PETER SLODOWY

E. LOOIJENGA UND T.A. SPRINGER

Kurzer Lebenslauf

Am 19. November 2002 verschied Peter Slodowy, nur 54 Jahre alt, nach langjährigem Kampf mit einer schweren Krankheit. Die langfristigen Therapien hatte er mutig und mit Optimismus ertragen. Trotz seines Leidens war er praktisch bis zu seinem Tode mit der ihm eigenen Begeisterung mathematisch tätig gewesen. Seine zahlreichen mathematischen Freunde vermissen ihn.

Peter Slodowy wurde am 12.10.1948 in Leverkusen geboren. Er bestand 1967 sein Abitur am Carl-Duisberg-Gymnasium in Leverkusen. Von 1967 bis 1971 studierte er Physik und Mathematik an der Universität Bonn. Danach wandte er sich ganz dem Mathematikstudium zu. 1974 erhielt er das Diplom an der Bonner Universität. Er hatte inzwischen auch ein Semester an der Universität Regensburg studiert.
Slodowys späteres Interesse an der Wechselwirkung von Geometrie und Gruppentheorie muss schon während seines Studiums in Bonn erweckt worden sein. Die Geometrie (Topologie, algebraische Geometrie) lernte er bei Friedrich Hirzebruch und Egbert Brieskorn, die Gruppentheorie (insbesondere die Theorie der Lieschen und algebraischen Gruppen) bei Jacques Tits, der bis 1973 ordentlicher Professor an der Universität Bonn war.
Das akademische Jahr 1974-1975 verbrachte Slodowy am Institut des Hautes Études Scientifiques in Bures-sur-Yvette bei Paris. Er kam dort in Kontakt mit René Thom und arbeitete sich in die Singularitätentheorie ein.
Von 1975 bis 1978 war Slodowy an der Universität Regensburg als wissenschaftlicher Assistent tätig. 1978 wurde er an der Universität Bonn mit der Dissertation “Einfache Singularitäten und einfache algebraische Gruppen” promoviert.
Von 1978 bis 1985 verwaltete er eine Assistentenstelle an der Universität Bonn, unterbrochen durch einen Aufenthalt an der Yale University (New Haven, U.S.A.). 1979 heiratete er Mirie Nozaki. Er besuchte gerne ihre Heimat Japan, insbesondere in seinen letzten Jahren.
1984 habilitierte Slodowy sich an der Universität Bonn. Die Habilitationsschrift “Singularitäten, Kac-Moody-Lie-Algebren, assozierte Gruppen und Verallgemeinerungen” handelt von einer unendlichdimensionalen Version der Resultate seiner Dissertation.

Nach zwei Jahren als Lecturer in Pure Mathematics an der University of Liverpool hatte er 1988–1990 eine C3-Professur an der Universität Stuttgart und seit Herbst 1990 eine C4-Professur an der Universität Hamburg inne. Wegen seiner Krankheit wurde er 2001 vorzeitig pensioniert.
Während dieser letzten Periode wohnte er noch mit seiner Frau in Bonn, wo er einen Arbeitsplatz am Max-Planck-Institut hatte. In Bonn ist er auch gestorben und beerdigt.

Peter Slodowy war ein Mathematiker, der eigene Wege ging. Mit Vorliebe verfolgte er Verbindungswege zwischen verschiedenen Gebieten, sowohl innerhalb der Mathematik als auch von der Mathematik zu Gebieten der theoretischen Physik. Daneben fesselte ihn die Mathematikgeschichte.
Die Anzahl von Slodowys Publikationen ist nicht besonders groß, aber immer enthalten sie Wertvolles. Übrigens hat er öfters eigene Resultate seinen Schülern zur Publikation überlassen.

Einfache algebraische Gruppen und einfache Singularitäten

Wir werden jetzt einiges aus Slodowys Arbeiten[1] ausführlicher besprechen.
Der Ideenkreis der Dissertation spielt in vielen seiner Arbeiten eine Rolle. In seiner Traueransprache bei der Bestattung (publiziert in [H]) spricht Friedrich Hirzebruch von Slodowys Jugendtraum: dem Dreiklang Algebren, Gruppen, Singularitäten. Darauf müssen wir zuerst etwas tiefer eingehen.
Eine *binäre Polyedergruppe* Γ ist eine endliche Untergruppe von $SL_2(\mathbb{C})$. Diese Gruppen sind wohlbekannt, die zugehörigen projektiven Gruppen findet man schon in Veröffentlichungen des 19. Jahrhunderts, z. B. in Felix Kleins' Vorlesungen über das Ikosaeder" (1884). Wenn Γ eine binäre Ikosaedergruppe (von der Ordnung 120) ist, dann ist die projektive Gruppe isomorph zur Gruppe der dreidimensionalen Drehungen, die ein Ikosaeder festlassen.
Die Gruppe Γ operiert auf $\mathbb{C}^2$ und der Quotient $X = \mathbb{C}^2/\Gamma$ ist eine affine algebraische Varietät mit genau einem singulären Punkt x (das Bild von $(0,0)$). So ein singulärer Punkt (genauer: der Keim (X,x)) heisst ein *rationaler Doppelpunkt.* Bei der Ikosaedergruppe Γ ist X isomorph zu der Fläche $\{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid x^2 + y^3 + z^5 = 0\}$.
In Klassifikationsresultaten über isolierte Singularitäten erscheinen die rationalen Doppelpunkte als die einfachsten Singularitäten, sie werden (vielleicht darum) auch "einfach" genannt. Slodowy spricht auch von "Kleinschen" Singularitäten.
Bei der Auflösung einer einfachen Singularität stößt man auf ein (irreduzibles) Dynkindiagramm von einem der Typen A_r, D_r, E_r. Wenn Γ zum Beispiel eine Ikosaedergruppe ist, dann findet man den Typ E_8. Nun gehört

[1]Eine Liste befindet sich am Ende.

zu so einem Dynkindiagramm auch eine einfache Liealgebra. Daher stellt sich die Frage, ob es eine direkte Beziehung zwischen einfachen Singularitäten und einfachen Liealgebren gibt.
Das Studium von Brieskorns Arbeiten über rationale Singularitäten führte Grothendieck 1969 zu Vermutungen über eine solche Beziehung, die dann von Brieskorn bewiesen wurden. Brieskorns Kongressvortrag von 1970 [Br] enthält eine Beweisskizze. Die erste ausführliche Darstellung findet man erst in Slodowys Doktorarbeit [S2]. Die erweiterte englische Übersetzung [S4] erschien 1982. Sie ist ein Standardtext über einfache Singularitäten geworden.

Wir beschreiben jetzt die Beziehung, wobei wir [S4] folgen. Dazu brauchen wir einiges aus der Lietheorie.
Es sei $\mathfrak{g}$ eine einfache Liealgebra über $\mathbb{C}$. Die zugehörige adjungierte Gruppe $G \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, d.h. die Komponente der Eins der Automorphismengruppe von $\mathfrak{g}$, ist eine einfache komplexe lineare algebraische Gruppe (oder, wenn man diese Sichtweise bevorzugt, eine einfache komplexe Liegruppe).
Das Element $n \in \mathfrak{g}$ ist *nilpotent*, falls die lineare Abbildung $x \mapsto [n, x]$ von $\mathfrak{g}$ nilpotent ist (d.h. nur Eigenwerte 0 hat). Die nilpotenten Elemente bilden eine irreduzible algebraische Teilvarietät $\mathfrak{g}_n$ von $\mathfrak{g}$. Grothendieck erkannte, dass man eine rationale Singularität mit Dynkindiagramm D in $\mathfrak{g}_n$ finden sollte, wobei $\mathfrak{g}$ die einfache Liealgebra ist, die zu D gehört.
Die Gruppe G operiert auf $\mathfrak{g}_n$ mit nur endlich vielen Bahnen. Eine einzige Bahn ist offen, sie besteht aus den nichtsingulären Punkten, die auch *reguläre* nilpotente Elemente genannt werden. Auch in der Teilvarietät der singulären Punkte von $\mathfrak{g}_n$ hat G eine offene Bahn, deren Punkte die *subregulären* nilpotenten Elemente sind. Die Kodimension dieser Bahn in $\mathfrak{g}_n$ ist 2.

Es sei jetzt D ein Dynkindiagramm vom Typ A_r, D_r oder E_r, $\mathfrak{g}$ sei eine einfache Liealgebra von diesem Typ und $x \in \mathfrak{g}$ ein subreguläres nilpotentes Element. Der folgende Satz beschreibt die Beziehung zwischen einfachen Singularitäten und einfachen Liealgebren (es ist im Wesentlichen der Satz in [S4, p. 92, p. 129]).

Satz von Brieskorn. *Es gibt einen affinen Teilraum S von $\mathfrak{g}$, so dass $(S \cap \mathfrak{g}_n, x)$ eine einfache Singularität mit Dynkindiagramm D ist.*

Der affine Raum S ist eine "transversale Scheibe" in $\mathfrak{g}$ zur Bahn von x. Es gibt solche Scheiben für beliebige nilpotente Elemente einer einfachen Liealgebra $\mathfrak{g}$. Mit Hilfe des Satzes von Jacobson-Morozov aus der Theorie der Liealgebren wird in [S4, 7.4] eine Scheibe mit besonders guten Eigenschaften konstruiert. Insbesondere gestattet sie eine $\mathbb{C}^*$-Operation. (In der Literatur wird diese Scheibe auch "Slodowy slice" genannt, obwohl sie älter ist als [S4].)
Brieskorn gibt auch eine gruppentheoretische Beschreibung der "semiuniversellen" Deformation einer einfachen Singularität. Eine Deformation der

Singularität (X, x) ist, grob gesagt, eine Familie von Singularitäten (X_s, s), wobei s einen Parameterraum S durchläuft, so dass es ein $s_0 \in S$ mit $(X_{s_0}, s_0) = (X, x)$ gibt und so dass die (X, s) mit $s \neq s_0$ "weniger singulär" als (X, x) sind. Die semiuniverselle Deformation von (X, x) – die nicht zu existieren braucht – ist durch eine universelle Eigenschaft charakterisiert (worauf wir nicht eingehen). Man hat auch einen analogen Begriff für Singularitäten mit $\mathbb{C}^*$-Operation. (Einzelheiten findet man in [S4, I,2].)

Es sei $\mathfrak{g}$ und G wie oben, T ein maximaler Torus von G und $B \supset T$ eine Borelgruppe von G (d. h. eine maximale zusammenhängende auflösbare abgeschlossene Untergruppe). Die Liealgebren von T und B sind $\mathfrak{t}$ bzw. $\mathfrak{b}$. Dann ist $\mathfrak{t}$ eine (komplexe) Cartanalgebra von $\mathfrak{g}$. Es gibt eine kanonische Retraktion $\mathfrak{b} \to \mathfrak{t}$ von Liealgebren.
Der Quotient G/B ist ein projektiver homogener Raum, die *Fahnenvarietät*. Sie kann auch als die Varietät $\mathcal{B}$ der Borelgruppen beschrieben werden.
Es sei N der Normalisator von T in G. Der Quotient $W = N/T$ ist eine endliche Gruppe, die *Weylgruppe*. Sie operiert auf $\mathfrak{t}$ als Spiegelungsgruppe und man hat einen Quotienten $\mathfrak{t}/W$, dessen Punkte die W-Bahnen in $\mathfrak{t}$ sind. Ein bekannter Satz von Chevalley besagt, dass der Bahnenraum $\mathfrak{t}/W$ isomorph zu einem affinen Raum (also glatt) ist. Es sei $\psi : \mathfrak{t} \to \mathfrak{t}/W$ die Quotientenabbildung.
Für ein beliebiges $x \in \mathfrak{g}$ ist der Durchschnitt des Abschlusses $\overline{G.x}$ der Bahn durch x mit $\mathfrak{t}$ eine W-Bahn. Das liefert eine Abbildung $\chi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{t}$. Sie ist ein Morphismus.
Man bezeichne mit $\tilde{\mathfrak{g}}$ den Quotienten $G \times^B \mathfrak{b}$ von $G \times \mathfrak{b}$ bezüglich der B-Operation $b.(g, x) = (gb^{-1}, b.x)$. Die Abbildung $(g, x) \mapsto g.x$ induziert einen Morphismus $\phi : \tilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$. Die Projektionen $\tilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b} \to \mathfrak{t}$ führen zu einem Morphismus $\theta : \tilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{t}$.
Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathfrak{g}} & \xrightarrow{\phi} & \mathfrak{g} \\ \theta \downarrow & & \downarrow \chi \\ \mathfrak{t} & \xrightarrow{\psi} & \mathfrak{t}/W \end{array} \tag{1}$$

ist kommutativ.

Satz von Grothendieck. *Das Diagramm (1) ist eine simultane Auflösung von ϕ.*

Das bedeutet Folgendes:
(a) θ ist glatt,
(b) ψ ist endlich und surjektiv,
(c) ϕ ist eigentlich (sogar projektiv),
(d) für alle $x \in \mathfrak{t}$ ist der von ϕ induzierte Morphismus $\phi_x : \theta^{-1}(x) \to F_x = \chi^{-1}(\psi(x))$ eine Auflösung der Singularitäten von F_x.

Die Voraussetzungen für eine simultane Auflösung waren alle bekannt, aber Grothendieck hat bemerkt, wie man sie für die Singularitätentheorie nutzbar machen kann. Die Arbeit [S4] enthält die erste vollständige Darstellung dieser Resultate, wobei Nachdruck auf die analogen Resultaten für G anstelle von $\mathfrak{g}$ gelegt wird. Übrigens hat Slodowy später gesehen, dass bei Verallgemeinerungen auf den Kac-Moody-Fall die Theorie besser für eine Gruppe als für ihre Liealgebra funktioniert.
Man beachte, dass F_0 die nilpotente Varietät $\mathfrak{g}_n$ ist. Sie ist also in die "Familie" der F_x eingebaut. Für allgemeines x ist F_x eine G-Bahn aus regulären Elementen, also glatt.
Für beliebiges $x \in \mathfrak{g}$ kann man die Faser $\theta^{-1}(x)$ als die Varietät $\mathcal{B}$ der Borelgruppen, die x enthalten, beschreiben.

Es sei $\mathfrak{g}_r$ die Zariski-offene Teilmenge der halbeinfachen regulären Elemente, d. h. der Elemente, deren Zentralisator in $\mathfrak{g}$ eine Cartanalgebra ist. Wir schreiben $\mathfrak{t}_r = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_r$. Dann ist $\mathfrak{t} - \mathfrak{t}_r$ die Vereinigung der Spiegelungshyperebenen von W in $\mathfrak{t}$ (der Hyperebenen, die von einem Element von W punktweise festgelassen werden) und $\mathfrak{t}_r$ ist genau die Teilmenge von $\mathfrak{t}$, auf der W frei operiert. Deren Bild im affinen Raum $\mathfrak{t}/W$ ist also der reguläre Bahnenraum $\mathfrak{t}_r/W$ von W und das Komplement ist eine Hyperfläche, die *Diskriminante*. Da $\mathfrak{g}_r$ von χ nach $\mathfrak{t}_r/W$ abgebildet wird, erhalten wir eine Einschränkung $\chi_r : \mathfrak{g}_r \to \mathfrak{t}_r/W$ von χ.

Das Urbild $\phi^{-1}(\mathfrak{g}_r)$ ist isomorph zum Quotienten $G/T \times^W \mathfrak{t}_r$ von $G/T \times \mathfrak{t}_r$ bezüglich der W-Operation $w.(gT, x) = (gw^{-1}, w.x)$. Das Diagramm (1) zeigt dann, dass χ_r nach dem Basiswechsel $\mathfrak{t}_r \to \mathfrak{t}_r/W$ trivial mit Faser G/T wird. Mit anderen Worten ist χ_r eine lokal triviale Faserung im komplexanalytischen (sogar étalen) Sinne mit Faser G/T und Strukturgruppe W.

Wichtig in [S4] ist eine "Lokalisierung" von (1). Es sei $x \in \mathfrak{g}$ und S ein transversaler Schnitt in x zur Bahn $G.x$. Man setze $\tilde{S} = \phi^{-1}(S)$. Slodowy bemerkt, dass dann

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} & \xrightarrow{\phi'} & S \\ \theta' \downarrow & & \downarrow \chi' \\ \mathfrak{t} & \xrightarrow{\psi} & \mathfrak{t}/W \end{array} \qquad (2)$$

(wobei ϕ', θ', χ' Einschränkungen sind) eine simultane Auflösung von χ' ist (siehe [loc. cit. Remark, p. 68]).
Es sei jetzt x ein subreguläres unipotentes Element und S ein "Slodowy slice" in x. Für $x \in \mathfrak{t}$ setze man $F'_x = (\chi')^{-1}(\psi(x))$. Wenn $\mathfrak{g}$ von einem der Typen A_r, D_r, E_r ist, dann hat (F'_0, x) nach dem Satz von Brieskorn eine einfache Singularität. Die Familie $(F'_x, \phi'(x))$ $(x \in \mathfrak{t})$ liefert dann eine Deformation der Singularität, und ein Hauptresultat ist die Charakterisierung in [S4, 8.7] dieser Deformation als die " G_m-semiuniverselle G_m-Deformation".

Das Bild der Einschränkung von χ' auf $S \cap \mathfrak{g}_r$ ist wieder $\mathfrak{t}_r$ und W ist die Strukturgruppe dieses Morphismus. Die Gruppe W operiert auf der zweiten Homologiegruppe einer Faser der Einschränkung als Spiegelungsgruppe (diese Homologiegruppe enthält und wird erzeugt von einem Wurzelsystem mit Weylgruppe W).

Übrigens enthält [S4] mehr als nur eine Darstellung von Brieskorns Resultaten. Zuerst werden diese elegant und und nicht rechnerisch bewiesen. Das geschieht im Rahmen der algebraischen Geometrie über beliebigen Körpern, mit einigen Einschränkungen der Charakteristik, die in der Theorie der algebraischen Gruppen natürlich sind. (Wir haben hier nur den komplexen Fall betrachtet.)
Dann wird auch die Theorie im Fall der einfachen Liealgebren vom Typ B_r, C_r, F_4, G_2 ausgeführt. Diese Fälle führen zu einfachen Singularitäten mit Automorphismen.

Die binären Polyedergruppen kommen in der Geometrie der Liealgebren nicht explizit zum Vorschein. Aber sie sind im Hintergrund da. So wird auf der letzten Seite von [S4] kurz beschrieben, wie man eine Präsentation einer Polyedergruppe aus dem zugehörigen Dynkindiagramm findet.
Slodowys immer währendes Interesse an den binären Polyedergruppen zeigt sich auch in einer Arbeit mit historischem Hintergrund: die Betreuung einer Neuausgabe von Felix Kleins "Vorlesungen über das Ikosaeder". Slodowy gibt ausführliche Kommentare über die Entwicklungen seit dem Erscheinen von Kleins Buch.

In [S3] findet man eine andere Anwendung der Methoden von [S4]. Es sei $\mathfrak{g}$ wieder eine einfache komplexe Liealgebra und $x \in \mathfrak{g}$ ein nilpotentes Element. Wie vorher sei $\mathcal{B}_x$ die Faser $\theta^{-1}(x)$. Es ist eine projektive, im Allgemeinen singuläre, projektive Varietät. Man kann zeigen (siehe z. B. [Sp]), dass die Weylgruppe W auf der (graduierten) Kohomologie $H^*(\mathcal{B}_x, \mathbb{Q})$ linear operiert. Der ursprüngliche Beweis dieser Tatsache war ziemlich kompliziert. In [S3] wird eine solche W-Darstellung mit Hilfe der Ideen von [S4] unter Benutzung des Diagramms (2) konstruiert . Die Darstellung der Weylgruppe tritt als "Monodromiedarstellung" für θ' auf. Hier hilft die Singularitätentheorie der Algebra.
Slodowy zeigt auch, dass $\mathcal{B}_x$ homotopie-äquivalent zu einer Faser von θ', einer glatten affinen algebraischen Varietät, ist.

Schleifengruppen und einfach elliptische Singularitäten

Seitdem die Grothendieck-Brieskorn-Korrespondenz einen wunderschönen Zusammenhang zwischen den einfachen Liealgebren und den einfachsten Flächensingularitäten hergestellt hat, kann man sich die Frage stellen, ob es eine ähnliche Beziehung auch für andere Singularitäten gibt. Als Slodowy das Grothendieck-Programm vollendet hatte, gab es einige Hinweise, dass dies zumindest für bestimmte Singularitäten der Fall sein konnte, wobei die *einfach elliptischen Singularitäten* die aussichtsreichsten Kandidaten waren. Dies sind normale Flächensingularitäten, die im Sinne einer Hierarchie der Singularitäten gleich nach den Kleinschen Singularitäten kommen und durch die Tatsache charakterisiert sind, dass sie mit einer einzigen glatten elliptischen Kurve E als exzeptionellem Divisor aufgelöst werden können. Der Isomorphietyp von E (oder, was auf das Gleiche hinaus läuft, ihre j-Invariante) und die Selbstschnittzahl $E \cdot E$ in der Auflösung bestimmen vollständig den Isomorphietyp der Singularität. Die Zahl $d := -E \cdot E$ ist stets positiv und wird gewöhnlich der *Grad* der Kurve genannt. Für $d = 1, 2, 3$ liegt die Singularität auf einer Hyperfläche im $\mathbb{C}^3$ und für $d = 4$ auf einem vollständigen Durchschnitt im $\mathbb{C}^4$. Für diese Grade wie auch für den Fall $d = 5$ lässt die Singularität eine semiuniverselle Deformation mit einem glatten Parameterraum zu. Slodowy war schon immer davon überzeugt, dass sich das Grothendieck-Programm auch auf diese Klasse von Singularitäten übertragen lassen sollte, tatsächlich so sehr, dass sich die Realisierung dieses Programms zum Mittelpunkt seiner Forschung entwickelte. Sein langer Weg zu diesem Ziel begann um das Jahr 1980 herum [S5] und endete im Wesentlichen (mit der Hilfe seines ehemaligen Studenten Helmke) 1999 nach fast zwei Jahrzehnten unermüdlicher Ausdauer ([S31],[S33], [S35]). Verständlicherweise bedeutete das eine große Genugtuung für ihn. Es ist tröstlich zu wissen, dass er die Vollendung der Aufgabe, die er sich selbst gesetzt hatte, erleben konnte. Während dieser Zeit war er zwar auch mit Erfolg auf anderen Gebieten tätig, aber es war sicher diese Frage, die seine Forschung beherrschte. Deswegen halten wir es für gerechtfertigt, uns im Folgenden auf diesen Teil seiner Forschung zu beschränken.

Beginnen wir damit, ins Gedächtnis zurück zu rufen, was Slodowy zu der Hoffnung veranlasste, dass sich das Grothendieck-Programm auf diese Klasse von Singularitäten erweitern lassen sollte. Zuallererst gab es Arbeiten von Gabrielov und Pinkham, die dazu führten, dass man einer einfach elliptischen Singularität vom Grad d ein Wurzelsystem R_{9-d} vom Rang $9-d$ zuordnen konnte, wobei R_{9-d} vom Typ E_8, E_7, E_6, D_5, A_4 für $d = 1, 2, 3, 4, 5$ war. Daraus ergibt sich wie folgt eine Beschreibung der Monodromiegruppe der semiunversellen Deformation: Ist F eine glatte Faser der semiunversellen Deformation einer einfach elliptischen Singularität vom Grad $d \leq 5$ mit zugehöriger Kurve E vom Geschlecht 1, dann hat $H_2(F)$ die folgende bemerkenswerte Eigenschaft: Es enthält in natürlicher Weise $H_1(E)$ als Untergruppe, und der Quotient $H_2(F)/H_1(E)$ enthält ein Wurzelsystem R_{9-d}, das ihn erzeugt. Darüber hinaus ist die Monodromiegruppe der semiuniversellen Deformation, die auf $H_2(F)$ operiert, die Gruppe derjenigen Automorphismen

von $H_2(F)$, die die Identität auf $H_1(E)$ induzieren und auf dem Quotienten $H_2(F)/H_1(E)$ als Weylgruppenelemente operieren (so dass die Monodromiedarstellung auf diesem Quotienten der einer Kleinschen Singularität vom Typ R_{9-d} gleicht). Eine leichte Verfeinerung des Monodromiebegriffs führt zu einer zentralen Erweiterung dieser Monodromiegruppe durch die unendlich zyklische Gruppe $H_2(E)$.
Ein noch deutlicherer Hinweis war aber vielleicht die Beschreibung der Diskriminante einer einfach elliptischen Singularität nur mit Hilfe des Wurzelsystem R_{9-d} und der elliptischen Kurve, da sie sehr der Identifizierung der Diskriminante einer Kleinschen Singularität mit der Diskriminante von $\mathfrak{t} \to \mathfrak{t}/W$ ähnelte. Nach Pinkham besitzt die semiuniverselle Deformation einer einfach elliptischen Singularität einen affinen Morphismus als natürliches Modell: dessen Fasern sind affine Del-Pezzo-Flächen (oder deren Entartungen), die durch Hinzufügen einer Kopie von E (oder einer kleinen Defomation dieser Kurve) im Unendlichen vervollständigt werden können. Der Ausgangsraum dieses Morphismus ist in natürlicher Weise über dem Deformationsraum von E (dem Keim einer glatten Kurve) mit affinen Räumen als Fasern gefasert. Dabei wird eine Fasern erhaltende $\mathbb{C}^*$-Operation mit positiven Gewichten mitgeliefert. Die Fixpunktmenge dieser Operation ist ein Schnitt der Faserung, der die einfach elliptischen Singularitäten in der Nähe der gegebenen parametrisiert (und den man erhält, indem man nur E deformiert). Wir ziehen es vor, die Deformation von E durch die Tate-Kurve (die Kurve über der punktierten Einheitskreisscheibe Δ^*, deren Faser über $q \in \Delta^*$ die Kurve $E(q) := \mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$ ist) zu parametrisieren, so dass der Basisraum A unserer semiuniversellen Deformation nun ein affines Bündel über Δ^* ist und mit einer relativen $\mathbb{C}^*$-Operation versehen ist, deren Fixpunktmenge einen Schnitt definiert (den wir mit Δ^* identifizieren). Die Diskriminante $\mathcal{D} \subset A$ dieser Familie lässt sich nur mit Hilfe der Art Wurzeldaten, die einer affinen Kac-Moody-Liealgebra vom Typ $\hat{R}_{9-d}$ zugeordnet werden können, beschreiben.
Um genauer zu sein, sei T_o ein algebraischer Torus, der mit einem Wurzelsystem $R_o \subset \mathrm{Hom}(T_o, \mathbb{C}^*)$ vom Typ A, D oder E versehen ist, so dass die Kocharaktergruppe $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, T_o)$ von dem dualen Wurzelsystem $R_o^\vee$ aufgespannt wird. Es sei T ein algebraischer Torus, dessen Rang um zwei größer ist als der Rang von R_o, und

$$\mathbb{C}^* \overset{n^\vee}{\subset} T \overset{n}{\twoheadrightarrow} \mathbb{C}^*$$

seien Homomorphismen, deren Hintereinanderschaltung trivial ist und für die $\ker(n)/n^\vee(\mathbb{C}^*) = T_o$ gilt. Wir nehmen an, dass T in einem Sinne, den wir nicht näher präzisieren wollen, mit einem affinen Wurzelsystem versehen ist: es reicht zu wissen aus, dass diese Struktur mit einer Gruppe W von Automorphismen von T (der *affinen Weylgruppe*) verbunden ist, die sowohl n als auch $n^\vee$ festhält, dass das affine Wurzelsystem in T_o das gegebene endliche Wurzelsystem $R_o \subset \mathrm{Hom}(T_o, \mathbb{C}^*)$ bestimmt und dass W auf T_o durch die (endliche) Weylgruppe von R_o operiert. Da W eine unendliche Gruppe ist, ist die Operation von W nicht auf ganz T eigentlich diskontinuierlich, aber sie ist es auf $T_{\Delta^*} := n^{-1}\Delta^*$. Ist R_o vom Typ R_{9-d}, dann gibt es einen Δ^*-Isomorphismus

$$A - \Delta^* \cong T_{\Delta^*}/W$$

(siehe [Lo]), der $\mathcal{D} - \Delta^*$ mit der Diskriminante der Bahnenabbildung $T_{\Delta^*} \to T_{\Delta^*}/W$ identifiziert und die zentral erweiterte Monodromiegruppe der Singularität mit der Orbifold-Fundamentalgruppe einer Faser von $T_{\Delta^*}/W \to \Delta^*$ (die letztere Gruppe ist einfach die Erweiterung von W durch das Gitter des Torus $\ker(n)$). Da $\dim A \geq 3$ ist, induziert die offene Einbettung $T_{\Delta^*}/W \cong A - \Delta^* \subset A$ einen Isomorphismus zwischen den Algebren von holomorphen Funktionen. Diese Eigenschaft und die Tatsache, dass A ein Steinscher Raum ist, charakterisieren A mit Hilfe von T_{Δ^*}/W (denn Steinsche Räume sind durch ihre Algebren von holomorphen Funktionen bestimmt): A kann mit der sogenannten *Steinschen Hülle* $(T_{\Delta^*}/W)\widehat{}$ von T_{Δ^*}/W identifiziert werden. Dies spiegelt eine allgemeine Tatsache wider: für jedes Wurzelsystem R_o (nicht nur eins vom Typ R_{9-d}) ist die Steinsche Hülle $(T_{\Delta^*}/W)\widehat{}$ ein affiner Raum über Δ^* und fügt zu T_{Δ^*}/W eine Kopie von Δ^* hinzu.

Dies war der Stand der Dinge um das Jahr 1980 herum. Wenn es damals auch zwingend ausgesehen haben mochte, so war es doch klar, dass ein Grothendieck-Programm, wenn es schon ausgeführt werden konnte, keinesfalls eine direkte Verallgemeinerung des Ausgangsfalls sein würde, einfach weil bei den einfach elliptischen Singularitäten nur bestimmte Typen von Wurzelsystemen vorkommen. Wie sollte es zum Beispiel für A_r aussehen, wenn $r \neq 4$ gilt? Trotzdem war Slodowy zuversichtlich, dass es möglich sein sollte, und letztendlich bewies er, das er recht hatte, indem er genau das durchführte. Im Folgenden wird grob skizziert, was er herausgefunden hat. Von den Wurzeldaten zu T ausgehend führt eine Standardkonstruktion zu einer (Kac-Moody-)Gruppe $G_{\mathrm{alg}} \supset T$, die eine aufsteigende Vereinigung von affinen Varietäten ist und T als Cartanuntergruppe besitzt (und auch die gegebenen Wurzeldaten liefert). Diese Gruppe kann man ohne Umschweife aus der affin-algebraischen Gruppe G_o erhalten, die (T_o, R_o) als Wurzeldaten hat. (Man beachte, dass G_o notwendigerweise fast-einfach und einfach zusammenhängend und damit von dem Typ ist, den das ursprüngliche Grothendieck-Programm betraf, da T_o von seinen Kowurzeln erzeugt wird.) Man gehe von der algebraischen Schleifengruppe $\mathrm{Mor}_{\mathrm{alg}}(\mathbb{C}^*, G_o)$ von G_o (= die Gruppe ihrer $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$-wertigen Punkte) aus, bilde das semidirekte Produkt mit $\mathbb{C}^*$ ($\mathbb{C}^*$ operiert in offensichtlicher Weise auf $\mathrm{Mor}(\mathbb{C}^*, G_o)$) und erweitere letzteres zentral in universeller Art durch $\mathbb{C}^*$, so dass man ein Diagramm $\mathbb{C}^* \subset G_{\mathrm{alg}} \twoheadrightarrow \mathbb{C}^*$ erhält, dass das für T dargestellte Diagramm enthält bzw. liftet. Diese Gruppe könnte ein gutes algebraisches Objekt sein, es stellt sich aber heraus, dass sie für unseren gegenwärtigen Zweck nicht geeignet ist: wir müssen sie erweitern, indem wir beliebige holomorphe Schleifen zulassen, d.h. indem wir $\mathrm{Mor}_{\mathrm{alg}}(\mathbb{C}^*, G_o)$ durch $\mathrm{Mor}_{\mathrm{hol}}(\mathbb{C}^*, G_o)$ ersetzen. Dies liefert dann eine Gruppe $G_{\mathrm{hol}} \supset G_{\mathrm{alg}}$. Wir haben immer noch Homomorphismen

$$\mathbb{C}^* \overset{n^\vee}{\subset} G_{\mathrm{hol}} \overset{n}{\twoheadrightarrow} \mathbb{C}^* ,$$

deren Hintereinanderschaltung trivial ist.
Wichtig für das Folgende ist, dass wir

$$\bar{G}_{\mathrm{hol}} := G_{\mathrm{hol}}/n^\vee(\mathbb{C}^*) = \mathrm{Mor}_{\mathrm{hol}}(\mathbb{C}^*, G_o) \rtimes \mathbb{C}^*$$

als die Gruppe der Bündelautomorphismen des trivialen holomorphen G_o-Prinzipalbündels $G_o \times \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ interpretieren können. Dies führt zu einer geometrischen Interpretation des Raums der Konjugationsklassen von Elementen von $\bar{G}_{\mathrm{hol}}$, die über $\Delta^* \subset \mathbb{C}^*$ liegen: wählen wir $g \in \bar{G}_{\mathrm{hol}}$, so dass $q := n(g)$ in Δ^* liegt, dann ist der Bahnenraum des Bündels nach $g^{\mathbb{Z}}$ ein G_o-Prinzipalbündel über der elliptischen Kurve $E(q) = \mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$. Der Isomorphietyp dieses Prinzipalbündels hängt nur von der Konjugationsklasse von g ab und daraus ergibt sich eine Bijektion zwischen den $\bar{G}_{\mathrm{hol}}$-Konjugationsklassen in $\bar{G}_{\mathrm{hol}}$ über q und den Isomorphieklassen von G_o-Prinzipalbündeln über der elliptischen Kurve $E(q)$. In der gleichen Weise entsprechen die G_{hol}-Konjugationsklassen über q den Isomorphieklassen von G_o-Prinzipalbündeln über der elliptischen Kurve $E(q)$ mit einer geringfügigen Extrastruktur (die aus der Auswahl eines erzeugenden Elements des eindimensionalen Vektorraums besteht, der auf kanonische Weise dem Bündel zugeordnet ist).
Slodowy und Helmke fiel es auf, dass aus der Arbeit von Goodman und Wallach [GW] folgt, dass das Urbild $G_{\Delta^*} := n^{-1}\Delta^* \subset G_{\mathrm{hol}}$ (eine unter Konjugation mit G_{hol} invariante Halbgruppe) einen adjungierten Quotienten (der analog zu einer integrierten Form von χ ist) im folgenden Sinne zulässt: es gibt einen Morphismus

$$\hat{\chi} : G_{\Delta^*} \to (T_{\Delta^*}/W)\hat{},$$

dessen allgemeine Faser eine G-Bahn ist. Später bewiesen sie, dass dies den richtigen Ansatz für das Grothendieck-Programm liefert, wobei die Rolle der unipotenten Varietät von dem Urbild $U := \hat{\chi}^{-1}\Delta^* \subset G_{\Delta^*}$ des Steinschen Randes $\Delta^* \subset (T_{\Delta^*}/W)\hat{}$ gespielt wird. Es ist bemerkenswert (und vielleicht überraschend), dass dieser Ort im Umfeld der konventionellen algebraischen Geometrie verstanden und studiert werden kann: Er ist die Vereinigung der G-Bahnen, die den instabilen Prinzipalbündeln entsprechen, und jede G_{hol}-Bahn in U hat endliche Kodimension (so dass endlich dimensionale transversale Scheiben existieren).
Halten wir nun ein $q \in \Delta^*$ fest. Slodowy and Helmke bestimmen in jedem Fall die Bahnenstruktur von U_q in niedriger Kodimension. Anders als im endlich dimensionalen Fall kann U_q mehr als eine offene G-Bahn enthalten (aber immer noch eine endliche Anzahl solcher Bahnen). Wie im endlich dimensionalen Fall gibt es keine G-Bahnen der Kodimension 1, aber

es können Ein-Parameter-Familien von Bahnen der Kodimension zwei (dies sind die *subregulären Bahnen*) auftreten, von denen jede eine (singuläre) Hyperfläche U_q ausfüllt. Das bedeutet, das eine transversale Scheibe S in G_{Δ^*} an eine subreguläre Bahn in U_q die Menge U_q in einer Fläche mit einem eindimensionalen singulären Ort schneiden kann. Das kommt zum Beispiel im A_r-Fall für $r \geq 2$ vor. Wenn der subreguläre Ort allerdings isoliert ist (und das passiert nur, wenn R_o zu einem der Typen A_1, D_5, E_6, E_7, E_8 gehört), dann hat $S \cap U_q$ eine einfach elliptische Singularität (in den Fällen $\neq A_1$ vom Typ $(E(q), R_o)$) und $\hat{\chi}|_S : S \to (T_{\Delta^*}/W)\hat{}$ ist dann eine semiuniverselle Deformation dieser Singularität. Bei einer sorgfältigen Wahl von S findet man auch die natürliche $\mathbb{C}^*$-Operation wieder. Also gilt hier für die einfach elliptischen Singularitäten vom Grad ≤ 4 das genaue Analogon des Satzes von Grothendieck-Brieskorn-Slodowy. Slodowy und Helmke haben auch die Fälle, in denen die transversale Scheibe die Menge U_q in einer nicht-isolierten Singularität schneidet, genau untersucht. Solche Singularitäten besitzen keine semiuniverselle Deformation mehr. In diesem Fall ist aber eine Symmetriegruppe beteiligt, die dafür sorgt, dass $\hat{\chi}|_S$ für eine geeignete transversale Scheibe S immer noch die Semiuniversalitätseigenschaft hat. Man beachte, dass auch beliebige affine Wurzeldaten zugelassen werden (so dass G_o nicht einfach zusammenhängend zu sein braucht und auch nicht vom Typ A, D oder E).

Danksagung. Die Autoren danken Wolfgang Ebeling herzlich für sprachliche Hilfe bei der Abfassung des deutschen Textes, insbesondere für seine Übersetzung von Looijengas Beitrag aus dem Englischen, und danken Stefan Helmke für hilfreiche Kommentare.

Literatur

[Br] E. Brieskorn, Singular elements of semi-simple algebraic groups, Actes Congr. Int. Mat. 1970, t 2, 279-284, Paris, 1971

[GW] R. Goodman and N. Wallach, Structure of unitary cocycle representations of loop groups and the group of diffeomorphisms of the circle, J. Reine Angew. Math. 347 (1984), 69–133.

[H] F. Hirzebruch, Traueransprache für Peter Slodowy, in: Geometry and topology of caustics 2002, Banach Center Publ. Nr. 62, S. 13-17, Inst. of Math. Polish Acad. of Sc., Warszawa, 2004

[Lo] E. Looijenga, Rational Surfaces with an anticanonical cycle, Ann. of Math. 114 (1981), 167–322.

[Sp] T. A. Springer, A construction of representation of Weyl groups, Inv. Math. 44 (1978), 279-293.

Arbeiten von P. Slodowy

[S1] Einige Bemerkungen zur Entfaltung symmetrischer Funktionen, Math. Z. 158 (1978), 157-170

[S2] Singularitäten und algebraische Gruppen, XI + 183 S., Regensburger Math. Schr. Nr. 2 (1978)

[S3] Four lectures on simple groups and singularities, II + 64 S., Comm. Math. Inst. Utrecht Nr. 11 (1980)

[S4] Simple singularities and simple algebraic groups, xii + 172 p., Lect. Notes in Math. Nr. 815, Springer-Verlag (1982)

[S5] Chevalley groups over $C((t))$ and deformations of simply elliptic singularities, in: Proc. Int. Conf. Alg. Geom., La Rabida, S. 285-301, Lect. Notes in Math. Nr. 961, Springer-Verlag (1982)

[S6] Sur les groups finis attachés aux singularités simples, in: Intr. Théorie des Singularités, vol. II, S. 109-126, Hermann, Paris (1988)

[S7] A character approach to Looijenga's invariant theory for generalized root systems, Comp. Math. 55 (1985), 3-32

[S8] Platonic solids, Kleinian singularities and Lie groups, in: Proc. Midwest Alg. Geom. Conf., Ann Arbor, S. 102-138, Lect. Notes in Math. Nr. 1008, Springer-Verlag (1982) (mit dem Titel "Platonic solids, Kleinian singularities, elementary catastrophes and Lie Groups" ebenfalls in: Logos et théorie des catastrophes, p. 73-98, Éd. Patiño, Genève (1988))

[S9] (mit E. Gutkin) Cohomologie de la variété des drapeaux infinies, C. R. Ac. Sc. Paris, 296 (1983), 625-627

[S10] Singularitäten, Kac-Moody Lie-algebren, assoziierte Gruppen und Verallgemeinerungen, 350 S., Habilitationsschrift Univ. Bonn. (1984) (englische Übersetzung angenommen für Publikation beim Vieweg Verlag in der Reihe "Aspects of Mathematics")

[S11] An adjoint quotient for certain groups attached to Kac-Moody algebras, in: Infinite-dimensional groups and applications, MSRI Publ. Nr. 4, S. 307-333, Springer-Verlag (1985)

[S12] Beyond Kac-Moody algebras, and inside, in: Lie algebras and related topics, CMS-AMS Conf. Proc. Nr. 5, S. 361-371, Amer. Math. Soc. (1986)

[S13] On the geometry of Schubert varieties attached to Kac-Moody Lie algebras, in: Proc. 1984 Vancouver Conf. on Alg. Geom., CMS-AMS Conf. Proc. Nr. 6, S. 405-442, Amer. Math. Soc. (1986)

[S14] Über das Ikosaeder und die Gleichungen fünften Grades, in: Math. Miniaturen Bd. 3, S. 71-113, Birkhäuser (1986)

[S15] Der Scheibensatz für algebraische Transformationsgruppen, in: DMV Sem. Nr. 13, Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie, S. 89-109, Birkhäuser (1989)

[S16] Die Theorie der optimalen Einparametergruppen für instabile Vektoren, in: DMV Sem. Nr. 13, Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie, S. 115-131, Birkhäuser (1989)

[S17] Zur Geometrie der Bahnen reeller reduktiver Gruppen, in: DMV, Sem. Nr. 13, Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie, S. 133-143, Birkhäuser (1989)

[S18] Einführung und Kommentare bei der Neuausgabe von F. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder, Birkhäuser, 1993, S. vii-xxvii und 263-343.

[S19] (mit F. Hirzebruch) Elliptic genera, involutions and homogeneous spin-manifolds, Geom. Dedic. 35 (1990), 309-343

[S20] (mit R. W. Richardson) Minimum vectors for real reductive groups, J. London Math. Soc. 42 (1990), 409-428

[S21] A new ADE-classification (after A. Capelli, C. Itzykson, J. B. Zuber), Bayreuther Math, Schr. Nr. 33 (1990), 197-213

[S22] On the signature of homogeneous spaces, Geom. Dedic. 43 (1992), 109-120

[S23] (mit C. und J. Daboul) The hydrogen algebra as centerless twisted Kac-Moody algebra, Phys. Rev. Letters B 317 (1993), 321-328

[S24] Groups and special singularities, in: Singularity Theory, S. 731-799, World Sci. Publ., River Edge N.J. (1995)

[S25] (mit C. und J. Daboul) The dynamical algebra of the hydrogen atom as a twisted loop algebra, in: Group theor. methods in Physics, S. 175-178, World Sci. Publ., River Edge N.J. (1995)

[S26] Algebraic groups and resolutions of Kleinian singularities, 80 S., Preprint Nr. 1068, RIMS, Kyoto U niversity (1996)

[S27] Two notes on a finiteness problem in the representation theory of finite groups, in: Algebraic groups and Lie groups, Australian Math. Soc. Lect. Ser. Nr. 9, S. 331-346 (1997)

[S28] (mit. H. Cassens) On Kleinian singularities and quivers, in: Singularity theory, S. 263-283, Progr. in Math. Nr. 162, Birkhäuser (1998)

[S29] On the algebraic geometry of Kac-Moody groups, in: Topological field theory and related topics (japanisch), RIMS Kokyoroku 1086, S. 71-87, Kyoto University (1999)

[S30] The early development of the representation theory of semisimple Lie groups: A. Hurwitz, I. Schur, H. Weyl, Jahresber. DMV 101 (1999), 97-115

[S31] (mit S. Helmke) Loop groups, principal bundles over elliptic curves and elliptic singularities, Annual meeting Math. Soc. Japan, Hiroshima, Abstracts S. 67-77 (1999)

[S32] Simple singularities and complex reflections, in: New developments in singularity theory, S. 329-348, Kluwer (2001)

[S33] (mit S. Helmke) On unstable principal bundles over elliptic curves, Publ. RIMS 37 (2001), 349-395

[S34] (mit J. Rauschning) An aspect of icosahedral symmetry, Can. Math. Bull. 45 (2002), 686-689

[S35] (mit S. Helmke) Loop groups, elliptic singularities and principal bundles over elliptic curves, in: Geometry and topology of caustics '02, S. 87-99, Banach Center Publ. Nr. 62, Inst. of Math. Polish Acad. of Sc., Warszawa, 2004

Von P. Slodowy betreute Promotionen

[1] Stefan Helmke: Über nilpotente Bahnen, einfache Singularitäten und modular invariante Partitionsfunktionen. Hamburg 1993

[2] Heiko Cassens: Lineare Modifikation algebraischer Quotienten, Darstellungen des McKay-Köchers und Kleinsche Singularitäten. Hamburg 1994

[3] Gerd Brüchert: Steinberg-Querschnitte und Spurklassenelemente in Kac-Moody-Gruppen. Hamburg 1995

[4] Claus Mokler: Die Monoidvervollständigung einer Kac-Moody-Gruppe. Hamburg 1996

[5] Christian Adler: Adjungierte Bahnen, parabolische und konforme Feldtheorie. Hamburg 1999

[6] Claudia Daboul: Deformationen und Degenerationen von Liealgebren und Liegruppen. Hamburg 1999

[7] Stephan Mohrdieck: Conjugacy Classes of Non-Connected Semisimple Algebraic Groups. Hamburg 2000

[8] Robert Wendt: Orbitale Integrale für Schleifenalgebren. Hamburg 2000

Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht, Postbus 80.010, NL-3508 TA Utrecht, Nederland

E-mail address: `springer@math.uu.nl, looijeng@math.uu.nl`