Tentamen Grondslagen van de Wiskunde A

19 december 2023, 09:30–12:30
Met beknopte uitwerking

Dit tentamen bevat 5 opgaven; zie ook de ommezijde.
Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. Geef voor elk van de onderstaande verzamelingen aan of zij eindig, aftelbaar oneindig of overaftelbaar is. Motiveer je antwoord kort.

a) (2 pt) $\{A \subseteq \mathbb{N} \,|\, \text{voor alle } n \in \mathbb{N} \text{ geldt: als } n+1 \in A, \text{ dan } n \in A\}$

b) (3 pt) $\{A \subseteq \mathbb{N} \,|\, \mathbb{N} - A \text{ is oneindig}\}$

c) (3 pt) $\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,|\, \text{voor alle } n \in \mathbb{N} \text{ geldt: } f(n) < f(n+1)\}$

d) (2 pt) $\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,|\, \text{voor alle } n \in \mathbb{N} \text{ geldt: } f(n) > f(n+1)\}$

Uitwerking: a) De elementen van deze verzameling zijn: $\emptyset$, $\mathbb{N}$ en de verzamelingen $\{0, \ldots, n\}$ voor $n \in \mathbb{N}$. De verzameling is aftelbaar.
b) Deze verzameling staat in 1-1-correspondentie met de verzameling van alle oneindige deelverzamelingen van $\mathbb{N}$, via complement nemen. Omdat $\mathbb{N}$ maar aftelbaar veel eindige deelverzamelingen heeft en de gehele machtsverzameling $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ overaftelbaar is, is deze verzameling overaftelbaar.
c) Deze verzameling is overaftelbaar. Er zijn minstens twee manieren om dit in te zien: door Cantor diagonalisatie en door $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ in deze verzameling in te bedden. De eerste methode: stel $f_0, f_1, \ldots$ is een aftelling; laat g de functie $g(n) = \sum_{k=0}^{n} f_k(n) + 1$; dan is $g(n) \neq f_n(n)$ dus $g \neq f_n$ voor alle n.

Tweede methode: definieer een functie H van $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ naar de gegeven verzameling door: $H(\alpha)(n) = 2n + \alpha(n)$. $H(\alpha)$ is strict stijgend, en H is injectief. Het resultaat volgt nu omdat $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ overaftelbaar is.
d) Een grapje. De gegeven verzameling is leeg en dus eindig.

Opgave 2. In deze opgave is een *graaf* een verzameling X met daarop een relatie $R \subseteq X \times X$. Als $x, y \in X$ dan is een *pad* van x naar y een rijtje

$$(x = x_0, \ldots, x_n = y)$$

voor $n \geq 0$, zodat voor alle $i < n$ geldt: $(x_i, x_{i+1}) \in R$ of $(x_{i+1}, x_i) \in R$. Merk op het geval $n = 0$: (x) is een pad van x naar x. We schrijven $x \sim y$ als er een pad is van x naar y.

a) (5 pt) Laat zien dat er voor elke $x \in X$ een deelverzameling U_x van X is die maximaal is m.b.t. de eigenschappen:

   i) $x \in U_x$

   ii) voor alle $y, z \in U_x$ geldt $y \sim z$.

   Hier betekent "maximaal": ten opzichte van de inclusie-ordening. Hint: je kunt het Lemma van Zorn gebruiken.

b) (3 pt) Laat zien: als $x \not\sim y$ dan is $U_x \cap U_y = \emptyset$.

c) (2 pt) Bewijs dat $\sim$ een equivalentierelatie is.

Uitwerking: a) we gebruiken het Lemma van Zorn. Kies $x \in X$ Laat P de poset zijn van die deelverzamelingen van X die aan i) en ii) voldoen; P is geordend door inclusie. De poset P is niet-leeg, want $\{x\}$ is een element van P. Als $\mathcal{C}$ een niet-lege keten in P is beschouwen we $C = \bigcup \mathcal{C}$. Duidelijk is $x \in C$ omdat de keten niet-leeg is, en als $y, z \in C$ dan is er een $A \in \mathcal{C}$ zodat $x, y \in A$ (omdat $\mathcal{C}$ een keten is); er volgt dat $y \sim z$. Dus C is een element van P en duidelijk een bovengrens voor $\mathcal{C}$. Met het lemma van Zorn concluderen we dat P een maximaal element heeft.

b) Stel $z \in U_x \cap U_y$. Dan is er een pad van x naar z en ook een van z naar y. Deze paden (rijtjes) kun je samenstellen en aldus laten zien dat $x \sim y$, in strijd met de aanname.

c) Het eenvoudige pad (x) van x naar x is ons per aanname gegeven, dus $\sim$ is reflexief. In opgave b) hebben we aangetoond dat de relatie $\sim$ transitief is. Het volgt vrij direct uit de definitie van $\sim$ dat als $(x = x_0, \ldots, x_n = y)$ een pad van x naar y is, dan het rijtje $(y = x_n, \ldots, x_0 = x)$ een pad van y naar x is. De relatie $\sim$ is symmetrisch.

Opgave 3.

a) (4 pt) Bewijs dat er een overaftelbare welordening bestaat. Hint: gebruik het Lemma van Hartogs.

b) (4 pt) Bewijs dat er een welordening L bestaat met de eigenschappen:

   i) L is overaftelbaar.

   ii) Voor elke $x \in L$ is $L_{<x} = \{y \in L \mid y < x\}$ aftelbaar.

c) (2 pt) Laat L zijn zoals in b). Bewijs dat er geen stijgend rijtje $x_0 < x_1 < \cdots$ in L is zodat voor elke $y \in L$ er een n is met $y < x_n$.

Uitwerking: a) Met het Lemma van Hartogs is er een welordening L zodat er geen injectieve functie van L naar $\mathbb{N}$ bestaat. Dan is L duidelijk niet-leeg, dus als L aftelbaar zou zijn was er een surjectieve functie $f : \mathbb{N} \to L$. In dat geval kunnen we een sectie $s : L \to \mathbb{N}$ geven door: $s(x)$ is het minimum van de verzameling $f^{-1}(x)$. Zo'n sectie is altijd injectief, in strijd met de keuze van L. Dus L is overaftelbaar.

b) We beschouwen, voor L als in a), de verzameling L' van die $x \in L$ waarvoor $L_{<x}$ overaftelbaar is. Als $L' = \emptyset$ dan voldoet L zelf aan i) en ii). Als L' niet-leeg is, heeft L' een kleinste element ξ. Dan voldoet $L_{<\xi}$ aan i) en ii).

c) Stel L voldoet aan i) en ii) in deeltje b), en stel dat zo'n stijgend rijtje bestond. Dan is duidelijk dat $L \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} L_{<x_i}$. Maar deze laatste is een aftelbare vereniging van aftelbare verzamelingen, en dus aftelbaar; tegenspraak met onze aanname.

Opmerking: het was niet de bedoeling om in deeltje a) het keuze-axioma of equivalenten daarvan (bijv. PCC) te gebruiken. Mocht dat wel, dan had je ook direct de Welordeningsstelling kunnen aanroepen. Aan de andere kant is het een kleine smet op deze opgave dat we in a) angstvallig het keuze-axioma vermijden terwijl we in c) een beroep doen op een stelling die zonder het keuze-axioma niet te bewijzen is...

Opgave 4. Als we twee posets $(P, \leq)$ en $(Q, \leq)$ hebben, dan ordenen we $P + Q$ als volgt (ter herinnering: $P + Q$ is de verzameling $(\{0\} \times P) \cup (\{1\} \times Q)$): $(0, p) \leq (0, p')$ als $p \leq p'$ in P; $(1, q) \leq (1, q')$ als $q \leq q'$ in Q; en $(0, p) < (1, q)$ altijd. In onderstaande opgave hebben $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$ de gebruikelijke ordening.

We werken met de taal $L = \{\leq\}$ van posets.

a) (3 pt) Geef een L-zin die waar is in $\mathbb{N}$ maar onwaar in $\{0\} + \mathbb{Z}$.

b) (2 pt) Geef een L-zin die waar is in $\{0\} + \mathbb{Z}$ maar onwaar in $\mathbb{N} + \mathbb{Z}$.

c) (2 pt) Geef een L-zin die waar is in $\mathbb{N} + \mathbb{Z}$ maar onwaar in $\mathbb{N} + \mathbb{N}$.

d) (3 pt) Geef een L-zin die waar is in $\mathbb{N}+\mathbb{N}$ maar onwaar in $\mathbb{N}$.

Motiveer je zinnen kort; geef aan wat je bedoelt te zeggen.

Uitwerking Definieer de afkorting $x < y$ door $\neg(y \leq x)$. Definieer ook de hulpformules

$$\begin{array}{rcl} \phi_0(x) & \equiv & \forall y(x \leq y) \\ \phi_l(x) & \equiv & \forall y(y < x \to \exists z(y < z \wedge z < x)) \\ \phi_{op}(x(& \equiv & \exists y(x < y \wedge \forall z \neg(x < z \wedge z < y)) \end{array}$$

voor respectievelijk "x is het kleinste element", "x is een limietelement" en "x heeft een opvolger".

a) Laat ϕ_a zijn $\exists x(\phi_0(x) \wedge \neg \phi_{op}(x))$. In $\{0\}+\mathbb{Z}$ heeft $(0,0)$ geen opvolger.

b) Je kunt $\neg\phi_a$ nemen voor ϕ_b.

c) Neem voor ϕ_c de zin $\forall x \forall y(\phi_l(x) \wedge \phi_l(y) \to x = y)$: $\mathbb{N}+\mathbb{Z}$ heeft precies één limietelement.

d) Neem weer $\neg\phi_c$ voor ϕ_d.

Opgave 5. We beschouwen de taal L van ringen: L heeft constanten 0 en 1, en binaire functiesymbolen $+$ en $\cdot$ voor optelling en vermenigvuldiging. We beschouwen ook de L-structuur $\mathbb{N}$ met gebruikelijke operaties. Ter herinnering: voor elk natuurlijk getal n is er een L-term $\bar{n} = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n}$ waarvoor geldt: $\bar{n}^{\mathbb{N}} = n$.

Bewijs dat er een L-structuur M is met de eigenschappen:

i) M en $\mathbb{N}$ maken precies dezelfde L-zinnen waar.

ii) Er is een element $m \in M$ waarvoor geldt: $m \neq 0^M$ en $M \models \exists x(x \cdot \bar{p} = m)$ voor elk priemgetal p.

Hint: gebruik de Compactheidsstelling.

Uitwerking: Definieer de taal L' door $L \cup \{c\}$, waar c een nieuwe constante is. Definieer de L'-theorie T' door de zinnen:

$$\begin{array}{c} \text{alle } L\text{-zinnen die waar zijn in } \mathbb{N} \\ \neg(c = 0) \\ \exists x(x \cdot \bar{p} = c) \text{ voor elk priemgetal } p \end{array}$$

Elke eindige deeltheorie T'' van T' zegt maar iets over eindig veel priemgetallen, zeg $p_0, \ldots, p_k$; dus als we $c^{\mathbb{N}} = \prod_{i=0}^{k}$ nemen, dan wordt $\mathbb{N}$ een model van T''. Met de Compactheidsstelling volgt, dat T' consistent is. Het is evident dat als M een model van T' is en $m = c^M$, dan is aan i) en ii) voldaan.