Tentamen Grondslagen van de Wiskunde A

20 december 2022, 09:30–12:30

Dit tentamen bevat 5 opgaven; zie ook de ommezijde.
Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. Zoals gewoonlijk schrijven we, voor verzamelingen A en B, $A \leq B$ als er een injectieve functie $A \to B$ is, en $A < B$ als er wel een injectieve functie $A \to B$ is, maar geen bijectie.

a) (3 pts) Laat zien: als $A \leq B$ dan $A^C \leq B^C$.

b) (4 pts) Laat door een tegenvoorbeeld zien dat de implicatie

$$\text{als } A < B \text{ dan } A^C < B^C$$

niet altijd waar is.

c) (3 pts) Geldt de implicatie: als $B < C$ dan $A^B < A^C$? motiveer je antwoord.

Uitwerking: Sommige mensen lazen A^C als: het *complement van* A. Er is echter geen verzameling gegeven waarbinnen we dat complement kunnen nemen; er staat A^C en niet A^c; en tenslotte is de te bewijzen uitspraak in het algemeen gewoon onwaar in deze lezing.
Deeltje a): stel $f : A \to B$ is injectief. We definiëren een functie $A^C \to B^C$ door $g \mapsto f \circ g$. Deze functie is injectief, want stel $f \circ g = f \circ h$ voor $g, h \in A^C$. Voor alle $x \in C$ geldt dan $f(g(x)) = f(h(x))$ en dit betekent, vanwege de injectiviteit van f, $g(x) = h(x)$. Dus $g = h$. We concluderen dat $A^C \leq B^C$, als verlangd.

Deeltje b): Neem bijvoorbeeld $A = 2 = \{0,1\}$ en $B = C = \omega$: $2 < \omega$ maar $2^\omega \not< \omega^\omega$. Een ander simpel tegenvoorbeeld wordt verkregen door $C = \emptyset$ te nemen.
Deeltje c): bijvoorbeeld $B = 1 = \{0\}$, $C = 2 = \{0,1\}$, $A = \omega$: $\omega^1 \not< \omega^2 = \omega$. Je kunt ook $A = \emptyset$ nemen en B, C beide niet-leeg met $B < C$; dan is $A^B = A^C = \emptyset$.

Opgave 2. In deze opgave is een N-*tralie* een deelverzameling $\mathcal{A}$ van $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ met de eigenschappen: $\emptyset \in \mathcal{A}$, $\mathbb{N} \in \mathcal{A}$ en als $A, B \in \mathcal{A}$ dan ook $A \cap B \in \mathcal{A}$ en $A \cup B \in \mathcal{A}$.

a) (2 pts) Laat $\mathcal{A}$ een N-tralie zijn, en $A \subseteq \mathbb{N}$ willekeurig. Laat zien dat de verzameling

$$\mathcal{B} \;=\; \{B_1 \cup (B_2 \cap A) \mid B_1, B_2 \in \mathcal{A}\}$$

een N-tralie is, en dat $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ en $A \in \mathcal{B}$.

b) (6 pts) Bewijs met het Lemma van Zorn dat er een N-tralie $\mathcal{A}$ is dat maximaal is m.b.t. de eigenschap dat $\{0\} \notin \mathcal{A}$.

c) (2 pts) Zij $\mathcal{A}$ als in b). Bewijs: als $A \notin \mathcal{A}$, dan is er een $B \in \mathcal{A}$ zodat $A \cap B = \{0\}$.

Uitwerking: deeltje a): omdat $\emptyset \in \mathcal{A}$, is $\emptyset \cup (\emptyset \cap A) = \emptyset \in \mathcal{B}$. Omdat ook $\mathbb{N} \in \mathcal{A}$, is $\mathbb{N} \cup (\emptyset \cap A) = \mathbb{N} \in \mathcal{B}$. En we hebben $\emptyset \cup (\mathbb{N} \cap A) = A \in \mathcal{B}$.

Als $B_1 \cup (B_2 \cap A)$, $C_1 \cup (C_2 \cap A)$ elementen van $\mathcal{B}$ zijn, dan is

$$(B_1 \cup (B_2 \cap A)) \cup (C_1 \cup (C_2 \cap A)) \;=\; B_1 \cup C_1 \cup ((B_2 \cup C_2) \cap A) \;\in \mathcal{B}$$

dus we zien dat $\mathcal{B}$ gesloten is onder vereniging. Voor doorsnede: $(B_1 \cup (B_2 \cap A)) \cap (C_1 \cup (C_2 \cap A))$ is gelijk aan

$$(B_1 \cap C_1) \cup (B_1 \cap (C_2 \cap A)) \cup (B_2 \cap C_1 \cap A) \cup (B_2 \cap C_2 \cap A)$$

en dus een vereniging van elementen van $\mathcal{B}$, en dus een element van $\mathcal{B}$ zoals we net gezien hebben.

Deeltje b): laat $(P, \leq)$ de poset zijn van alle N-tralies die $\{0\}$ niet bevatten. Dan is P niet-leeg, immers $\{\emptyset, \mathbb{N}\} \in P$. Stel $\mathcal{C}$ een niet-lege keten in P; we beschouwen $\bigcup \mathcal{C}$. Deze verzameling bevat zeker niet $\{0\}$ omdat dat voor alle $C \in \mathcal{C}$ geldt; en hij bevat $\emptyset$ en $\mathbb{N}$ omdat $\mathcal{C}$ niet-leeg is. Tenslotte: als

$A, B \in \bigcup \mathcal{C}$ dan is er, omdat $\mathcal{C}$ een keten is, een $C \in \mathcal{C}$ met $A, B \in C$ en derhalve $A \cap B, A \cup B \in C$; zodat $A \cap B, A \cup B \in \bigcup \mathcal{C}$. We concluderen dat $\bigcup \mathcal{C} \in P$ is. We zien dat elke keten in P een bovengrens heeft; met het Lemma van Zorn heeft P een maximaal element.

Deeltje c): stel $\mathcal{A}$ is maximaal als gedefinieerd in b), en stel $A \notin \mathcal{A}$. Laat $\mathcal{B}$ het N-tralie zijn dat geconstrueerd is in deeltje a), met betrekking tot $\mathcal{A}$ en A. Dan is $\mathcal{B}$ een uitbreiding van $\mathcal{A}$ en bovendien geldt $A \in \mathcal{B}$, dus wegens de maximaliteit van $\mathcal{A}$ moeten we hebben dat $\{0\} \in \mathcal{B}$. We hebben dus $B_1, B_2 \in \mathcal{A}$ met $B_1 \cup (B_2 \cap A) = \{0\}$. Dan moet gelden $B_1 = \{0\}$ of $B_2 \cap A = \{0\}$. Maar $B_1 \in \mathcal{A}$, dus $B_1 = \{0\}$ is uitgesloten.

Opgave 3. Hieronder zijn vier welordeningen op $\mathbb{N}$ aangeduid. Geef voor ieder van deze vier een zin in de taal $\{<\}$, die waar is in deze welordening maar onwaar in de drie andere.

a) (2 pts) $N_1 : 0 < 1 < 2 < \cdots$

b) (3 pts) $N_2 : 1 < 2 < 3 < \cdots < 0$

c) (3 pts) $N_3 : 0 < 2 < 4 < \cdots < 1 < 3 < 5 < \cdots$

d) (2 pts) $N_4 : 3 < 6 < 9 < \cdots < 1 < 4 < 7 < \cdots < 2 < 5 < 8 < \cdots < 0$

Uitwerking: het is verstandig hier een paar hulpformules te definiëren: laat

$$\begin{array}{rcl} \phi_{\mathrm{lim}}(x) & = & \forall y(y < x \to \exists z(y < z \wedge z < x)) \\ \phi_{\mathrm{top}}(x) & = & \forall y(x = y \vee y < x) \end{array}$$

zodat $\phi_{\mathrm{lim}}(x)$ de limiet-elementen definieert, en $\phi_{\mathrm{top}}(x)$ het grootste element. We kunnen nu ieder van de structuren N_1, N_2, N_3, N_4 helemaal definiëren in termen van ϕ_{lim} en ϕ_{top}:

a) De structuur N_1 heeft precies één limietelement en geen topelement, dus voldoet aan

$$\exists x \forall y(\phi_{\mathrm{lim}}(y) \leftrightarrow y = x) \wedge \forall u \neg \phi_{\mathrm{top}}(u).$$

Voor de andere structuren geldt dit niet.

b) De structuur N_2 heeft precies twee limietelementen, waarvan de grootste ook topelement is. Deze structuur voldoet dus aan

$$\exists x \exists y(\phi_{\mathrm{top}}(y) \wedge x < y \wedge \forall v(\phi_{\mathrm{lim}}(v) \leftrightarrow v = x \vee v = y))$$

c) De structuur N_3 heeft twee limietelementen en geen grooste element:

$$\exists x \exists y(x < y \wedge \forall v(\phi_{\text{lim}}(v) \leftrightarrow v = x \vee v = y)) \wedge \forall u \neg \phi_{\text{top}}(u)$$

d) N_4 heeft 4 limietelementen waarvan de grootste ook topelement is; ik laat dit verder aan jullie over.

Opgave 4. In deze opgave beschouwen we de taal $L = \{f\}$, waar f een 1-plaatsig functiesymbool is, en de L-structuur R, die onderliggende verzameling $\mathbb{R}$ heeft, en $f^R(x) = x^2$.

a) (5 pts) Definieer in R de getallen -1, 0 en 1 door middel van L-formules.

b) (5 pts) Definieer de deelverzameling $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$ door een L-formule.

Uitwerking: deeltje a): definieer

$$\begin{array}{rcl} \phi_{-1}(x) & = & \neg(f(x) = x) \wedge f(f(x)) = f(x) \\ \phi_0(x) & = & \forall y(f(y) = x \leftrightarrow y = x) \\ \phi_1(x) & = & f(x) = x \wedge \neg\phi_0(x) \end{array}$$

Deeltje b): definieer

$$\phi_{>0}(x) \quad = \quad \exists y(f(y) = x) \wedge \neg\phi_0(x)$$

Opgave 5. We kunnen een *boom* definiëren als een verzameling X met een vast element $r \in X$ en een functie $f : X \to X$ met de volgende eigenschappen:

i) er is precies één element $x \in X$ met $f(x) = x$, en dat element is r;

ii) voor elke $x \in X$ is er een $n \in \mathbb{N}$ met $f^n(x) = r$. Hier is $f^n(x)$ een afkorting voor $\underbrace{f(f(\cdots f}_{n}(x)\cdots))$

Bewijs met behulp van de Compactheidsstelling dat er geen theorie in de taal $\{f, r\}$ is die precies de bomen definieert.

Uitwerking: stel T is zo'n theorie. We laten L' de taal $\{f, r, c\}$ zijn, waar c een nieuwe constante is. Zij T' de L'-theorie

$$T \cup \{\neg f^n(c) = r \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

Als M een model van T' is dan is er geen n met $f^n(c^M) = r^M$, dus M is geen boom; wat in tegenspraak is met het feit dat M een model is van T. We concluderen dat T' inconsistent is. Volgens de Compactheidsstelling is er een eindige T" $\subset T'$ die inconsistent is. Voor die T" is er een $k \in \mathbb{N}$ zodat

$$T\text{"} \subseteq T \cup \{\neg f^n(c) = r \mid n \in \mathbb{N}, n < k\}$$

Maar als we voor M de verzameling $\{0, 1, \ldots, k\}$ nemen met $r^M = 0$ en

$$f^M(i) = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ i - 1 & \text{anders} \end{cases}$$

dan zien we dat M een model is van T". Deze tegenspraak bewijst dat de theorie T als verondersteld, niet bestaan kan.