

Combinatoriek en partities

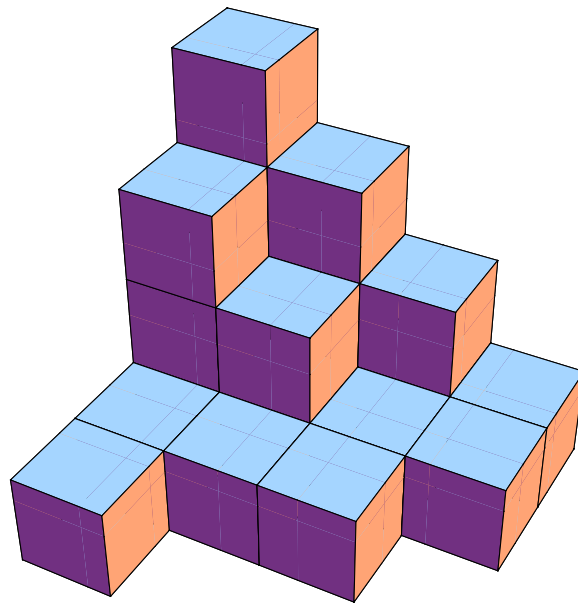
Deel 3

Veel verschillende vormen van tellen in uiteenlopende situaties

Johan van de Leur en Valentijn de Marez Oyens

Voorjaar 2010

Junior College Utrecht



Naam

8 Berekeningen met behulp van de computer

Voor het verder rekenen aan telfuncties gaan we de hulp inschakelen van de computer. We gaan hiervoor twee hulpmiddelen behandelen. Op de computers tijdens de les is een programma beschikbaar dat *Mathematica* heet, een erg krachtig hulpmiddel. Mocht je op een andere locatie verder willen werken aan de sommen kun je ook gebruik maken van een hulpmiddel dat op internet beschikbaar is, dit heet *Yacas*.

8.1 Mathematica

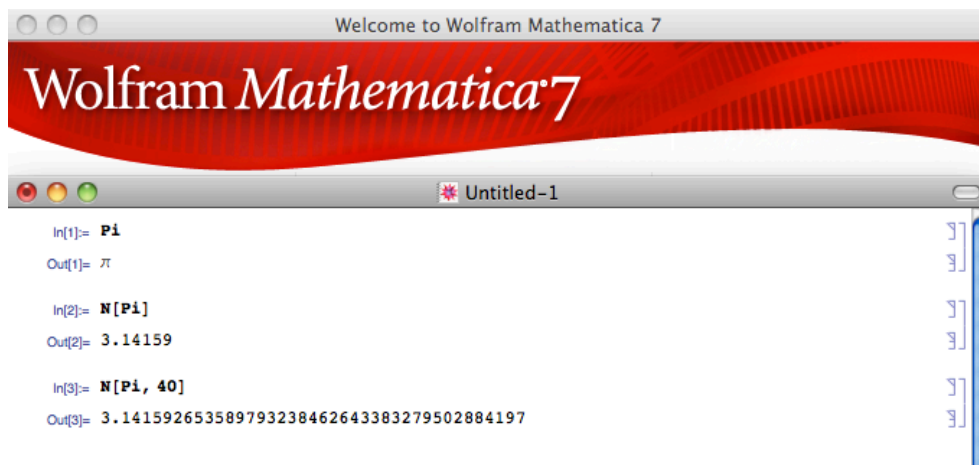
We gaan nu berekeningen uitvoeren met software die *Mathematica* heet.

Als je Mathematica start, krijg je een blanco pagina waarin je wiskundige berekeningen kunt formuleren en laten uitvoeren.

Nadat je een berekening hebt ingevoerd, kun je de berekening laten uitvoeren door de toetsen *Shift-Return* in te drukken, of indien beschikbaar de *Enter* toets helemaal rechts op het numerieke toetsenbord.

De gebruikelijke wiskundige operaties zoals $+$, $-$, $*$, $/$ en $^$ voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en machtsverheffen zijn ook in deze omgeving toepasbaar. Argumenten die je mee wilt geven aan een opdracht kun je doorgaans scheiden door een komma en omgeven door rechte haken. Soms bestaat een argument uit meerdere argumenten. In dat geval kun je argumenten groeperen tot één argument middels accolades. Een *argument*, in dit kader, is datgene waar je wilt dat de opdracht mee aan de slag gaat. Bijvoorbeeld bij de uitdrukking $\sin(2x)$ is $2x$ het argument van de opdracht \sin . In Mathematica wordt dat dan `Sin[2x]`.

Soms krijg je een uitdrukking niet direct terug als een getal, maar als een nog niet volledig uitgewerkte berekening. Dit kan zo zijn omdat het verder uitwerken eigenlijk neerkomt op het numeriek benaderen. Zo zal je bij de opdracht `Pi` als antwoord π krijgen. Wil je nu toch ongeveer weten wat hier uitkomt kun je het numeriek benaderen met de opdracht `N`, dus in dit geval met de opdracht `N[Pi]`. Als tweede argument kun je hieraan meegeven hoeveel decimalen je gespecificeerd wilt krijgen. Dus met `N[Pi, 40]` zal je als antwoord iets krijgen als 3.141592653589793238462643383279502884197, zie figuur 52.



Figuur 52: Het uitvoeren van `N[Pi]`

Voor het uitvoeren van een reeks optellingen is de opdracht `Sum` beschikbaar.

`Sum[uitdrukking, {variabele, van, tot en met}]`

komt op hetzelfde neer als $\sum_{\text{variabele} = \text{van}}^{\text{tot en met}} \text{uitdrukking}$.

Wil je bijvoorbeeld $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243$ uitrekenen, dan is dat $\sum_{i=0}^5 3^i$ dus bereken je dat met de opdracht `Sum[3^i, {i, 0, 5}]`. En dan krijg je hier inderdaad 364 uit.

Wil je bijvoorbeeld $1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5$ uitrekenen, dan is dat $\sum_{i=0}^5 q^i$ en kun je dit dus berekenen met de opdracht `Sum[q^i, {i, 0, 5}]`. Omdat q op dit moment een onbekende is levert dit als antwoord $1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5$ op. Zie ook afbeelding 53.

```

In[4]:= Sum[3^i, {i, 0, 5}]
Out[4]= 364

In[5]:= Sum[q^i, {i, 0, 5}]
Out[5]= 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5

```

Figuur 53: Het uitvoeren van Sum

Opdracht 8.1 a. Bereken met Mathematica de som van de getallen 1 tot en met 100.

Opdracht 8.1 b. Bereken met behulp van Mathematica een numerieke benadering voor $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{512}$

Voor het uitvoeren van een reeks vermenigvuldigingen is de opdracht `Product` beschikbaar.

`Product[uitdrukking, {variabele, van, tot en met}]`

komt op hetzelfde neer als $\prod_{\text{variabele} = \text{van}}^{\text{tot en met}} \text{uitdrukking}$.

Wil je bijvoorbeeld $(1 + q) * (1 + q^2) * (1 + q^3) * (1 + q^4) * (1 + q^5)$ uitrekenen dan zou je dat kunnen zien als $\prod_{i=1}^5 (1 + q^i)$ en kun je dit dus berekenen met de opdracht `Product[(1 + q^i), {i, 1, 5}]`. Dit levert als antwoord $(1 + q)(1 + q^2)(1 + q^3)(1 + q^4)(1 + q^5)$.

Voor het vereenvoudigen of uitwerken van een opdracht zoals de vorige bestaat de opdracht `Expand`.

`Expand[uitdrukking]`

Wil je bijvoorbeeld van de vorige vermenigvuldiging weten wat er uitkomt als het helemaal is uitgewerkt kun je dat doen door er de opdracht `Expand` omheen te zetten: `Expand[Product[(1 + q^i), {i, 1, 5}]]`. Dit levert als antwoord op:

$$1 + q + q^2 + 2q^3 + 2q^4 + 3q^5 + 3q^6 + 3q^7 + 3q^8 + 3q^9 + 3q^{10} + 2q^{11} + 2q^{12} + q^{13} + q^{14} + q^{15}$$

Opdracht 8.2 a. Gebruik nu Mathematica om uit te rekenen wat er uit $(1 + q)^7$ komt. Vergelijk dit met wat er uit komt als je het zelf uitrekent met behulp van het Binomium van Newton (zie formule (13) op pagina 22).

Opdracht 8.2 b. Bereken met behulp van Mathematica $\prod_{n=1}^4 (1 + q^n + q^{2n})$.

Om van een uitdrukking te weten wat de coëfficiënt is van een bepaalde macht van een variabele is de opdracht `Coefficient` beschikbaar.

`Coefficient[uitdrukking, variabele, macht]`

komt neer op het bepalen van de coëfficiënt van variabele^{macht} in de opgegeven uitdrukking. Naar keuze kan je ook volstaan met een variabele tot een macht als één argument in plaats van twee.

Dus `Coefficient[uitdrukking, variabele, macht]`

komt op het zelfde neer als `Coefficient[uitdrukking, variabele^macht]`.

Wil je nu bijvoorbeeld de coëfficiënt weten van q^3 in de uitdrukking $(1 + q)^5$ dan kan dat met de opdracht `Coefficient[(1 + q)^5, q, 3]` of eventueel ook met `Coefficient[(1 + q)^5, q^3]`. Dit levert als antwoord 10, wat we natuurlijk ook al wisten door $\binom{5}{3}$ uit te rekenen.

Opdracht 8.3 a. Gebruik nu Mathematica om uit te rekenen wat de coëfficiënt is van q^7 in $(1 + q)^{10}$.

Opdracht 8.3 b. Bereken met behulp van Mathematica de coëfficiënt van q^{13} in $\prod_{n=1}^5 (1 + q^n + q^{2n} + q^{3n})$.

Zolang de gezochte coëfficiënt gezocht wordt in een som en of product van machten is het voorgaande nog wel goed te doen. Maar bij een uitdrukking van de vorm $\prod_{i=1}^{10} \frac{1}{1-q^i}$ wordt het al een stuk lastiger. Hier zetten we dan een hulpmiddel in dat de uitdrukking waar we de coëfficiënt van zoeken op zeer nauwkeurige wijze benadert met een reeks machten. De methode staat bekend onder de naam *Taylorreeks*. De benadering die we hier mee krijgen moet altijd gezocht worden in de buurt van een waarde van de variabele, bijvoorbeeld in de buurt van $q = 5$. Een Taylorreeks die gezocht wordt in de buurt van $q = 0$ heet ook wel een *Maclaurinreeks*. Hoe meer machten we erbij nemen hoe nauwkeuriger de benadering.

Met de opdracht `Series` kun je zo'n Taylorreeks maken.

`Series[uitdrukking, {variabele, getal, macht}]`

zal een Taylorreeks maken voor de uitdrukking in de buurt van het getal voor de opgegeven variabele tot en met de opgegeven macht. Onderzoeken we bijvoorbeeld bovengenoemd voorbeeld $\prod_{i=1}^{10} \frac{1}{1-q^i}$ dan levert de opdracht

`Series[Product[1/(1-q^i), {i, 1, 10}], {q, 0, 10}]` als antwoord op $1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + 11q^6 + 15q^7 + 22q^8 + 30q^9 + 42q^{10} + O[q^{11}]$.

Deze laatste term $O[q^{11}]$ vertelt dat er nog wel meer termen na komen, maar dat deze termen de orde van grote hebben van q^{11} of een hogere macht. Omdat we de reeks ontwikkelen in de buurt van $q = 0$ zal deze restterm dus bij een grotere macht steeds kleiner worden.

Willen we nu van zo'n reeks alleen maar van één macht de coëfficiënt weten dan kunnen we gebruik maken van de opdracht `SeriesCoefficient`.

`SeriesCoefficient[uitdrukking, {variabele, getal, macht}]`

zal op dezelfde wijze als bij de opdracht `Series` de Taylorreeks maken, maar zal alleen de coëfficiënt van de opgegeven macht laten zien. Nemen we dezelfde argumenten als bij de vorige opdracht dan krijgen we bij

`SeriesCoefficient[Product[1/(1-q^i), {i, 1, 10}], {q, 0, 10}]`

niet geheel onverwacht als antwoord het getal 42.

Opdracht 8.4 a. Gebruik nu Mathematica om uit te rekenen wat de coëfficiënt is van q^7 in $\frac{1}{(1+q)^{10}}$.

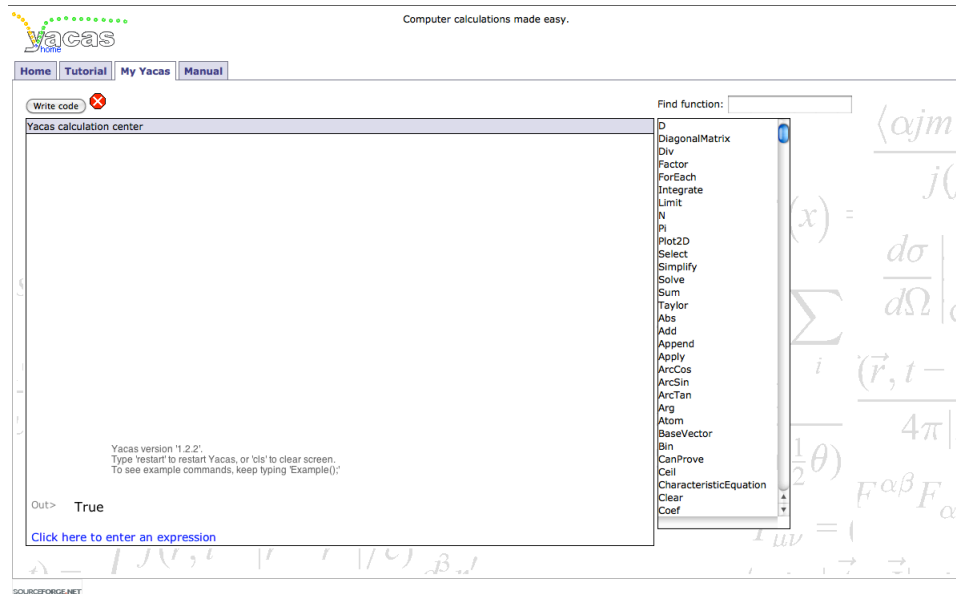
Opdracht 8.4 b. Bereken met behulp van Mathematica de coëfficiënt van q^{13} in $\prod_{n=1}^5 \frac{1}{(1+q^n+q^{2n}+q^{3n})}$.

8.2 Yacas

We gaan nu berekeningen uitvoeren met een stukje software dat op internet beschikbaar is om wiskundige berekeningen uit te voeren. Deze software heet *Yacas*, en deze is te vinden op het volgende adres:

<http://yacas.sourceforge.net/>

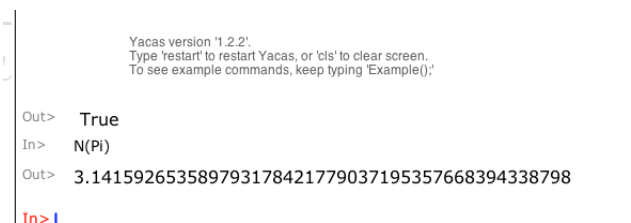
Als je hier op het tabblad “My Yacas” klikt kom je in een omgeving waar je wiskundige berekeningen kunt formuleren die je wilt laten uitvoeren, zie figuur 54. Deze omgeving biedt wel enkele mogelijkheden, maar is niet gebruikersvriendelijk. Ingevoerde opdrachten en resultaten kun je hier niet kopiëren of plakken. Met de pijltjestoetsen kan je wel naar een eerder ingevoerde opdracht wandelen, maar hier is niet met eenvoudig klikken de positie aan te wijzen waar je iets wilt veranderen. Dit kun je dan bereiken met de pijl naar links en naar rechts toetsen.



Figuur 54: De startpagina van “My Yacas”

De gebruikelijke wiskundige operaties zoals $+$, $-$, $*$, $/$ en $^$ voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en machtsverheffen zijn ook in deze omgeving toepasbaar.

Soms krijg je een uitdrukking niet direct terug als een getal, maar als een nog niet volledig uitgewerkte berekening. Dit kan zo zijn omdat het verder uitwerken eigenlijk neerkomt op het numeriek benaderen. Zo zal je bij de opdracht `Pi` als antwoord π krijgen. Wil je nu toch ongeveer weten wat hier uitkomt kun je het numeriek benaderen met de opdracht `N`, dus in dit geval met de opdracht `N(Pi)`. Dan zal je als antwoord iets krijgen als 3.141592653589793238463380954063617945426373028, zie figuur 55.



Figuur 55: Het uitvoeren van `N(Pi)`

Voor het uitvoeren van een reeks optellingen is de opdracht `Sum` beschikbaar.

`Sum(variabele, van, tot en met, uitdrukking)`

komt op hetzelfde neer als $\sum_{\text{variabele} = \text{van}}^{\text{tot en met}}$ uitdrukking.

Wil je bijvoorbeeld $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243$ uitrekenen, dan is dat $\sum_{i=0}^5 3^i$ dus bereken je dat met de opdracht `Sum(i, 0, 5, 3^i)`. En dan krijg je hier inderdaad 364 uit.

Wil je bijvoorbeeld $1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5$ uitrekenen, dan is dat $\sum_{i=0}^5 q^i$ en kun je dit dus berekenen met de opdracht `Sum(i, 0, 5, q^i)`. Omdat q op dit moment een onbekende is levert dit als antwoord $q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + 1$ op. Zie ook de afbeeldingen 56 en 57.

```

Yacas version '1.2.2'.
Type 'restart' to restart Yacas, or 'cls' to clear screen.
To see example commands, keep typing 'Example()';

Out> True
In> N(Pi)
Sum(var, from, to, body)
find sum of a sequence 3589793178421779037195357668394338798
In> Sum(i,0,5,q^i)
  
```

Figuur 56: Het uit gaan voeren van Sum

```

Yacas version '1.2.2'.
Type 'restart' to restart Yacas, or 'cls' to clear screen.
To see example commands, keep typing 'Example()';

Out> True
In> N(Pi)
Out> 3.141592653589793178421779037195357668394338798
In> Sum(i,0,5,q^i)
Out> q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + 1
In> |
  
```

Figuur 57: Het uitgevoerd hebben van Sum

Opdracht 8.5 a. Bereken met Yacas de som van de getallen 1 tot en met 100.

Opdracht 8.5 b. Bereken met behulp van Yacas een numerieke benadering voor $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{512}$

Voor het uitvoeren van een reeks vermenigvuldigingen is de opdracht `Factorize` beschikbaar.

`Factorize(variabele, van, tot en met, uitdrukking)`

komt op hetzelfde neer als $\prod_{\text{variabele} = \text{van}}^{\text{tot en met}}$ uitdrukking.

Wil je bijvoorbeeld $(1 + q) * (1 + q^2) * (1 + q^3) * (1 + q^4) * (1 + q^5)$ uitrekenen dan zou je dat kunnen zien als $\prod_{i=1}^5 (1 + q^i)$ en kun je dit dus berekenen met de opdracht `Factorize(i, 1, 5, (1+q^i))`. Dit levert als antwoord $(q + 1)(q^2 + 1)(q^3 + 1)(q^4 + 1)(q^5 + 1)$ op, wat in essentie natuurlijk wederom hetzelfde is.

Voor het vereenvoudigen of uitwerken van een opdracht zoals de vorige bestaat de opdracht `Simplify`.

`Simplify(uitdrukking)`

Wil je bijvoorbeeld van de vorige vermenigvuldiging weten wat er uitkomt als het helemaal is uitgewerkt kun je dat doen door er de opdracht `Simplify` omheen te zetten: `Simplify(Factorize(i, 1, 5, (1+q^i)))`. Dit levert als antwoord op:

$$q^{15} + q^{14} + q^{13} + 2q^{12} + 2q^{11} + 3q^{10} + 3q^9 + 3q^8 + 3q^7 + 3q^6 + 3q^5 + 2q^4 + 2q^3 + q^2 + q + 1$$

Opdracht 8.6 a. Gebruik nu Yacas om uit te rekenen wat er uit $(1 + q)^7$ komt. Vergelijk dit met wat er uit komt als je het zelf uitrekent met behulp van het Binomium van Newton (zie formule (13) op pagina 22).

Opdracht 8.6 b. Bereken met behulp van Yacas $\prod_{n=1}^4 (1 + q^n + q^{2n})$.

Om van een uitdrukking te weten wat de coëfficiënt is van een bepaalde macht van een variabele is de opdracht `Coef` beschikbaar.

`Coef(uitdrukking, variabele, macht)`

komt neer op het bepalen van de coëfficiënt van variabele^{macht} in de opgegeven uitdrukking.

Wil je nu bijvoorbeeld de coëfficiënt weten van q^3 in de uitdrukking $(1 + q)^5$ dan kan dat met de opdracht `Coef((1+q)^5, q, 3)`. Dit levert als antwoord 10, wat we natuurlijk ook al wisten door $\binom{5}{3}$ uit te rekenen.

Opgave 8.7 a. Gebruik nu `Yacas` om uit te rekenen wat de coëfficiënt is van q^7 in $(1 + q)^{10}$.

Opgave 8.7 b. Bereken met behulp van `Yacas` de coëfficiënt van q^{13} in $\prod_{n=1}^5 (1 + q^n + q^{2n} + q^{3n})$.

In de paragraaf over `Mathematica` staat boven opgave 8.4 een uitleg over het ontwikkelen van een Taylorreeks. Volgens de specificaties zit dit ook in `Yacas` (`Taylor`). We hebben hier echter nog geen resultaat uit gekregen binnen een acceptabele wachttijd. Zelfs na 10 minuten even wat anders doen hadden we nog geen resultaat. We adviseren, om in die gevallen waarin dit wel nodig is, de uitdrukking toch maar eerst zelf te herschrijven naar een vorm waarin de eerdere opdrachten uit deze paragraaf inzetbaar zijn.

9 Op zoek naar een telfunctie voor 2 dimensionale partities

In hoofdstuk 6 zagen we dat we het aantal mogelijke partities van n (volgens bepaalde voorwaarden) precies de coëfficiënt in een uitdrukking is van q^n .

We gaan nu telfuncties maken. Dat zijn uitdrukkingen van de vorm $p(0) + p(1)q + p(2)q^2 + p(3)q^3 + p(4)q^4 + \dots$, oftewel $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n$. Hierbij vertellen de waarden van $p(n)$ ons hoeveel partities van n er zijn (gegeven zekere voorwaarden).

We onderzoeken eerst de som van machten.

9.1 Een formule voor $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{m-1} + q^m$

We willen nu, zoals de titel al zegt, een korte formule vinden voor

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{m-1} + q^m.$$

Noem deze som S . We vermenigvuldigen deze som eerst met q , dan krijgen we:

$$qS = q(1 + q + q^2 + \dots + q^m) = q + q^2 + \dots + q^{m+1}. \quad (18)$$

Deze laatste uitdrukking (18) trekken we nu weer af van de oorspronkelijke som. We krijgen zo:

$$\begin{aligned} S - qS &= (1 - q)S = (1 - q)(1 + q + q^2 + \dots + q^m) = 1 + q + q^2 + \dots + q^m \\ &\quad - (q + q^2 + \dots + q^m + q^{m+1}) \\ &= 1 - q^{m+1}. \end{aligned}$$

Dus

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{m-1} + q^m = \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q} \quad (19)$$

en ook

$$1 + q^k + q^{2k} + q^{3k} + \dots + q^{(m-1)k} + q^{mk} = \frac{1 - q^{(m+1)k}}{1 - q^k}. \quad (20)$$

Opdracht 9.1 a. Bereken met behulp van de net geïntroduceerde formules $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 256$ en $1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 729$.

Opdracht 9.1 b. Bereken met behulp van de net geïntroduceerde formules $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{256}$. Zie ook afbeelding 58. Waar zou deze som naar toe gaan als je nog meer machten toevoegt?

Opdracht 9.1 c. Toon aan dat formule (20) klopt.

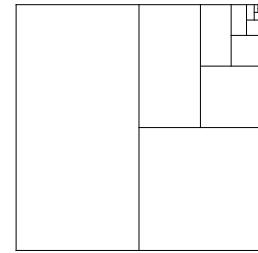
Hiermee wordt het product in (14), dat we gebruikt hebben om partities te berekenen waarbij elk getal ten hoogste m keer voor mag komen, gelijk aan

$$\prod_{k=1}^n (1 + q^k + q^{2 \cdot k} + \dots + q^{m \cdot k}) = \prod_{k=1}^n \frac{1 - q^{(m+1)k}}{1 - q^k}. \quad (21)$$

en de formule (15), die we gebruikten om partities zonder restrictie te berekenen, gelijk aan

$$\prod_{k=1}^n (1 + q^k + q^{2 \cdot k} + \dots + q^{n \cdot k}) = \prod_{k=1}^n \frac{1 - q^{(n+1)k}}{1 - q^k}. \quad (22)$$

Als we nu niet alleen de eerste n getallen willen toelaten maar alle positieve getallen, dan moeten we n oneindig groot laten worden. Voor *oneindig* gebruiken we het symbool: ∞ . Soms bestaat de limiet voor n gaat naar oneindig van $\sum_{k=0}^n q^k$. Met de limiet $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ bedoelen we dus dat we tot in het oneindige doorgaan met waarden voor q^k er bij optellen.



Figuur 58: Een verbeelding van $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$

Stelling 9.1. De telfunctie voor alle partities van n waarbij we elk getal maar maximaal m maal mogen gebruiken is gelijk aan:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - q^{(m+1)k}}{1 - q^k}. \quad (23)$$

Opdracht 9.2 a. Laat zien dat stelling 9.1 klopt.

Stelling 9.2. De telfunctie voor strikte partities van n is gelijk aan:

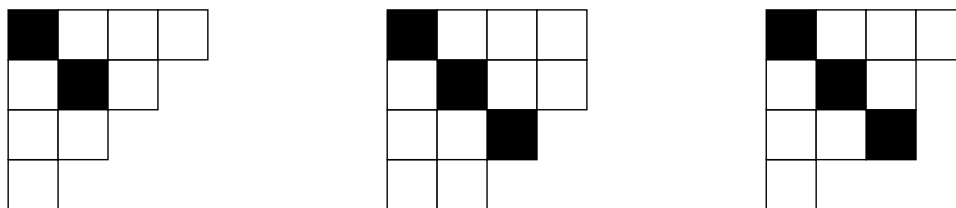
$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + q^k). \quad (24)$$

Opdracht 9.2 b. Weet je nog wat strikte partities zijn? Hierbij mogen we elk getal maar maximaal 1 keer gebruiken. Laat zien dat stelling 9.2 klopt. Met andere woorden, laat zien dat formule (23) voor $m = 1$ gelijk is aan formule (24).

Om alle gewone partities te beschrijven, willen we de voorwaarde, dat elk getal maar m keer voor mag komen, laten vervallen. We willen dan m in formule (23) naar oneindig laten gaan. Om dit te bewerkstelligen moeten we nog wat vertellen over de meetkundige reeks. Hierover spoedig meer. Eerst zullen we in de volgende paragraaf de telfunctie voor zelfgeconjugeerde partities onderzoeken.

9.2 Een zelf-geconjugeerde Frobenius partitie uitvouwen

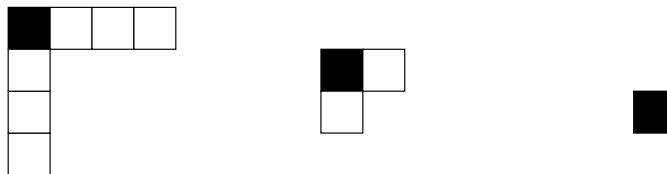
Een partitie die gelijk is aan zijn geconjugeerde heet *zelf-geconjugeerde*. Zo'n partitie is het snelst te herkennen in de Frobenius notatie, want in dat geval staat er voor en na de verticale streep exact hetzelfde: $(a_1, a_2, \dots, a_n | a_1, a_2, \dots, a_n)$.



Figuur 59: Drie zelf-geconjugeerde partities

In figuur 59 zie je drie zelf-geconjugeerde partities in een Ferrersdiagram, waarbij de vierkanten op de diagonaal alvast zwart zijn gemaakt, zoals dat hoort bij de voorbereidingen voor een Frobenius notatie.

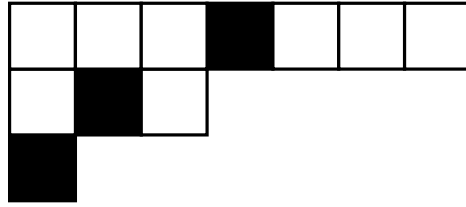
We werken nu verder met de rechter partitie in figuur 59, de partitie van 11 gegeven door $\lambda = (4, 3, 3, 1)$ en in Frobenius notatie $(3, 1, 0 | 3, 1, 0)$.



Figuur 60: De zelf-geconjugeerde partitie van 11 bekeken per laag

Als we de hokjes in de eerste rij en kolom tellen dan vinden we er $2 \times 3 + 1 = 7$. In de tweede rij en kolom tellen we $2 \times 1 + 1 = 3$ hokjes. En in de derde rij en kolom tellen we $2 \times 0 + 1 = 1$ hokjes. Elk hokje telt maar één keer mee. Bij de tweede en derde rij en kolom telt niet meer mee, wat bij het voorgaande al is meegeteld. Zie figuur 60.

Als we de “lagen” die we vinden in figuur 60 horizontaal uitvouwen en stapelen tot een nieuwe partitie krijgen we de partitie $\lambda = (7, 3, 1)$ van 11 zoals afgebeeld in figuur 61. Hierbij is dus laag i wat we vinden in rij i (op en rechts van de diagonaal) en in kolom i (op en onder de diagonaal) samen.



Figuur 61: De partitie van 11 uitgevouwen per laag tot een nieuwe partitie

Stelling 9.3. De telfunctie van alle zelf-geconjugeerde partities is gelijk aan:

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + q^{2k+1}). \quad (25)$$

Opdracht 9.3. We verzamelen nu, in opdracht 9.3, materiaal om uiteindelijk stelling 9.3 te kunnen bewijzen.

Opdracht 9.3 a. Geef van de andere twee zelf-geconjugeerde partities in figuur 59 zowel de λ als de Frobenius notatie.

Opdracht 9.3 b. Laat zien dat de linker partitie in figuur 59 middels de hier geïntroduceerde “uitbouwconstructie” correspondeert met de partitie $\lambda = (7, 3)$.

Opdracht 9.3 c. Welke partitie hoort met deze “uitbouwconstructie” bij de middelste partitie uit figuur 59?

Opdracht 9.3 d. Toon aan dat elke zelf-geconjugeerde partitie in Frobenius notatie gegeven door $(a_1, a_2, \dots, a_n | a_1, a_2, \dots, a_n)$ middels de “uitbouwconstructie” correspondeert met de partitie $\lambda = (2a_1 + 1, 2a_2 + 1, \dots, 2a_n + 1)$ in de standaard notatie.

Opdracht 9.3 e. Bewijs dat uit formule (4) op pagina 10 volgt dat in de Frobenius notatie $(a_1, a_2, \dots, a_n | b_1, b_2, \dots, b_n)$ alle a_i verschillend zijn en dat ook alle b_i verschillend zijn.

Opdracht 9.3 f. Beschrijf hoe je met deze “uitbouwconstructie” altijd een strikte partitie krijgt die bestaat uit oneven getallen van de vorm $2a_i + 1$.

Opdracht 9.3 g. Leg uit hoe elke strikte partitie in oneven getallen $\lambda = (2a_1 + 1, 2a_2 + 1, \dots, 2a_n + 1)$ via de omgekeerde route altijd correspondeert met een zelf-geconjugeerde partitie $(a_1, a_2, \dots, a_n | a_1, a_2, \dots, a_n)$ in Frobenius notatie.

Opdracht 9.3 h. Beredeneer dat stelling 9.3 klopt.

9.3 De meetkundige reeks $1 + q + q^2 + q^3 + \dots$

Om nu de formule voor de telfunctie van de gewone 2-dimensionale partities te krijgen willen we in feite formule (14) gebruiken en daarin m oneindig groot laten worden. We krijgen dan $1 + q + q^2 + q^3 + \dots$. Zo'n oneindige sommatie van oplopende machten noemen we een *meetkundige reeks*. We beginnen eenvoudiger, namelijk met de formule (19):

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{m-1} + q^m = \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q}.$$

We laten nu m oneindig groot worden. Met andere woorden we willen het volgende doen:

$$\begin{aligned} 1 + q + q^2 + \dots &= \lim_{m \rightarrow \infty} 1 + q + q^2 + \dots + q^{m-1} + q^m \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q}. \end{aligned} \quad (26)$$

Aan de linker kant staat de meetkundige reeks. De limiet aan de rechterkant heeft alleen maar betekenis als $\lim_{m \rightarrow \infty} q^{m+1}$ betekenis heeft.

Opdracht 9.4. *Als q te groot of erg negatief is dan explodeert de waarde van deze limiet. Voor welke waarden van q heeft de limiet $\lim_{m \rightarrow \infty} q^{m+1}$ wel een werkbare uitkomst? En wat komt hier dan uit?*

Zo krijgen we:

$$1 + q + q^2 + \dots = \frac{1}{1 - q}, \quad \text{voor in opdracht 9.4 gevonden geschikte waarde van } q. \quad (27)$$

Opdracht 9.5. *Gebruik nu formule (27) om antwoord te geven op de laatste vraag van opdracht 9.1 b. Klopte je vermoeden?*

Opdracht 9.6. *Als we nu in formule (26) q vervangen door q^k moeten we bewaken dat $\lim_{m \rightarrow \infty} (q^k)^{m+1}$ betekenis heeft. Voor welke waarden van q heeft de limiet $\lim_{m \rightarrow \infty} (q^k)^{m+1}$ wel een werkbare uitkomst? En wat komt hier dan uit?*

Met de waarden voor q uit opdracht 9.6 geldt ook:

$$1 + q^k + q^{2k} + \dots = \frac{1}{1 - q^k}, \quad \text{voor in opdracht 9.6 gevonden geschikte waarde van } q.$$

Opdracht 9.7 a. *Bereken $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots$.*

Opdracht 9.7 b. *Bereken $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots$.*

Opdracht 9.7 c. *Bereken $\frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \frac{1}{3125} + \dots$.*

Opdracht 9.8. *Laat zien dat $q^k + q^{k+1} + q^{k+2} + \dots = \frac{q^k}{(1-q)}$.*

9.4 De telfunctie van gewone partities

Opnieuw definiëren we de telfunctie. Laat $p(n)$ het aantal verschillende partities zijn van het getal n , de tel- of partitiefunctie is de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = p(0) + p(1)q + p(2)q^2 + p(3)q^3 + \dots, \quad (28)$$

waarbij de coëfficiënt van q^n het aantal (2-dimensionale partities) is van n .

We maken hier gebruik van de kleine letter p . De hoofdletter P zullen we voor de 3-dimensionale partities gebruiken, de kleine letter p voor de gewone of 2-dimensionale partities.

Opdracht 9.9. *Schrijf de eerste 7 termen van deze reeks op.*

Om nu de formule voor de telfunctie van de gewone 2-dimensionale partities te krijgen willen we in feite formule (21) gebruiken en daarin m oneindig groot maken. We gebruiken de resultaten van paragraaf 9.3. Dit alles combinerend krijgen we de volgende stelling.

Stelling 9.4. *De telfunctie voor gewone 2-dimensionale partities is:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^k}. \quad (29)$$

Hierbij nemen we aan dat $|q| < 1$, vanaf nu zullen we dit blijven doen.

We hebben ook gezien hoe we partities op kunnen bouwen, als er grenzen gelden voor hoe vaak je een getal k mag gebruiken. Welke termen in het product voor moeten komen als een getal k maximaal m keer mag voorkomen is

$$\frac{1 - q^{(m+1)k}}{1 - q^k},$$

voor $m = 1$ geeft dit

$$1 + q^k$$

en wanneer dit zelfs onbegrensd vaak mag zijn, dan hebben we

$$\frac{1}{1 - q^k}.$$

Opdracht 9.10. *In deze opdracht vragen we ons af welke bedragen je kunt betalen en op hoeveel verschillende manieren, gegeven de muntstukken die je bij je hebt. Stel je hebt in je broekzak 10 muntjes van 5 cent, 12 muntjes van 10 cent, 7 van 20 en 14 van 50. Stel eerst een formule op waarmee je deze vraag kunt berekenen. Bereken (met behulp van één van de hulpmiddelen uit paragraaf 8) op hoeveel manieren je 3 euro 15 kunt betalen?*

Opdracht 9.11 a. *Maak de telfunctie en bereken met behulp van één van de hulpmiddelen uit paragraaf 8 de eerste 16 termen (dus tot en met q^{15}) van de telfunctie van strikte partities.*

Opdracht 9.11 b. *Maak de telfunctie en bereken met behulp van één van de hulpmiddelen uit paragraaf 8 de eerste 16 termen van de telfunctie van partities in alleen oneven getallen. We hebben dus geen grens hoe vaak elk oneven getal voor mag komen.*

Opdracht 9.11 c. *Vergelijk opgave 9.11 a met opgave 9.11 b. Stel een vermoeden op en probeer dat te bewijzen.*

9.5 Telfuncties van twee variabelen

Soms wil je meer bepalen dan alleen het aantal partities van het getal n . Stel dat je wilt weten op hoeveel manieren je 3 euro 15 kunt betalen met muntjes van 5, 10, 20 en 50 cent, waarbij je precies 22 muntjes wilt gebruiken, of nog anders niet meer dan 22 muntjes. Je kunt dit doen door in de telfunctie een extra variabele in te bouwen die het aantal munten telt. Hiervoor zul je de variabele t gebruiken. Neem het volgende voorbeeld.

$$(1 + tq^5 + t^2q^{2\cdot 5} + t^3q^{3\cdot 5}) (1 + tq^{10} + t^2q^{2\cdot 10} + t^3q^{3\cdot 10} + t^4q^{4\cdot 10}) .$$

Opdracht 9.12 a. *Werk de haakjes weg en bereken de coëfficiënt van t^3q^{25} .*

Opdracht 9.12 b. *Leg uit dat dit het aantal manieren voorstelt waarop je 25 cent kunt betalen met 3 muntjes van 5 of 10 cent.*

Opdracht 9.12 c. *Beschrijf welke uitgangssituatie in de portemonnaie beschreven wordt met deze voorbeeld formule.*

Opdracht 9.12 d. *Stel een formule op waarmee je bovenstaande probleem kunt oplossen. Dat wil zeggen bepalen op hoeveel manieren je 3 euro 15 kunt betalen met muntjes van 5, 10, 20 en 50 cent, waarbij je precies 22 muntjes wilt gebruiken.*

Opdracht 9.12 e. *Bereken met behulp van één van de hulpmiddelen uit paragraaf 8 wat het antwoord is op deze vraag met je formule.*

9.6 Een observatie van Schur

Issai Schur (1875 - 1941), een Duits wiskundige, en leerling van Frobenius, maakte bij de bestudering van partities de volgende observatie.

Het aantal partities van n in getallen van de vorm $6k \pm 1$ is gelijk aan het aantal strikte partities van n in getallen van de vorm $3k \pm 1$.

Opdracht 9.13 a. *Verifiëer dit voor de getallen $n = 1, 2, \dots, 15$.*

We zullen dit nu aantonen door te gooien met oneindige producten. De telfunctie die het aantal partities van n beschrijft in de getallen $6k \pm 1$ is gelijk aan:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^{6k-1})(1 - q^{6k-5})} , \quad (30)$$

de telfunctie van het aantal strikte partities in de getallen $3k \pm 1$ is gelijk aan:

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + q^{3k-1})(1 + q^{3k-2}) . \quad (31)$$

Opdracht 9.13 b. *Leg uit hoe we aan de formules (30) en (31) zijn gekomen.*

Deze twee uitdrukkingen moeten dus hetzelfde zijn. We herschrijven (31):

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{\infty} (1 + q^{3k-1})(1 + q^{3k-2}) &= \prod_{k=1}^{\infty} (1 + q^{3k-1})(1 + q^{3k-2}) \frac{(1 - q^{3k-1})(1 - q^{3k-2})}{(1 - q^{3k-1})(1 - q^{3k-2})} \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{6k-2})(1 - q^{6k-4})}{(1 - q^{3k-1})(1 - q^{3k-2})} \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{6k-2})(1 - q^{6k-4})}{(1 - q^{6k-4})(1 - q^{6k-1})(1 - q^{6k-5})(1 - q^{6k-2})} \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^{6k-1})(1 - q^{6k-5})} , \end{aligned}$$

en dit is formule (30). Hiermee hebben we de observatie van Schur aangetoond. In de volgende opgave gaan we iets dieper in op enkele stappen in de berekening.

Opdracht 9.14 a. *Leg uit waarom geldt dat*

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + q^{3k-1})(1 + q^{3k-2}) \frac{(1 - q^{3k-1})(1 - q^{3k-2})}{(1 - q^{3k-1})(1 - q^{3k-2})} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{6k-2})(1 - q^{6k-4})}{(1 - q^{3k-1})(1 - q^{3k-2})}.$$

Opdracht 9.14 b. *Leg uit waarom geldt dat*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{6k-2})(1 - q^{6k-4})}{(1 - q^{3k-1})(1 - q^{3k-2})} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{6k-2})(1 - q^{6k-4})}{(1 - q^{6k-4})(1 - q^{6k-1})(1 - q^{6k-5})(1 - q^{6k-2})}.$$

Opdracht 9.14 c. *Leg uit waarom dat niet werkt voor bijvoorbeeld een bovengrens van 15:*

$$\prod_{k=1}^{15} \frac{(1 - q^{6k-2})(1 - q^{6k-4})}{(1 - q^{3k-1})(1 - q^{3k-2})} \neq \prod_{k=1}^{15} \frac{(1 - q^{6k-2})(1 - q^{6k-4})}{(1 - q^{6k-4})(1 - q^{6k-1})(1 - q^{6k-5})(1 - q^{6k-2})}.$$

10 Een recursieve formule voor $p(n)$

We zullen nu een recursieve formule afleiden om $p(n)$ snel mee te bepalen. Neem de formule (29) en vermenigvuldig zowel de linker- als de rechterkant met $1 - q$, we krijgen zo:

$$(1 - q) \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{j=2}^{\infty} \frac{1}{1 - q^j}. \quad (32)$$

Uit de rechterkant wordt duidelijk dat de coëfficiënt van q niet voorkomt.

Opdracht 10.1 a. Leg uit waarom uit de rechterkant volgt, dat de coëfficiënt van q niet voor komt.

Opdracht 10.1 b. Laat zien dat de coëfficiënt van q aan de linkerkant gelijk is aan $p(1) - p(0)$.

Met andere woorden

$$p(1) - p(0) = 0. \quad (33)$$

Vermenigvuldig nu (32) met $1 - q^2$, dit geeft:

$$(1 - q)(1 - q^2) \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{j=3}^{\infty} \frac{1}{1 - q^j}. \quad (34)$$

Opnieuw komt rechts q niet voor, maar ook niet q^2 .

Opdracht 10.1 c. Laat zien dat de coëfficiënt van q^2 aan de linkerkant leidt tot

$$p(2) - p(1) - p(0) = 0. \quad (35)$$

Opdracht 10.1 d. Vermenigvuldig (34) met $1 - q^3$ en laat zien dat dit leidt tot

$$p(3) - p(2) - p(1) = 0. \quad (36)$$

We willen in feite (29) met

$$\prod_{j=1}^m (1 - q^j) \quad (37)$$

vermenigvuldigen. Rechts komt dan de coëfficiënt van q^m niet voor, d.w.z. dat de coëfficiënt links gelijk moet zijn aan 0. We kunnen zo $p(m)$ uitdrukken in $p(0)$, $p(1)$, \dots , tot en met $p(m - 1)$. Dit idee komt van de alround wiskundige Leonhard Euler. Hij werkte de haakjes in (37) voor grote m uit en zag dat dit gelijk is aan

$$1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} - q^{35} - q^{40} + \dots$$

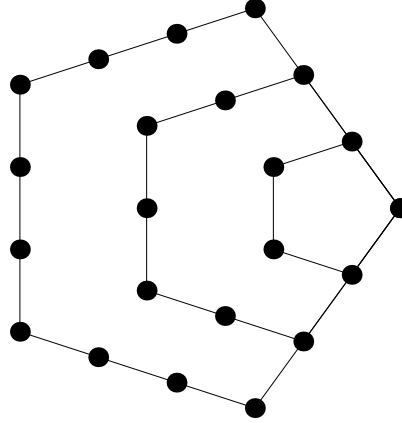
De machten die voorkomen zijn de *pentagonale getallen*, d.w.z. getallen van de vorm

$$\frac{3\ell^2 \pm \ell}{2},$$

de coëfficiënten voor deze machten zijn gelijk aan $(-1)^\ell$. Euler kwam tot het vermoeden dat

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} (-1)^\ell q^{\frac{3\ell^2 - \ell}{2}} = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^j). \quad (38)$$

Hij deed er meer dan 10 jaar over om te bewijzen dat dit inderdaad klopt. De pentagonale getallen hebben te maken met het opvullen van een pentagon. Voor $\ell = 1, 2, 3$ en 4 in formule (38) krijgen we $1, 5, 12$ en 22 . dit correspondeert met figuur 62.



Figuur 62: pentagonale getallen 1, 5, 12, 22

Als we de formule (38) omschrijven en gebruikmaken van (29) dan krijgen we

$$(1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} - q^{35} - q^{40} + \dots) \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = 1.$$

Ofwel

$$\begin{aligned} 1 = & p(0) + p(1)q + p(2)q^2 + p(3)q^3 + p(4)q^4 + p(5)q^5 + p(6)q^6 + p(7)q^7 + p(8)q^8 + p(9)q^9 + \dots \\ & - p(0)q - p(1)q^2 - p(2)q^3 - p(3)q^4 - p(4)q^5 - p(5)q^6 - p(6)q^7 - p(7)q^8 - p(8)q^9 - \dots \\ & - p(0)q^2 - p(1)q^3 - p(2)q^4 - p(3)q^5 - p(4)q^6 - p(5)q^7 - p(6)q^8 - p(7)q^9 - \dots \\ & + p(0)q^5 + p(1)q^6 + p(2)q^7 + p(3)q^8 + p(4)q^9 + \dots \\ & + p(0)q^7 + p(1)q^8 + p(2)q^9 + \dots \end{aligned}$$

We krijgen zo naast de formules (33), (35) en (36) de formule $p(0) = 1$ en:

$$\begin{aligned} p(2) + p(3) - p(4) &= 0, \\ p(0) - p(3) - p(4) + p(5) &= 0, \\ p(0) + p(2) - p(5) - p(6) + p(7) &= 0, \\ p(1) + p(3) - p(6) - p(7) + p(8) &= 0, \\ p(2) + p(4) - p(7) - p(8) + p(9) &= 0. \end{aligned}$$

Opdracht 10.2. Laat zien dat ook geldt:

$$\begin{aligned} p(3) + p(5) - p(8) - p(9) + p(10) &= 0, \\ p(4) + p(6) - p(9) - p(10) + p(11) &= 0. \end{aligned}$$

Algemeen leidt men zo de *formule van Euler* af.

Stelling 10.1. Voor $n > 0$ geldt:

$$\begin{aligned} p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-5) + p(n-7) - \dots \\ + (-1)^\ell \left(p\left(n - \frac{3\ell^2 - \ell}{2}\right) + p\left(n - \frac{3\ell^2 + \ell}{2}\right) \right) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Opdracht 10.3. Bereken met behulp van de formule van Euler de eerste 15 $p(n)$ -en.

Opdracht 10.4. De naam pentagonale getallen komt van het woord pentagon, dat vijfhoek betekent. In figuur 62 zie je een constructie van enkele pentagonale getallen. Laten we ze benoemen met a_i : $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = 12$ en $a_4 = 22$. We gaan nu proberen de a_i recursief te definiëren. We kijken naar de constructie in figuur 62. Bij ieder volgend pentagonaal getal komt er een gedeelte van een vijfhoek bij.

Opdracht 10.4 a. Als we a_{i+1} willen uitdrukken in termen van a_i , hoeveel hoekpunten komen er dan bij?

Opdracht 10.4 b. Als we a_{i+1} willen uitdrukken in termen van a_i , hoeveel punten midden op een zijde (dus exclusief hoekpunten) komen er dan bij?

Opdracht 10.4 c. Geef een recursieve formule voor pentagonale getallen a_{i+1} uitgedrukt in a_i en i .

Opdracht 10.4 d. Laat zien dat je formule voldoet aan de eerder gevonden formule voor positieve ℓ :

$$a_\ell = \frac{3\ell^2 - \ell}{2}.$$

11 Van partities naar Mayadiagrammen

We gaan nu iets heel anders bekijken, namelijk de zogenaamde *Mayadiagrammen*, en onderzoeken hoe het samenhangt met partities.

11.1 Mayadiagrammen

Om een Mayadiagram te maken beginnen we met een oneindige rij van aaneengeschakelde dozen. Elke doos heeft een geheel getal als nummer. Stel het nummer van een doos is n dan heeft de doos links van deze doos nummer $n - 1$ en rechts van deze doos nummer $n + 1$. Zie figuur 63.



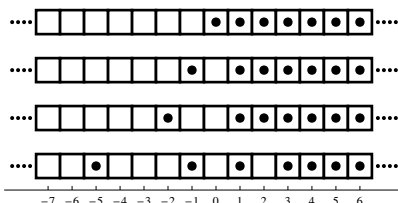
Figuur 63: Oneindige rij dozen

Een Mayadiagram bestaat uit deze rij dozen waarin we ballen plaatsen. Echter niet zomaar, maar op de volgende manier.

Voorwaarden aan Mayadiagrammen:

1. Elke doos is of leeg of bevat slechts één bal;
2. Er zijn maar eindig veel dozen, laten we zeggen p , met een nummer groter dan of gelijk aan 0 die geen bal bevatten;
3. Er zijn ook precies p dozen met een nummer kleiner dan nul die een bal bevatten, alle andere negatief-genummerde dozen zijn leeg.

In figuur 64 geven we enkele voorbeelden van Mayadiagrammen.

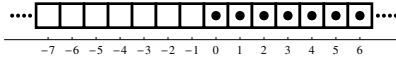


Figuur 64: Enkele voorbeelden van Mayadiagrammen

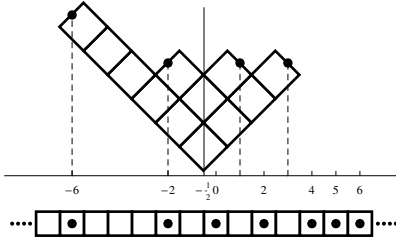
Bij elke partitie behoort een uniek Mayadiagram. Voor het beschrijven van de relatie gebruiken we het woord *bijjectie*. Een bijjectie is een relatie tussen twee verzamelingen objecten. Voor ieder object in de ene verzameling is exact één corresponderend object in de andere verzameling, en ook andersom. De bijjectie wordt gegeven als volgt. We doen dit voor de partitie $\lambda = (6, 3, 2, 1)$, van figuur 16 op pagina 9. Draai de partitie tegen de klok in over 135 graden en plaats de partitie met zijn punt op de plaats $-\frac{1}{2}$ op de getallenlijn. Zie figuur 66.

Uitgaande van het Mayadiagram in figuur 65 gaan we als volgt te werk. Van de uiteinden van de *rijen* die *links* van de diagonaal uitsteken gaan we recht naar beneden en daar plaatsen we een bal. Van de uiteinden van de *kolommen* die *rechts* van de diagonaal uitsteken gaan we recht naar beneden en daar halen we een bal weg.

We hebben ballen in de vakken $-6, -2, 0, 2, 4, 5, 6, \dots$. Er bestaat een relatie met de Frobenius notatie van een partitie. Voor deze partitie $\lambda = (6, 3, 2, 1)$ is dat $\lambda = (5, 1|3, 1)$. Merk op dat als we dit doen voor de lege partitie, de partitie die geen vierkant bevat, dan krijgen we het Mayadiagram van figuur 65.



Figuur 65: Mayadiagram dat hoort bij de lege partitie



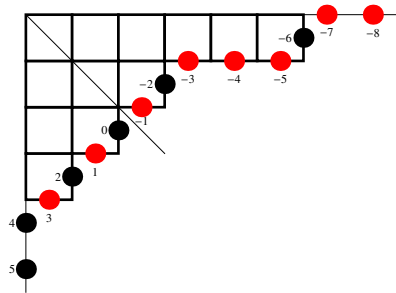
Figuur 66: Van partitie naar Mayadiagram

Opdracht 11.1 a. Leg uit dat de bovenstaande constructie een bijectie geeft tussen de 2-d partities en de Mayadiagrammen.

Opdracht 11.1 b. Geef een beschrijving van hoe de constructie werkt die is afgebeeld in figuur 67. Leg uit waar je begint en hoe, hoe de verschillende kleuren tot stand komen en hoe je hiermee bepaalt welke dozen vol of leeg zijn.

Opdracht 11.1 c. Bepaal de Mayadiagrammen voor enkele voorbeelden uit paragraaf 4.2: $\lambda = (11, 7, 7, 3, 3, 1, 1)$, $\lambda = (8, 5, 4, 2)$, $\lambda = (4, 3, 2, 1)$ en $\lambda = (4, 3, 3, 1)$; en de partities met Frobenius notatie $(6, 4, 0|5, 2, 0)$, $(9, 8, 6, 4|6, 4, 1, 0)$ en $(3, 1, 0|5, 4, 2)$.

Doe dit voor enkele voorbeelden met de constructie van draaien over een hoek van 135° uit figuur 66 en voor enkele voorbeelden met de constructie uit figuur 67.



Figuur 67: De partitie $(6,3,2,1)$

Opdracht 11.2 a. We hebben een partitie gegeven door een Frobenius notatie $(a_1, a_2, \dots, a_n|b_1, b_2, \dots, b_n)$ en een hiermee corresponderend Mayadiagram. Geef een beschrijving welke dozen van het Mayadiagram met een nummer groter dan of gelijk aan 0 leeg zijn en welke dozen van het Mayadiagram met een nummer kleiner dan 0 gevuld zijn.

Opdracht 11.2 b. We hebben een Mayadiagram met de dozen (c_1, c_2, \dots, c_p) met een nummer groter dan of gelijk aan 0 die leeg zijn en met de dozen (d_1, d_2, \dots, d_p) met een nummer kleiner dan 0 die gevuld zijn. Beschrijf de Frobenius notatie van de partitie die correspondeert met dit Mayadiagram.

Als we beginnen met een partitie van n , dat wil zeggen we hebben n vierkanten in het Ferrersdiagram. Hoe vinden we dan die n terug in het Mayadiagram. Wat duidelijk is, is dat het Mayadiagram van figuur 65 overeen moet komen met $n = 0$, immers dit diagram krijgen we uit de lege partitie. Hoe zien we n nu in de andere Mayadiagrammen? Om dit uit te leggen stellen we het volgende voor. In de dozen zitten geen ballen, maar zware stenen. Als we een steen uit een doos optillen en die naar links verplaatsen kost dat *Energie*. We gaan uit van het Mayadiagram van figuur 65 en geven dit diagram *Energie* 0. Immers we hoeven geen stenen te verplaatsen. Vervolgens verplaatsen we alleen maar stenen naar links. Als we een steen 1 doos naar links verplaatsen kost dat energie 1, als we hem twee dozen naar links verplaatsen energie 2, 3 dozen naar links energie 3, enz. enz.. We zeggen nu dat een ander Mayadiagram *Energie* n heeft als het *Energie* n kost om de stenen vanuit figuur 65 naar dit nieuwe Mayadiagram te verplaatsen. Kijk nu naar figuur 66 en bereken in het Mayadiagram de energie. Je zult zien dat dat precies gelijk is aan het aantal vierkanten in de bijbehorende partitie. Merk ook op dat het niet uitmaakt in welke volgorde en welke stenen je verplaatst. Maar let wel op: je mag alleen maar stenen naar links verplaatsen. En uiteindelijk mag een doos maar maximaal één steen bevatten. We concluderen dat het aantal vierkanten in een Ferrersdiagram overeenkomt met de *Energie* van het Mayadiagram. Merk op dat de *Energie* van een Mayadiagram dus gelijk is aan

$$Energie = \left(\sum_{i \geq 0, \text{ doos } i \text{ is leeg}} i \right) - \left(\sum_{j < 0, \text{ doos } j \text{ is bezet}} j \right). \quad (40)$$

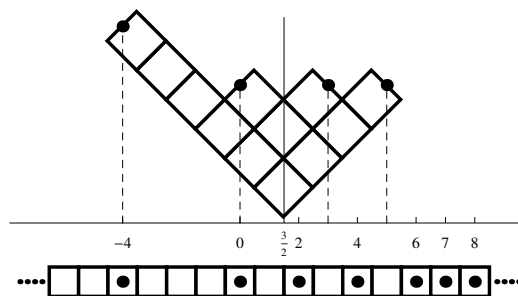
Aangezien er een bijectie is tussen de 2-d partities en de Mayadiagrammen geeft de waarde $p(n)$ van de partitiefunctie in n dus het aantal verschillende Mayadiagrammen met *Energie* n weer.

Opdracht 11.3 a. *Onderzoek op hoeveel verschillende manieren en hoe je een Mayadiagram kunt maken met energie n voor $n = 1, 2, 3$ en 4. Overtuig jezelf ervan dat dit precies correspondeert met alle partities van n .*

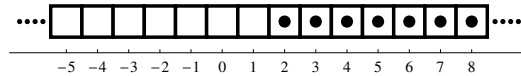
Opdracht 11.3 b. *Bereken met behulp van formule (40) de energie van de Mayadiagrammen die je gemaakt hebt in opdracht 11.1 c.*

11.2 Mayadiagrammen van gewicht m

In de vorige paragraaf hebben we gekeken naar een speciale variant van Mayadiagrammen, namelijk Mayadiagrammen met gewicht 0. Dit gewicht 0 vind je terug in de grens in de voorwaarden waarboven slechts eindig veel dozen leeg zijn en waaronder slechts eindig veel dozen gevuld zijn. We hebben daar gezien hoe we een Mayadiagram kunnen krijgen door een 2-d partitie te roteren en met zijn punt te plaatsen op $-\frac{1}{2}$ van de reële getallenlijn. We kunnen natuurlijk ook de partitie plaatsen op een ander punt. In plaats van het diagram op $-\frac{1}{2}$ kunnen we het bijvoorbeeld ook plaatsen op $\frac{1}{2}$, of $\frac{3}{2}$ of $-\frac{5}{2}$ en het zelfde proces uitvoeren als we gedaan hebben in figuur 66. In figuur 68 zie je de punt van de partitie $\lambda = (6, 3, 2, 1)$ geplaatst op $\frac{3}{2}$. In figuur 69 zie je het Mayadiagram van gewicht 2 dat hoort bij de lege partitie. We krijgen dan een zelfde soort Mayadiagrammen maar we hebben de index verschoven. Bijvoorbeeld het lege diagram plaatsen op plaats $m - \frac{1}{2}$ geeft een Mayadiagram waarbij alle dozen met index groter of gelijk aan m allen volzitten. We noemen dit een Mayadiagram van gewicht m .



Figuur 68: **Mayadiagram van gewicht 2 bij de partitie $\lambda = (6, 3, 2, 1)$**

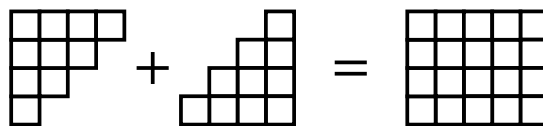


Figuur 69: Mayadiagram van gewicht 2 dat hoort bij de lege partitie

We kunnen nu ook met behulp van formule (40) de energie berekenen. Merk op dat we dan zien dat we de energie van een Mayadiagram van gewicht m , dat hoort bij de lege partitie, kunnen berekenen met:

$$Energie = \begin{cases} 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + (m - 1) & \text{als } m > 0; \text{ of} \\ -((-1) + (-2) + (-3) + \dots + m) & \text{als } m < 0. \end{cases} \quad (41)$$

Als we de getallen $1, 2, 3, \dots, k$ allemaal optellen dan zien we met behulp van figuur 70 eenvoudig in dat



Figuur 70: $1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \cdot 5}{2}$

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{1}{2}k(k + 1).$$

Dus het Mayadiagram van gewicht m dat hoort bij de lege partitie heeft energie

$$Energie = \frac{1}{2}m(m - 1). \quad (42)$$

Opdracht 11.4 a. Laat zien dat de formule (42) klopt voor beide gevallen die beschreven worden door formule (41).

Opdracht 11.4 b. Geef twee voorbeelden (van verschillende gewichten) van een Mayadiagram met energie 13 dat hoort bij een partitie van 7. Welke twee gewichten heb je gebruikt?

Opdracht 11.4 c. Geef twee voorbeelden (van verschillende gewichten) van een Mayadiagram met energie 14 dat hoort bij een partitie van 4. Welke twee gewichten heb je gebruikt?

11.3 Electronen en de Dirac-zee

De ruimte van Mayadiagrammen kunnen we ook anders beschrijven. Namelijk als configuratie van electronentoestanden. Deze beschrijving is gegeven door Paul Dirac in zijn boek *The principles of Quantum Mechanics*. We vertalen het hier naar een beschrijving in Mayadiagrammen.

We willen een systeem beschrijven van elementaire deeltjes, in dit geval van electronen. We beginnen met de bestudering van alle mogelijke toestanden die op kunnen treden. Omdat we hier te maken hebben met zogenaamde fermionen voldoen deze deeltjes aan Pauli's uitsluitingsprincipe. Dat wil zeggen dat twee identieke deeltjes, in dit geval electronen, niet dezelfde kwantumtoestand mogen bezetten.

We stellen nu de toestand in de toestandsruimte van electronen voor als mayadiagram. De dozen vormen de kwantumtoestanden van de electronen. De ballen zijn de electronen. Dus een toestand is een Mayadiagram dat bestaat

uit een geördende verzameling van kwantumtoestanden. Een electron in kwantumtoestand is een bal in een doos. Omdat we hier te maken hebben met electronen, waarvoor Pauli's uitsluitingsprincipe geldt, past er maximaal één bal in elke doos, met andere woorden maximaal één electron in een kwantumtoestand.

We hebben hier een probleem er zijn oneindig veel dozen en we willen geen oneindige waarden krijgen voor energie of lading. Daarom volgen we Paul Dirac en definiëren een referentietoestand namelijk het Mayadiagram van figuur 65, d.w.z. het Mayadiagram van *gewicht* 0 en *Energie* 0. Deze toestand noemen we het vacuum. We willen nu ook het begrip *lading* toekennen. Omdat een electron negatief geladen is neemt de lading van het Mayadiagram toe als we een bal verwijderen. Dit suggereert om als lading van het diagram het gewicht van het Mayadiagram te kiezen. Dit doen we dan ook, *lading*=gewicht. We krijgen nu alle mogelijke toestandconfiguraties van electronen door eindig veel ballen in negatieve dozen te plaatsen en eindig veel ballen weg te halen uit dozen met index $j \geq 0$. Dit wordt in de literatuur de *Dirac-zee* genoemd.

Een bal plaatsen in een doos met index $-j < 0$ verlaagt de *lading* met 1 en verhoogt de *Energie* met j . Een bal weghalen uit doos i met $i \geq 0$ verhoogt de *lading* met 1 en verhoogt de *Energie* met i . Het wel of niet aanwezig zijn van een electron in doos $i \geq 0$ correspondeert als volgt.

(1) Als er een electron in doos i zit komt dat overeen met die doos bij het vacuum. Dan verhoogt deze doos de *lading* en *Energie* van deze toestand ten opzichte van het vacuum niet.

(2) Als we een electron uit doos i verwijderen, dan neemt de *lading* met 1 toe en de *Energie* met i (ten opzichte van het vacuum).

De telfunctie van alle Mayadiagrammen en electronentoestanden zijn dus gelijk.

Inhoudsopgave

1	Inleiding	1
1.1	Andrei Okounkov	2
2	Partities	2
2.1	3-d partities	3
3	IJsmodel	5
3.1	IJs op een raster	5
3.2	Voorwaarden op de randen	6
3.3	Een drie dimensionale variant	8
4	2-d partities	9
4.1	Notaties	9
4.2	Frobenius-notatie van een partitie	10
4.3	Partities als Diophantische vergelijkingen	12
4.4	De frequentie-notatie van een partitie	13
5	3-d partities nader bekeken	15
5.1	3-d partities opdelen in 2-d partities	15
5.2	Nog een keer notatie	18
6	Producten en combinatoriek	20
6.1	De combinatoriek van $(1+x)^n$	20
6.2	Binomium van Newton	22
6.3	Producten met opeenvolgende machten en combinatoriek	24
6.4	Producten met meerdere termen	26
7	3-d partities en andere afbeeldingen	29
7.1	3-d partities en niet snijdende paden	29
7.2	3-d partities en ruitbetegelingen	32
7.3	3-d partities en honingraatbetegeling	34
8	Berekeningen met behulp van de computer	35
8.1	Mathematica	35
8.2	Yacas	38
9	Op zoek naar een telfunctie voor 2 dimensionale partities	41
9.1	Een formule voor $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{m-1} + q^m$	41
9.2	Een zelf-geconjugeerde Frobenius partitie uitvouwen	42
9.3	De meetkundige reeks $1 + q + q^2 + q^3 + \dots$	44
9.4	De telfunctie van gewone partities	45
9.5	Telfuncties van twee variabelen	46
9.6	Een observatie van Schur	46
10	Een recursieve formule voor $p(n)$	48
11	Van partities naar Mayadiagrammen	51
11.1	Mayadiagrammen	51
11.2	Mayadiagrammen van gewicht m	53
11.3	Electronen en de Dirac-zee	54