Tentamen Grondslagen van de Wiskunde B
27 januari 2020
met beknopte uitwerking

Opgave 1. Laat L een taal zijn, M een L-structuur en $A \subset M$ een deelverzameling. Een element $x \in M$ heet *algebraïsch over* A als er een L-formule $\phi(\vec{u}, v)$ met $n+1$ vrije variabelen is, en een n-tupel $a_1, \ldots, a_n$ van elementen van A, zodat het volgende geldt:

i) $M \models \phi(\vec{a}, x)$.

ii) De verzameling $\{y \in M \mid M \models \phi(\vec{a}, y)\}$ is *eindig*.

Bewijs het volgende: als x algebraïsch over A is en N is een elementair submodel van M zodat $A \subset N$, dan geldt $x \in N$.

Uitwerking: laat L, M en $A \subset M$ als gegeven; en zij x algebraïsch over A met formule $\phi(\vec{a}, v)$. Er zijn dus eindig veel, zeg k veel, elementen van M die aan $\phi(\vec{a}, v)$ voldoen. Er is een zin $\psi_k(\vec{a})$ die zegt: "er zijn precies k veel elementen die aan $\phi(\vec{a}, v)$ voldoen".

Stel nu, dat N een elementaire substructuur van M is met $A \subset N$. Dan is de zin ψ_k een L_N-zin, en omdat $M \models \psi_k$ geldt ook $N \models \psi_k$. Als we definiëren

$$\begin{aligned} C_M &= \{m \in M \mid M \models \phi(\vec{a}, m)\} \\ C_N &= \{n \in N \mid N \models \phi(\vec{a}, n)\} \end{aligned}$$

dan is $|C_M| = |C_N| = k$ (omdat $M \models \psi_k$ en $N \models \psi_k$). Maar stel nu $n \in C_N$. Dan geldt $N \models \phi(\vec{a}, n)$. Omdat $\phi(\vec{a}, n)$ een L_N-zin is, geldt ook $M \models \phi(\vec{a}, n)$; dus $n \in C_M$. We zien dat $C_N \subseteq C_M$, maar omdat beide dezelfde kardinaliteit hebben, volgt $C_N = C_M$. Omdat $x \in C_M$, hebben we $x \in C_N \subset N$, als verlangd.

Opgave 2. Laat L de taal van ringen; L heeft constanten $0, 1$ en binaire functiesymbolen $\cdot$ en $+$. Met $\mathcal{N}$ geven we het standaardmodel van de Peano rekenkunde aan: de verzameling $\mathbb{N}$ met de voor de hand liggende interpretatie van de constanten en functiesymbolen.

a) (4) Laat zien dat er voor elk natuurlijk getal n een L-term $\overline{n}$ is, zodat $\overline{n}^{\mathcal{N}} = n$.

b) (6) Laat zien dat er een L-structuur M is met de volgende eigenschappen:

   i) $\mathcal{N}$ is een elementaire substructuur van M.

ii) M bevat een element c zodat $M \models \neg(c = 0)$ en voor elk priemgetal p geldt: $M \models \exists x(x{\cdot}\overline{p} = c)$.

Uitwerking: a) Definieer $\overline{0}$ als de constante 0, en $\overline{n+1}$ als de term $\overline{n} + 1$. b) Laat $L_c = L \cup \{c\}$, waar c een nieuwe constante is. Zij T de L_c-theorie die bestaat uit alle L-zinnen die waar zijn in $\mathcal{N}$, alsmede alle zinnen $\neg(c = 0)$ en $\exists x(x{\cdot}\overline{p} = c)$, voor elk priemgetal p. Op de standaardmanier bewijs je dat T consistent is, met behulp van de Compactheidsstelling; stel M is een model van T_c. Dan is M ook een elementaire uitbreiding van $\mathcal{N}$, omdat elk element van $\mathcal{N}$ de interpretatie is van een L-term, zoals in a) bewezen.

[In het oorspronkelijke tentamen ontbrak de eis $\neg(c = 0)$ zodat de triviale oplossing $c = 0$ mogelijk werd; dit werd uiteraard goedgerekend]

Opgave 3. Bewijs door middel van bewijsbomen:

a) (3) $\exists x(\psi \to \phi(x)) \vdash \psi \to \exists x\phi(x)$ (x komt niet in ψ voor)

b) (4) $\forall x(\phi(x) \to \psi) \vdash (\exists x\phi(x)) \to \psi$ (x komt niet in ψ voor)

c) (3) $\{\phi \to \chi, \psi \to \chi\} \vdash (\phi \vee \psi) \to \chi$

Uitwerking:

$$\dfrac{\dfrac{\exists x(\psi \to \phi(x)) \qquad \dfrac{\dfrac{\psi \to \phi(u)^{2\dagger} \qquad \psi^{1\dagger}}{\phi(u)}\rightarrow\mathrm{E}}{\exists x\phi(x)}\exists\mathrm{I}}{\exists x\phi(x)}\exists\mathrm{E},2}{\psi \to \exists x\phi(x)}\rightarrow\mathrm{I},1$$

$$\dfrac{\dfrac{\exists x\phi(x)^{2\dagger} \qquad \dfrac{\phi(u)^{1\dagger} \qquad \dfrac{\forall x(\phi(x) \to \psi)}{\phi(u) \to \psi}\forall\mathrm{E}}{\psi}\rightarrow\mathrm{E}}{\psi}\exists\mathrm{E},1}{\exists x\phi(x) \to \psi}\rightarrow\mathrm{I},2$$

$$\dfrac{\dfrac{\phi \vee \psi^{3\dagger} \qquad \dfrac{\phi^{1\dagger} \qquad \phi \to \chi}{\chi}\rightarrow\mathrm{E} \qquad \dfrac{\psi^{2\dagger} \qquad \psi \to \chi}{\chi}\rightarrow\mathrm{E}}{\chi}\vee\mathrm{E},1,2}{(\phi \vee \psi) \to \chi}\rightarrow\mathrm{I},3$$

Opgave 4. In deze opgave bekijken we de theorie T_p van p-groepen: een p-groep (voor een priemgetal p) is een abelse groep waarin elk element orde

p heeft. We werken met de taal $L = \{0, +\}$, en de theorie T_p heeft, naast de axioma's voor een abelse groep, een axioma

$$\forall x(\underbrace{x + \cdots + x}_{p} = 0)$$

a) (3) Laat $\mathbb{F}_p$ het lichaam met p elementen zijn. Laat zien dat iedere p-groep een $\mathbb{F}_p$-vectorruimte is.

b) (4) Laat zien dat de theorie T_p κ-kategorisch is, voor *elk* kardinaalgetal κ.

c) (3) Is de theorie T_p volledig? Motiveer je antwoord.

Uitwerking: a) $\mathbb{F}_p$ bestaat uit equivalentieklassen van natuurlijke getallen, waar n en m equivalent zijn als $n - m$ deelbaar is door p. Laat G een p-groep zijn. We moeten een scalaire vermenigvuldiging definiëren: $a{\cdot}x$, voor $a \in \mathbb{F}_p$ en $x \in G$, zodat aan de eisen van een vectorruimte wordt voldaan. We kunnen zetten:

$$a{\cdot}x \;=\; \underbrace{x + \cdots + x}_{n}$$

als a de equivalentieklasse van het natuurlijke getal n is. Dat dit goed gedefinieerd is en de structuur van een vectorruimte geeft, volgt uit het feit dat x orde p heeft.
b) Als de p-groep eindig is, heeft hij (als vectorruimte) een eindige basis B, en dan is de kardinaliteit van de p-groep gelijk aan $p^{|B|}$; twee p-groepen met dezelfde eindige kardinaliteit hebben dus bases van dezelfde kardinaliteit, en zijn derhalve isomorf. Als de p-groep oneindig is, dan is de kardinaliteit van de groep gelijk aan die van de basis, en weer geldt dat twee p-groepen van dezelfde kardinaliteit isomorf zijn.
c) De theorie T_p is *niet* volledig, omdat T_p ook eindige modellen heeft. Voor bijvoorbeeld de zin die zegt "er zijn precies p elementen" geldt, dat die waar is in sommige, maar niet alle modellen van T_p.

Opgave 5. Een kardinaalgetal κ heet *regulier* als voor elk ordinaalgetal $\alpha < \kappa$ en elke functie $f : \alpha \to \kappa$ er een ordinaalgetal $\beta < \kappa$ is waarvoor geldt dat $f(\gamma) < \beta$, voor alle $\gamma \in \alpha$.

a) (5) Laat zien dat het eerste overaftelbare ordinaalgetal ω_1 een regulier kardinaalgetal is.

b) (5) Construeer een kardinaalgetal $\kappa > \omega_1$ dat niet regulier is.

Uitwerking: a) Stel $f : \alpha \to \omega_1$ is een functie, waar $\alpha < \omega_1$. Omdat ω_1 het kleinste overaftelbare ordinaalgetal is, is α aftelbaar, en voor alle $x \in \alpha$ is $f(x) \in \omega_1$, dus $f(x)$ is aftelbaar. Dit betekent dat de verzameling $\bigcup_{x\in\alpha} f(x)$ een aftelbare vereniging van aftelbare verzamelingen is, dus een aftelbare verzameling. Verder is het ook een ordinaalgetal, en dus een aftelbaar ordinaalgetal, dus een element van ω_1. Voor $\beta = \bigcup_{x\in\alpha} f(x) + 1$ geldt dus dat $\beta \in \omega_1$, en $f(x) < \beta$ voor alle $x \in \alpha$. We concluderen dat ω_1 regulier is (het is een kardinaalgetal omdat elk kleiner ordinaalgetal aftelbaar is en er dus nooit een bijectie met een kleiner ordinaalgetal kan bestaan).
b) Dit was misschien de moeilijkste van het hele tentamen. Er is een rij ordinaalgetallen $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$, zo dat ω_{n+1} steeds het kleinste ordinaalgetal is zodat er geen injectieve functie $\omega_{n+1} \to \omega_n$ is. Er volgt dat alle ω_n kardinaalgetallen zijn (zie ook opgave 141 van het boek), en nu is $\bigcup_n \omega_n$ ook een kardinaalgetal. Maar dit is niet regulier want de functie $n \mapsto \omega_n : \omega \to \bigcup_n \omega_n$ heeft geen bovengrens in $\bigcup_n \omega_n$.