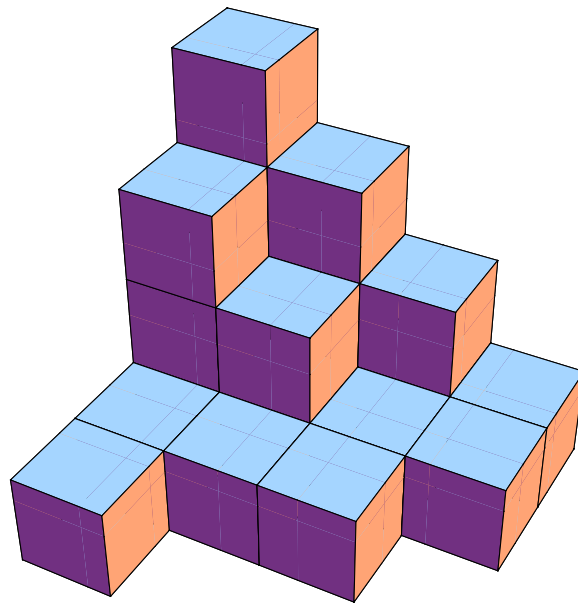
Deel 2

Veel verschillende vormen van tellen in uiteenlopende situaties

Johan van de Leur en Valentijn de Marez Oyens

Voorjaar 2010

Junior College Utrecht



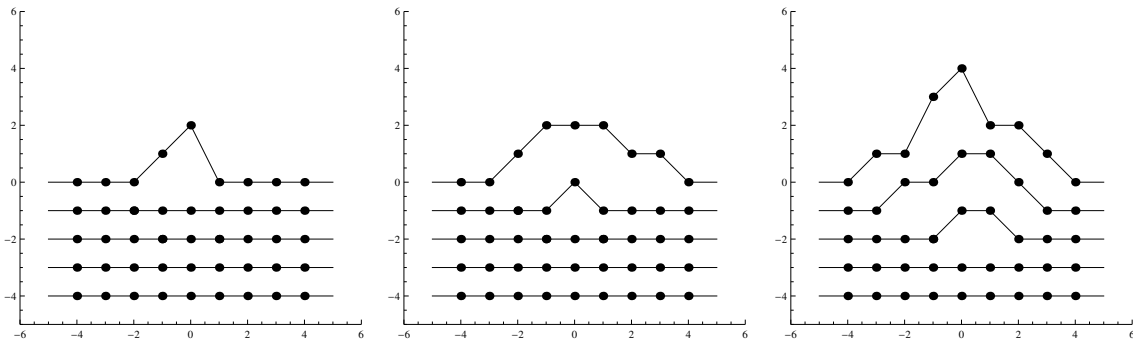
Naam

7 3-d partities en andere afbeeldingen

7.1 3-d partities en niet snijdende paden

In deze paragraaf gaan we aan de slag met een nieuw begrip: *niet snijdende paden*. Uiteindelijk zullen we ontdekken dat dit begrip een relatie heeft met de eerder onderzochte 3-d partities.

In figuur 41 zie je enkele voorbeelden van niet snijdende paden. De paden gaan door rasterpunten met gehele getallen als x - en y -coördinaat. Voor ieder pad is er voor elk geheel getal als x -coördinaat een punt met een geheel getal als y -coördinaat waar het pad door heen gaat.



Figuur 41: Enkele voorbeelden van configuraties van niet snijdende paden

Rondom het midden (bij x -coördinaat 0) kunnen de paden omhoog gaan. Vanaf een zekere grens buiten het midden liggen de paden, beide kanten op verder naar buiten, volstrekt horizontaal. Het niveau dat het pad daar heeft wordt de *standaardhoogte* van het pad genoemd.

Niet snijdende paden kun je zien als een stapel lakens met in het midden een plek waar de bovenste lakens iets omhoog komen.

Het is, zeg maar, net alsof het lang goed gaat om de lakens strak op elkaar te leggen, totdat er in het midden een kreukeltje komt. Hierdoor is dat laken daar een klein beetje omhoog. Ieder volgend laken zal daar ook weer minstens de hoogte van dat kreukeltje omhoog staan, maar misschien nog meer. Want tsja, als het eenmaal niet meer recht ligt, dan wordt het steeds lastiger.

Bijzonder aan deze stapeling is dat er maar exact één punt is waar het mis kan gaan, namelijk in het midden.

Kunnen we dit wiskundig beschrijven? Lakens stapelen klinkt als een drie dimensionale activiteit, maar we beperken ons tot een twee dimensionale situatie.

De lakens zijn oneindig lange paden, langs punten op een raster. De stapel lakens gaat oneindig ver naar beneden door en de standaardhoogte van het bovenste laken noemen we het "nul" pad.

Elk roosterpunt heeft een geheel getal als x -coördinaat en een geheel getal als y -coördinaat. We noteren punten als (m, n) . Een laken, of eigenlijk dus een pad, is een oneindige rij roosterpunten

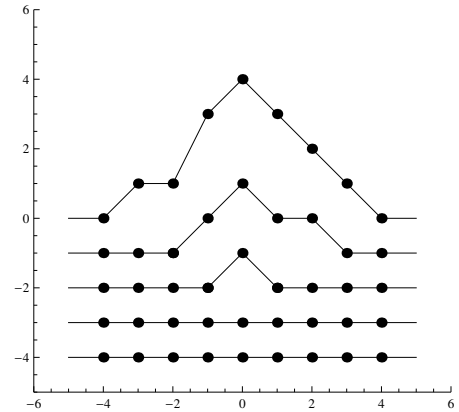
$$\dots, (-3, n_{-3}), (-2, n_{-2}), (-1, n_{-1}), (0, n_0), (1, n_1), (2, n_2), (3, n_3), (4, n_4), \dots$$

Omdat we voor elk pad de standaardhoogte weten, kunnen we het pad identificeren met deze standaardhoogte. Een pad met standaardhoogte r kunnen we dan beschrijven als een oneindige rij roosterpunten

$$\dots, (-3, n_{-3}^{(r)}), (-2, n_{-2}^{(r)}), (-1, n_{-1}^{(r)}), (0, n_0^{(r)}), (1, n_1^{(r)}), (2, n_2^{(r)}), (3, n_3^{(r)}), (4, n_4^{(r)}), \dots$$

Voorwaarden aan configuraties van niet snijdende paden:

1. $n_{i-1} \leq n_i$ voor $i < 0$ en $n_i \geq n_{i+1}$ voor $i \geq 0$.
Dit betekent dat het punt waar het mis gaat, waar de lakens omhoog komen, altijd in het midden is (met x -coördinaat 0) en dat het naar buiten toe afzakt naar beneden, naar de juiste hoogte van dat laken, naar r .
2. $n_{-i-1} = n_{-i} = n_i = n_{i+1}$ voor alle i groter dan een zeker groot getal $N > 0$.
Dit betekent dat als we nog verder naar buiten gaan, dan komen we langs een punt met afstand N tot het midden. Daarbuiten liggen de lakens perfect glad. Daarbuiten hebben alle punten van het pad dezelfde y -coördinaat, de standaardhoogte. Kortom: als $i \geq N$ dan geldt $n_i^{(r)} = n_{-i}^{(r)} = r$.



Figuur 42: niet snijdende paden

3. Er gaan paden door de roosterpunten $(N, 0)$, $(N, -1)$, $(N, -2)$, ... Met andere woorden: de standaardhoogte van de paden is altijd kleiner dan of gelijk aan 0. En voor iedere standaardhoogte kleiner dan of gelijk aan 0 is er een pad.
4. Er gaan geen paden door de roosterpunten $(N, 1)$, $(N, 2)$, $(N, 3)$, ... Met andere woorden: het nulpad zelf is het laatste laken, het bovenste pad.
5. De laatste voorwaarde is dat de paden elkaar niet mogen snijden. Als $r < s$ dan geldt voor elke i dat $n_i^{(r)} < n_i^{(s)}$.

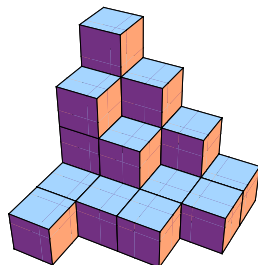
Opdracht 7.1 a. Teken nog een aantal van dit soort niet snijdende paden.

Opdracht 7.1 b. Beschrijf van de voorbeelden uit figuur 41 de waarden van (j, n_j) per pad in die gevallen dat het punt niet ligt op de standaardhoogte van het pad waar het bij hoort.

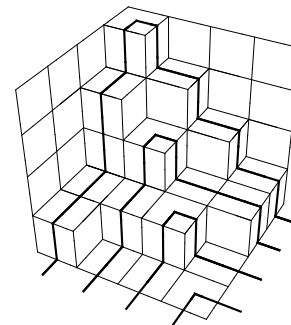
We zullen nu aantonen dat je (vaak) een pad op een unieke manier af kan leiden van een 3-d partitie. Het voorbeeld van figuur 42 komt af van de partitie (waaruit we de nullen voor het gemak even hebben weg gelaten)

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \\ 1 & & & \end{pmatrix}, \tag{16}$$

die correspondeert met de stapeling van figuur 43.



Figuur 43: 3-d partitie



Figuur 44: 3-d partitie met paden

Heb je enig idee wat de connectie is?

Om dit in te zien doen we het volgende. Voor het bovenste pad leggen we een touw over de kubussen die het dichtst bij de wanden liggen. Vervolgens leggen we, om het tweede pad te maken, een tweede touw over die kubussen die afstand 1 tot de wanden hebben. Het derde pad krijgen we met een touw over de kubussen die afstand 2 (tot de wanden) hebben, enz. enz.. Zo krijgen we tenslotte figuur 44.

Het eerste pad correspondeert dus met de volgende getallen in de 3-d partitie (16)

$$\begin{pmatrix} \underline{4} & \underline{3} & \underline{2} & \underline{1} \\ \underline{3} & 2 & 1 & 1 \\ \underline{1} & 1 & 1 & \\ \underline{1} & & & \end{pmatrix},$$

het tweede, derde en vierde pad met achtereenvolgens

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & \underline{2} & \underline{1} & \underline{1} \\ 1 & \underline{1} & 1 & \\ 1 & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \underline{1} & \\ 1 & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

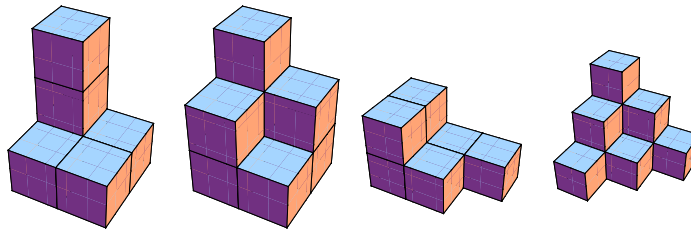
De overige paden lopen horizontaal.

Opdracht 7.2 a. Geef aan hoe je uit de bovenstaande getallen de roosterpunten van de eerste 5 paden kunt construeren.

Opdracht 7.2 b. Geef de roosterpunten van de eerste 5 paden van

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & \end{pmatrix}, \quad (2) \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & \\ 1 & & \end{pmatrix}, \quad (3) \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 & \\ 3 & 2 & 1 & \end{pmatrix}, \quad (4) \begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & & \end{pmatrix}.$$

Opdracht 7.2 c. Geef de roosterpunten van de eerste 4 paden van de 3-d partities in figuur 45.



Figuur 45: enkele 3-d partities

Opdracht 7.3 a. Leid een formule af voor de roosterpunten van de eerste $n + 1$ paden, die horen bij de 3-d partitie

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Opdracht 7.3 b. Beschrijf waarom en hoe elke 3-d partitie een unieke configuratie van niet snijdende paden definiëert.

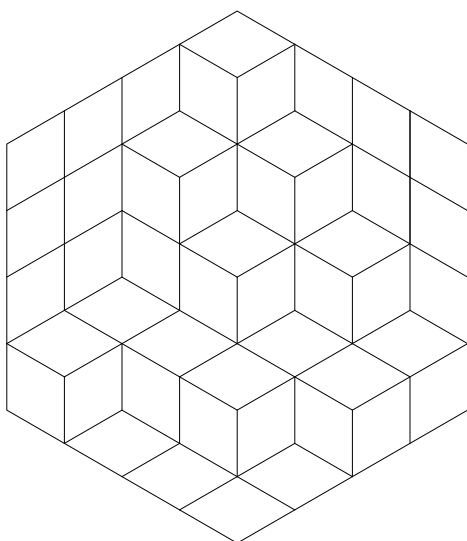
Opdracht 7.4 a. Geef een voorbeeld van een configuratie van niet snijdende paden die op deze manier niet afkomstig kan zijn van een 3-d partitie.

Opdracht 7.4 b (*). Formuleer extra eisen aan een configuratie van niet snijdende paden om het altijd afkomstig te kunnen laten zijn van een 3-d partitie.

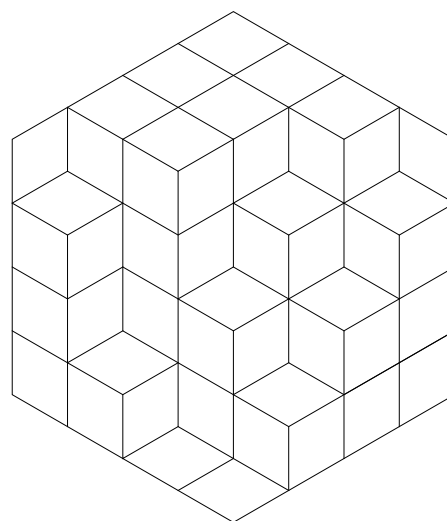
7.2 3-d partities en ruitbetegelingen

Als we de 3-d partitie uit figuur 43 nemen en een deel van de zijwanden erbij nemen krijgen we een ruitbetegeling van een hexagon, een regelmatige zeshoek (zie figuur 46). Bij deze ruitbetegeling is de volledige zeshoek gevuld met precies dezelfde vierhoeken, een ruit, in een drietal verschillende richtingen neergelegd.

Natuurlijk kun je de wanden groter maken. Dan wordt ook het hexagon groter. Echter we spreken af dat we altijd het kleinste hexagon nemen waarin een 3-d partitie past. Dit noemen we de *grootte* van het hexagon. Het hexagon van figuur 46 heeft grootte 4.



Figuur 46: ruitbetegeling



Figuur 47: figuur 46 gedraaid over 60 graden

Opdracht 7.5 a. Leg uit dat bij elke 3-d partitie een unieke ruitbetegeling van een hexagon bestaat.

Opdracht 7.5 b. Hoe kun je uit de getallen van de 3-d partitie

$$\pi = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & \\ 2 & 1 & & \end{pmatrix}$$

de (minimale) grootte van het hexagon bepalen? Geef het antwoord in dit concrete geval en beschrijf met welke methode je er toe gekomen bent.

We kunnen nu het hexagon roteren over een hoek van 60 graden.

Opdracht 7.6 a. In figuur 47 zie je figuur 46 gedraaid over 60 graden. Beschrijf welke 3-d partitie je zo krijgt.

Opdracht 7.6 b. Herhaal dit proces van draaien over 60 graden tot je weer terug bent in de uitgangspositie. Welke 3-d partities krijg je zo?

Opdracht 7.6 c. Doe hetzelfde voor de 3-d partities van opgave 7.2 b.

Opdracht 7.7 a. In plaats van roteren kunnen we ook spiegelen in een aantal assen die door het midden van het hexagon gaan. Beschrijf welke spiegelingen zo mogelijk zijn.

Opdracht 7.7 b. Beschrijf welke 3-d partities je zo krijgt als je dit doet voor de partitie van figuur 46.

Opdracht 7.7 c. Doe hetzelfde voor de 3-d partities van opgave 7.2 b.

Opdracht 7.8 a. Leg uit dat je door te roteren en te spiegelen in de assen door het midden van het hexagon alle mogelijke afbeeldingen krijgt die een hexagon in een hexagon overvoeren.

Opdracht 7.8 b. Hoeveel van dit soort afbeeldingen zijn er?

Opdracht 7.8 c. Het is eenvoudig in te zien dat je met 1 blokje geen 3-d partitie kunt maken die niet verandert als je het hexagon roteert of spiegelt. Hoeveel blokjes heb je minimaal nodig om wel zo'n 3-d partitie te maken, die niet verandert als je het hexagon roteert of spiegelt?

Definitie 7.1. Een 3-d partitie die niet verandert door de bijbehorende ruitbetegeling van het hexagon te roteren of te spiegelen noemen we een totaal symmetrische zelf-complementaire 3-d partitie.

In figuur 48 zie je een voorbeeld van zo'n totaal symmetrische zelf-complementaire 3-d partitie.

D.P. Robbins (1942 - 2003) stelde het volgende vermoeden op:

Vermoeden 7.1. Het aantal totaal symmetrische zelf-complementaire 3-d partities die horen bij een hexagon van grootte $2n$ is gelijk aan

$$\prod_{j=0}^{n-1} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!} \quad (17)$$

George Andrews bewees in 1992 dat het vermoeden van Robbins juist is.

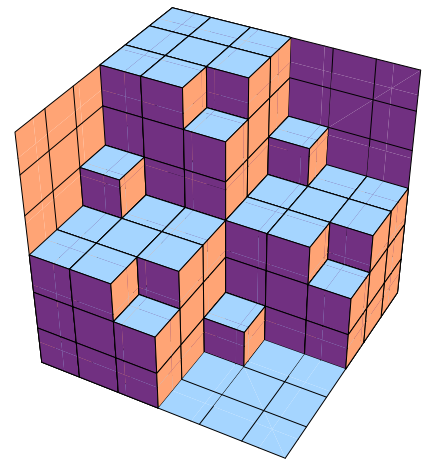
Opdracht 7.9 a. Geef een verklaring voor de naam van deze 3-d partities?

Opdracht 7.9 b. Bereken met bovenstaande formule het aantal totaal symmetrische zelf-complementaire 3-d partities die horen bij een hexagon van grootte $2n = 4$.

Opdracht 7.9 c. Beschrijf of teken ze allemaal.

Opdracht 7.9 d. Doe hetzelfde voor een hexagon van grootte $2n = 6$.

Opdracht 7.9 e. In vermoeden 7.1 wordt slechts een formule gegeven voor een hexagon met een grootte van een even getal. Onderzoek of je een totaal symmetrische zelf-complementaire 3-d partitie kunt maken die hoort bij een hexagon ter grootte 3. Als dit lukt, geef dan een voorbeeld. Als dit niet lukt, probeer dan te verklaren waarom niet.



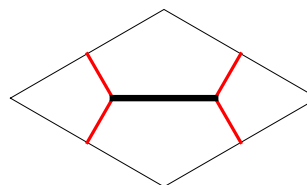
Figuur 48: Totaal symmetrische zelf-complementaire 3-d partitie

7.3 3-d partities en honingraatbetegeling

In paragraaf 7.2 hebben we gezien dat er een directe relatie bestaat tussen 3-d partities en ruitbetegelingen. In deze paragraaf willen we hier nog een ander soort figuur aan toevoegen. We zien deze als we elke ruit in figuur 46 door een andere ruit vervangen: namelijk die uit figuur 49.

Als we dit doen krijgen we figuur 50 van een honingraatbetegeling of hexagon-betegeling te zien. Hierbij ontstaan zeshoeken, waarbij de zijden die midden in een ruit lagen dik zijn, terwijl de zijden van de zeshoek die een zijde van een ruit sneed, dun zijn.

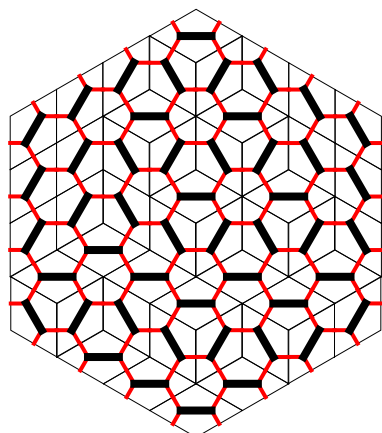
Als we vervolgens de ruit-randen weghalen houden we een echte honingraatbetegeling (figuur 51) over.



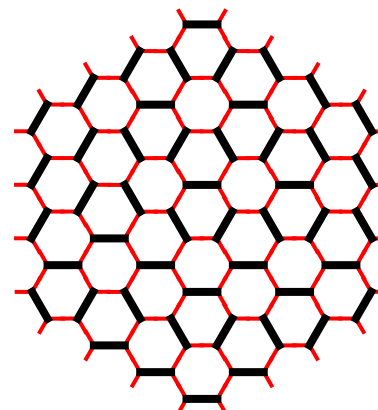
Figuur 49: Nieuwe ruittegel

Opdracht 7.10 a. Beschrijf welke honingraten (hexagons) je kunt krijgen. Beschrijf hierbij de mogelijke ligging van de dunne en dikke lijnen.

Opdracht 7.10 b. Beschrijf hoe je vanuit een honingraatbetegeling de ruitbetegeling terugkrijgt.



Figuur 50: Van ruitbetegeling naar honingraatbetegeling



Figuur 51: Honingraatbetegeling

Opdracht 7.11 a. Maak voor alle 3-d partities, die horen bij een ruitbetegeling van een hexagon van grootte 1, 2 of 3, de bijbehorende honingraatbetegeling.

Opdracht 7.11 b. Welke van deze honingraatbetegelingen horen bij een totaal symmetrische zelf-complementaire 3-d partitie?

Opdracht 7.11 c. In paragraaf 7.2 heb je totaal symmetrische zelf-complementaire 3-d partities bepaald, die horen bij een hexagon van grootte 2, 4 en 6. Teken de bijbehorende honingraatbetegelingen.

Inhoudsopgave

1	Inleiding	1
1.1	Andrei Okounkov	2
2	Partities	2
2.1	3-d partities	3
3	IJsmodel	5
3.1	IJs op een raster	5
3.2	Voorwaarden op de randen	6
3.3	Een drie dimensionale variant	8
4	2-d partities	9
4.1	Notaties	9
4.2	Frobenius-notatie van een partitie	10
4.3	Partities als Diophantische vergelijkingen	12
4.4	De frequentie-notatie van een partitie	13
5	3-d partities nader bekeken	15
5.1	3-d partities opdelen in 2-d partities	15
5.2	Nog een keer notatie	18
6	Producten en combinatoriek	20
6.1	De combinatoriek van $(1 + x)^n$	20
6.2	Binomium van Newton	22
6.3	Producten met opeenvolgende machten en combinatoriek	24
6.4	Producten met meerdere termen	26
7	3-d partities en andere afbeeldingen	29
7.1	3-d partities en niet snijdende paden	29
7.2	3-d partities en ruitbetegelingen	32
7.3	3-d partities en honingraatbetegeling	34