

College Algemene Sterrekunde 1e jaars

III Atmosferen van sterren

Samenvatting door C. Zwaan

III.1 Waarnemingen; te bepalen parameters

Waar te nemen in ideaal geval: het volledige elektromagnetische spectrum:

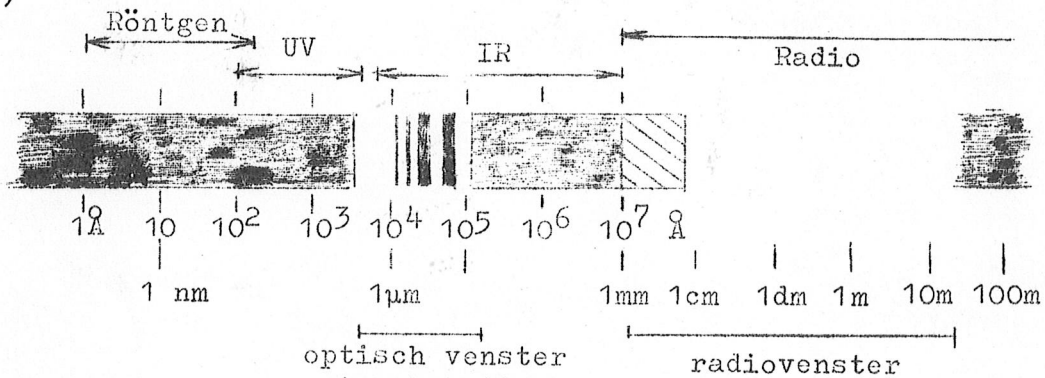
sterren (puntvormig!):  $F(\lambda)$  ; zon en planeten:  $I_\lambda(x,y)$ .

[Opm.: licht kan gedeeltelijk gepolariseerd zijn, voor volledige beschrijving zijn dan vier parameters nodig inplaats van een  $F_\lambda$  of  $I_\lambda$  ].

Praktisch is doorgaans slechts een beperkt deel van het spectrum waarneembaar t.g.v.

- a) extinctie (= uitdoving) door aardse dampkring
- b) gevoeligheid detector (fotografische film, fotocel, .....) spectraal begrensd.

Schema elektromagnetisch spectrum (donker: aardse dampkring ondoorzichtig)



Golflengtematen: 1 Angstrom =  $10^{-10}$  m;  $1 \mu\text{m} = 10^{-6}$  m;  $1 \text{ nm} = 10^{-9}$  m.  
 Frequenties ;  $\text{sec}^{-1} = \text{Hz}$ .

Gevoeligheidsbereik menselijk oog: 4000 - 7600 Å .

Waarnemingen in ver IR mogelijk uit onbemande ballonnen of vliegtuigen.

Voor ver UV-röntgenstraling: raketten of kunstmanen nodig.

Beperkt scheidend vermogen in hoekmaat:

- a) Instrumentele beperkingen (vooral bij radio- en röntgeninstrumenten);
- b) Aardse dampkring (belangrijkste beperking in optisch gebied); onregelmatige straalbreking veroorzaakt:
  - helderheidsvariaties (scintillatie: sterren)
  - dansen en versmering.

Overdag: goed scheidend vermogen: 1" , zeer goed 0"5

's nachts: " " " : 0"5 , " " 0"2 .

Twee typen waarnemingen:

1. Spektroskopie: veel informatie in  $\lambda$  (scheidend vermogen tot  $\lambda/\Delta\lambda = 500\ 000$ , zie I.2.2.2) (bij zon: ruimtelijke informatie in één richting  $x$  langs spleet mogelijk). Bezwaar: lange integratietijden.
2. Fotometrie: breed- of smalbandig; meerkleurenfotometrie (zie I.2.2.1) Korte integratietijden, doch weinig spektrale informatie.  
 [Zon en planeten: fotometrie in twee dimensies (x,y) mogelijk. Bij zon kan simultaan in aantal zeer nauwe banden ( $< 1\text{\AA}$ ) gemeten worden, bijv. op twee plaatsen binnen profiel van één spektrale lijn.]

Keuze fotometrie - spektroskopie, fotografisch - fotoëlektrisch: hangt van probleemstelling af.

Bij sterren en zon te bepalen parameters:

1. a. Temperaturen T  
 b. versnelling zwaartekracht g }  $\leftrightarrow$  drukken P, dichtheden  $\rho$

Een heel belangrijke maat: de flux = totale energiestroom per opp. eenheid door de atmosfeer, of de equivalente effectieve temperatuur  $T_{\text{eff}}$ . Wanneer opp. (straal) van ster bekend is, volgt daaruit de lichtsterkte (maat voor energievrijmaking in inwendige).

2. Abundanties: de kwantitatieve chemische samenstelling.
3. Snelheidsvelden en magnetische velden.

Steratmosferen zijn de waarneembare schillen om de inwendigen van sterren die alleen theoretisch berekend kunnen worden, zie hoofdstuk II. Anders gezegd: uit de waarnemingen van steratmosferen moet deel van randvoorwaarden voor berekening van stermodellen gevonden worden.

Abundanties zijn van belang: voor studie van evolutie, als invoergegevens, maar ook als "fossiele" gegevens over processen uit een ver verleden.

Voordat wij de fysische structuur van steratmosferen onderzoeken moeten wij ons verdiepen in de theorie van stralingstransport (wisselwerking straling en materie).

Natuurkundige kennis voor dit hoofdstuk: atoomfysica en spektroskopie (Structuur der Materie I).

Algemene literatuur bij dit hoofdstuk:

G.B. van Albada, Sterrenkunde (ed. C. de Jager) deel III, hoofdstukken I en III.6

A. Unsöld: der Neue Kosmos (enkele hoofdstukken)

A.J.M. Wanders: Sterrenkunde.

III.2 Stralingstransport, vorming van spektrale lijnen, modelatmosferen

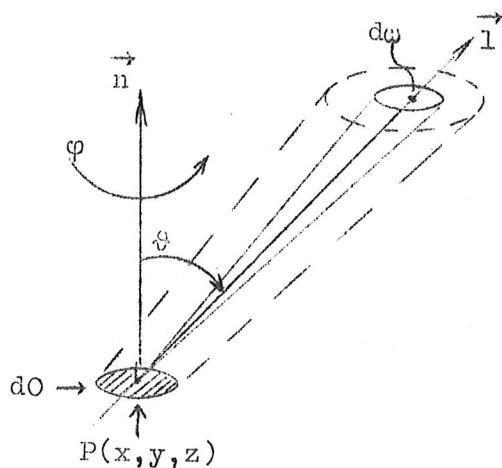
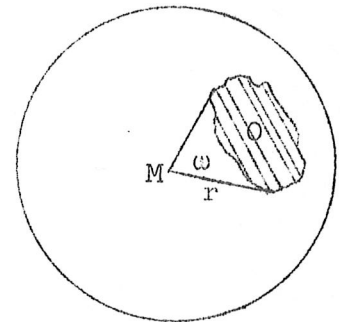
III.2.1 Stralingstransport

III.2.1.1 Intensiteit en afgeleide grootheden

P.M.: ruimtehoek, def. steradiaal:

ruimtehoek  $\omega = \frac{O}{r^2}$  steradialen

gehele ruimte  $\omega = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$  sterad.



Energiestroom  $dE$  door  $dO$  om  $P(x, y, z)$ , in richting  $\vec{l}$ , binnen ruimtehoek  $d\omega$ , gedurende tijd  $dt$ , binnen frequentie interval  $\nu$ ,  $\nu + d\nu$  :

$$dE = I_\nu \cdot dO \cos \varphi \cdot d\omega \cdot dt \cdot d\nu \quad (\text{III.1})$$

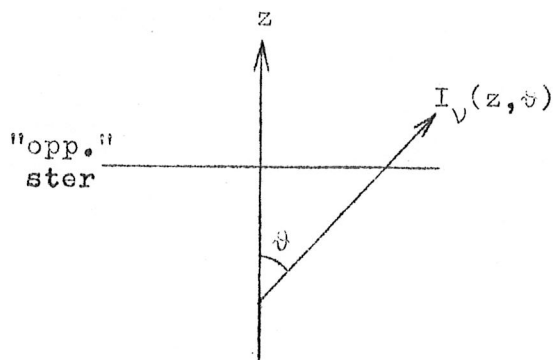
De evenredigheidsconstante

$I_\nu(x, y, z, \varphi, \omega, t)$  heet monochromatische intensiteit

(c.g.s.)  $\text{erg sec}^{-1} \text{cm}^{-2} (\text{sterad})^{-1} (\text{Hz})^{-1}$   
 of:  $\text{joule sec}^{-1} \text{m}^{-2} (\text{sterad})^{-1} (\text{Hz})^{-1}$   
 $= \text{Watt m}^{-2} (\text{sterad})^{-1} (\text{Hz})^{-1}$

Faktor  $\cos \vartheta$  in (III.1) : intensiteit wordt per oppervlakte-eenheid loodrecht op de bundel gemeten.

Wij bekijken alleen stationaire (tijdsafhankelijke) problemen  $\rightarrow t$ .  
Bovendien zullen wij ons doorgaans beperken tot atmosferen uit vlakke



homogene lagen (geen afh. van x en y), stralingsveld axiaal symmetrisch dus:

$$I_v(z, \vartheta)$$

Afspraak: tel z toenemend naar waarnemer toe.

Vaak gebruikt:

$$\mu \equiv \cos \vartheta \rightarrow d\mu = -\sin \vartheta d\vartheta \quad (III,2)$$

Wanneer het stralingsveld ook niet van  $\vartheta$  afhangt dan heet het isotroop.  
Def. ook per golflengte eenheid te geven:

$$\frac{dE}{d\Omega \cos \vartheta d\omega dt} = I_v dv = I_\lambda d\lambda, \text{ met } \lambda = \frac{c}{\nu} \rightarrow |dv| = \frac{c}{\lambda^2} |d\lambda|$$

dus

$$I_\lambda = \frac{c}{\lambda^2} I_v \left[ \text{erg sec}^{-1} \text{cm}^{-2} (\text{sterad})^{-1} (\text{cm})^{-1} \right] \quad (III,3)$$

Def.: totale (of geïntegreerde) intensiteit:

$$I \equiv \int_0^\infty I_v dv = \int_0^\infty I_\lambda d\lambda \quad (III,4)$$

Def.: gemiddelde  $\left\{ \begin{array}{l} \text{monochromatische} \\ \text{totale} \end{array} \right.$  intensiteit  $\left\{ \begin{array}{l} J_v \\ J \end{array} \right.$  : intensiteit  
over alle richtingen gemiddeld; dus

$$J_v \equiv \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi I_v d\omega \quad (\text{geheel analoog voor } J_\lambda) \quad (III,5a)$$

en

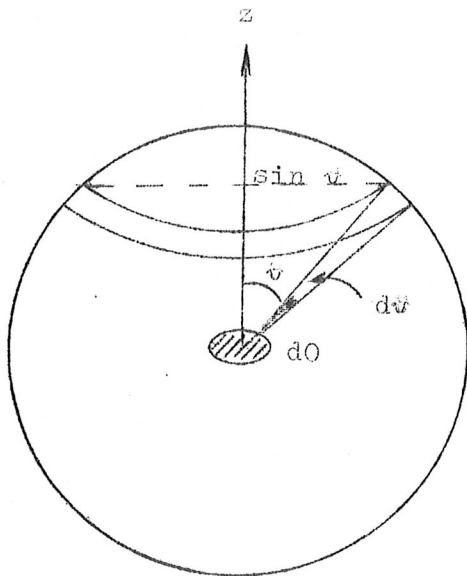
$$J \equiv \frac{1}{4\pi} \int I d\omega \quad (III,5b)$$

Omdat integraties over  $\nu$  en over  $\omega$  omgewisseld mogen worden geldt ook:

$$J = \int_0^\infty J_v dv = \int_0^\infty J_\lambda d\lambda$$

Bij isotroop stralingsveld:  $J_v = I_v$

Vlakke homogene lagen:  $J_v(z) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi I_v(z, \vartheta) \cdot \frac{2\pi \sin \vartheta d\vartheta}{d\omega} =$   
 $= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I_v(z, \mu) d\mu$  ringetje in fig.  $\rightarrow$  (III,6)



Analoog voor  $J_\lambda$  en  $J$ .

Energiedichtheid van straling:

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} J_\nu \left[ \text{erg cm}^{-3} \right]$$

(indien brekingsindex = 1);

hier geen bewijs.

(Netto-) monochromatische flux  $\pi F_\nu$  :  
 energiestroom per opp. eenheid door  
 een vastliggend vlakje  $dO$ . Bijdrage  
 in gekozen normaalrichting ( $z$  in fi-  
 guur) wordt positief geteld, bijdra-  
 ge in tegengestelde richting nega-  
 tief. Bij axiale symmetrie ( $I_\nu(z, \theta)$ )  
 volgt uit def.  $I_\nu$  (III,1) en  $\pi F_\nu$

zie bovenstaande figuur: totale energiestroom door  $dO$  per Hz:

$$\pi F_\nu(z) dO = \int_0^\pi I_\nu(z, \theta) dO \cos \theta \cdot \underbrace{2\pi \sin \theta d\theta}_{d\omega}, \text{ of}$$

$$\pi F_\nu(z) = 2\pi \int_0^\pi I_\nu(z, \theta) \cos \theta \sin \theta d\theta = \underbrace{2\pi \int_{-1}^{+1} I_\nu(z, \mu) \mu d\mu}_{(III, 2)} \quad (III, 7a)$$

Netto-flux kan gesplitst worden in verschil tussen een opwaartse flux  $\pi F_\nu^+$  (in pos.  $z$ -richting) en neerwaartse flux  $\pi F_\nu^-$ :

$$\pi F_\nu(z) = \underbrace{2\pi \int_0^{+1} I_\nu(z, \mu) \mu d\mu}_{\pi F_\nu^+(z)} - \underbrace{2\pi \int_{-1}^0 I_\nu(z, \mu) \mu d\mu}_{\pi F_\nu^-(z)} \quad (III, 7b)$$

Ga na dat  $\pi F_\nu^+ \geq 0$ ,  $\pi F_\nu^- \geq 0$  doch  $\pi F_\nu \geq 0$ .

Dimensie  $\pi F_\nu$  :  $\left[ \text{erg cm}^{-2} \text{sec}^{-1} (\text{Hz})^{-1} \right]$  of  $\left[ \text{watt m}^{-2} (\text{Hz})^{-1} \right]$ .

Geheel analoog kan  $\pi F_\lambda$  worden gedefinieerd (dimensie?).

Totale (of geïntegreerde) fluxen  $\pi F \equiv \int_0^\pi \pi F_\nu d\nu$  (III,8)  
 Analoog  $\pi F^+$  en  $\pi F^-$  (dimensie?)

[ Opm.: flux hangt van gekozen normaalrichting af. In algemeen geval is de flux een vector. Wij hoeven ons daar niet mee bezig te houden omdat de voorkeursrichting ("naar buiten") bij sterren duidelijk vastligt. ]

Conventie om te schrijven:  $\underline{\pi F}$  : zie opgaven hieronder en de volgende beschouwing: ster met straal  $R$ , waarnemer in oneindige ziet de over de sterschijf gemiddelde intensiteit  $\tilde{I}_\nu$  volgens (tekening op college):

$$\pi R^2 \cdot \tilde{I}_\nu = \int_0^{\pi/2} I_\nu(0, \vartheta) \cos \vartheta \cdot 2\pi R \sin \vartheta \cdot R \sin \vartheta = R^2 \cdot \pi F_\nu^+ \quad (\text{II, 7a, b})$$

dus:  $\tilde{I}_\nu = F_\nu^+$

(Bij sterren geldt bovendien  $I_\nu(0, \vartheta) = 0$  voor  $\frac{\pi}{2} < \vartheta \leq \pi$ : geen opvallende straling, dus  $\pi F_\nu^- = 0 \rightarrow \tilde{I}_\nu = F_\nu$ .)

Detector op afstand  $D (>> R)$  ontvangt energieflux (per opp. eenheid):

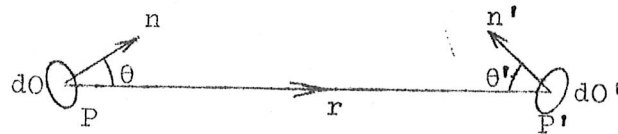
$$\pi f_\nu = \tilde{I}_\nu \cdot d\omega = F_\nu \cdot \pi R^2 / D^2 \quad (\text{III, 9})$$

ruimtehoek waaronder ster wordt "gezien"

dus:  $(: ) D^{-2}$

$I_\nu$  of  $I$  is fundamentele grootheid bij stralingstransport omdat de intensiteit niet verandert met de afstand van de lichtbron, wanneer er onderweg geen verliezen (absorptie) of winsten (emissie) optreden.

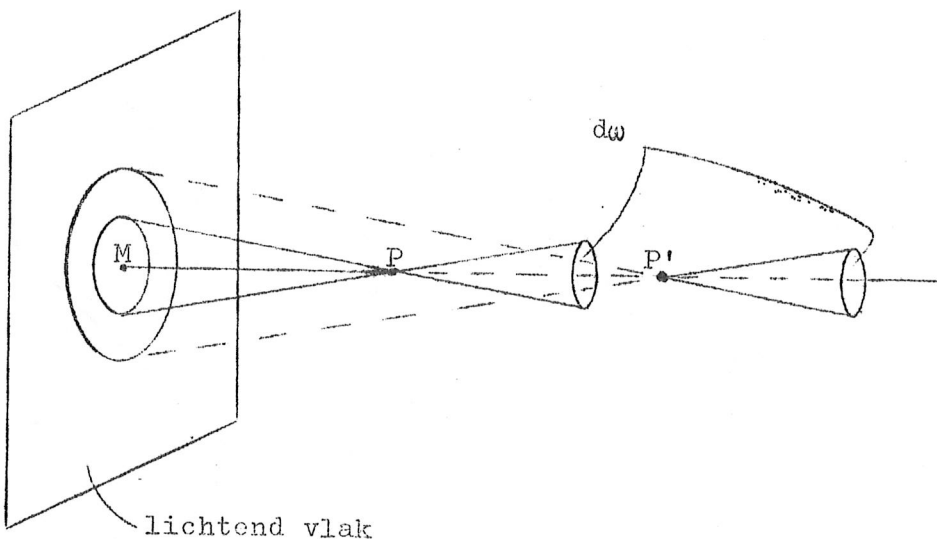
Bewijs: bekijk energiestroom  $dE$  die zowel door  $dO$  als door  $dO'$  gaat. (afm.  $dO$  en  $dO' \ll r$ ). Uit def.  $I$  en  $I'$  (III, 1) :



$$dE = \underbrace{I dO \cos \theta}_{\text{bekeken bij P}} \underbrace{\frac{dO' \cos \theta'}{r^2}}_{d\omega} = \underbrace{I' dO' \cos \theta'}_{\text{bij P'}} \underbrace{\frac{dO \cos \theta}{r^2}}_{d\omega'}$$

$\therefore I' = I$

Intensiteit verandert evenmin door spiegels, lenzen, prisma's, ..... mits geen absorptie- en reflectieverliezen, en mits brekingsindex in



lichtend vlak

P en in P' hetzelfde. (Mededelingen zonder bewijs).

Invariantie van  $I$  misschien gemakkelijker in te zien aan de hand van bijgaande figuur: het deel van het lichtend oppervlak dat hetzelfde ruim-

tehoekje  $dw$  vult, neemt van  $P \rightarrow P'$  toe en wel als  $(PM)^2$ .

Bij uitgebreide objecten reageert het oog (ongeveer logaritmisch) op  $I =$  "oppervlakte-helderheid". Bij toenemende afstand blijft  $I$  gelijk doch ruimtehoek waaronder object wordt gezien neemt kwadratisch af met afstand. Bij objecten die niet van puntvormig te onderscheiden zijn reageert oog op flux  $\pi f (\cdot) D^{-2}$ . Zie.(III,9).

Bij elke monochromatische grootheid  $Q_\nu (I_\nu, J_\nu, F_\nu, \dots)$  hoort een  $Q_\lambda$

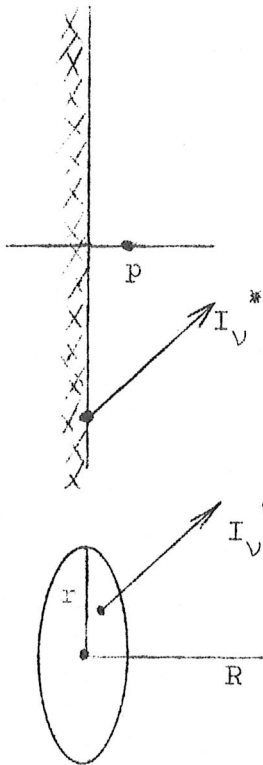
volgens  $Q_\lambda = \frac{c}{\lambda^2} Q_\nu$  (III, 10a)

vergelijk (III,3), en een totale of geïntegreerde grootheid  $Q$  volgens

$$Q \equiv \int_0^\infty Q_\nu d\nu = \int_0^\infty Q_\lambda d\lambda \quad (III, 10b)$$

Omdat volgorde van integraties over  $\mu$  en over  $\nu$  (of  $\lambda$ ) mag worden omgewisseld, kan geïntegreerde  $Q$  worden gevonden door in vergelijkingen (bijv. III,6 of 7)  $I_\nu$  te vervangen door  $I$ .

Opgaven (zeer nuttig om met besproken begrippen te oefenen!)



1. Hoe groot zijn  $I_\nu$ ,  $J_\nu$  en  $\pi F_\nu$  in een punt  $P$  nabij een onbegrensd gedacht plat vlak dat overal en in alle richtingen met dezelfde intensiteit  $I_\nu^*$  straalt?

Een oppervlak dat in alle richtingen even helder straalt heet een Lambert oppervlak.

2. Bereken  $I_\nu$ ,  $J_\nu$  en  $\pi F_\nu$  in een punt  $P$  dat op de as van een cirkelvormig Lambert oppervlak (met straal  $r$ ) ligt, op een afstand  $R$ .

3. Bereken  $\pi F_\nu^+$ ,  $\pi F_\nu^-$  en  $\pi F_\nu$  voor een isotroop stralingsveld  $I_\nu(\mu) = I_\nu$ .

$$2\pi \int_0^{\pi/2} I_\nu(z) \mu d\mu = 2\pi I_\nu \int_0^{\pi/2} \mu d\mu = \pi I_\nu$$

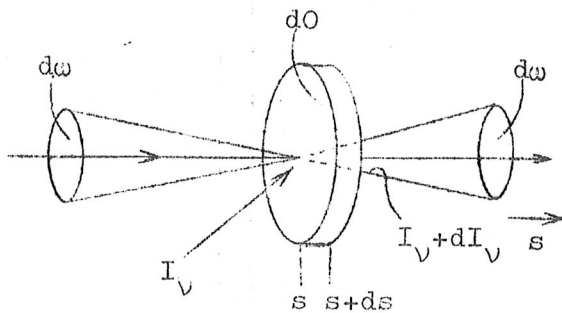
III.2.1.2 Extinctie- en emissiecoëfficiënten; transportvergelijking; optische diepte en bronfunctie.

Extinctie: fotonen verdwijnen uit oorspronkelijke gerichte bundel.

Emissie : fotonen worden aan bundel toegevoegd.

Overzicht: (zie pag. III, 8).

begrip	omschrijving	tegenhanger
extinctie (vaak slordig: absorptie)	$\left. \begin{array}{l} \text{zuivere} \\ \text{ware} \end{array} \right\} \text{absorptie } \kappa$ foton uit bundel wordt vernietigd, omgezet in thermische energie	thermische emissie j
	$\left. \begin{array}{l} \text{verstrooiing } \sigma \\ k = \kappa + \sigma \end{array} \right\}$ foton <u>blijft</u> bestaan doch verandert van richting	verstrooiing j



In richting  $s$  loodrecht op doosje valt energiestroom (per tijdseenheid en per frequentie-eenheid):

$$E_v = I_v dO d\omega$$

door extinctie wordt daarvan afgenomen:

$$dE_v = -k_v \rho ds I_v dO d\omega$$

( $\rho$  : massadichtheid [ $\text{g cm}^{-3}$ ]).

waarin  $k_v = \kappa_v + \sigma_v =$  extinctiecoëfficiënt (massa ext. coëff. absorptiecoëfficiënt      verstrooiingscoëfficiënt [ $\text{cm}^2 \text{g}^{-1}$ ]).

Je kunt de coëfficiënten ook per volume-eenheid nemen

$$k_v \rho = \kappa_v \rho + \sigma_v \rho \quad [\text{cm}^{-1}] \quad \text{beter:} \quad [\text{cm}^2 \text{cm}^{-3}] .$$

of per deeltje  $k_v \rho = n \alpha_v$ ;  $\alpha_v [\text{cm}^2]$  : elk deeltje een verduisterd schijfje;  $n$  : deeltjesdichtheid [ $\text{cm}^{-3}$ ];  $\alpha_v$  : extinctiedoorsnede - cross section.

Door emissie (kan dus ook zijn: verstrooiing) wordt aan de bundel toegevoegd:

$$dE_v = + j_v \rho dO ds d\omega .$$

Daarin is  $j_v$  de emissiecoëfficiënt (per massa-eenheid) ( $j_v \rho$  is de emissiecoëfficiënt per vol. eenheid). Vergelijking van uitdrukkingen:  $j_v \rho ds$  heeft dezelfde dimensie als  $I_v$ .


Optellen: totale verandering in energiestroom door doosje:

$$dE_v = dI_v dO d\omega = -k_v \rho ds I_v dO d\omega + j_v \rho ds dO d\omega$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{dI_v}{ds} = -k_v \rho I_v + j_v \rho} \quad \text{(III, 11a)} \quad \text{de transportvergelijking.}$$

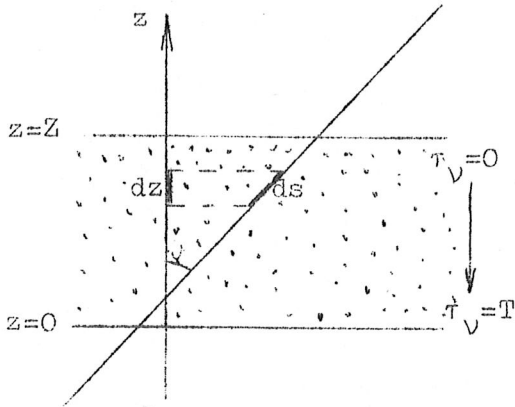


Symmetrisch te maken met bronfunctie  $S_V$  :



$$S_V \equiv \frac{j_V}{k_V} \quad (III, 12)$$

$$\rightarrow \frac{dI_V}{k_V \rho ds} = -I_V + S_V \quad (III, 11b)$$



Vlakke homogene lagen, met

$$\mu = \cos \psi : ds = dz/\mu$$

Definitie optische diepte (-lengte, -dikte)  $d\tau_V \equiv -k_V \rho dz$  (III, 13)

wordt van de waarnemer af geteld.

Aan bovenzijde  $\tau_V \equiv 0$ , totale optische dikte van laag

$$\tau_V T = \int_0^Z k_V \rho dz$$

De optische diepte is een dimensieloze grootheid.

Transportvergelijking wordt nu:

$$\mu \frac{dI_V}{d\tau_V} = I_V - S_V \quad (III, 14)$$

$S_V$  heeft dezelfde dimensie als  $I_V$ .

Toepasselijkheid  $S_V$  :

- 1) Maakt transportvergelijking symmetrisch;  $S_V$  is zoiets als de emissiecoëfficiënt per eenheid van optische diepte;
- 2) Vaak hangt  $S_V$  op een eenvoudige manier van het medium en/of het stralingsveld af;  $j_V$  is een veel ingewikkelder functie (frequentieafhankelijk).

Begrippen bronfunctie en optische diepte zullen in het vervolg duidelijker worden.

Toepassingen op eindige vlakke homogene laag ( $k_V(z) = k_V$ ,  $\rho(z) = \rho$ ,  $S_V(z) = S_V$ ).

- 1) Geén extinctie of emissie: (III, 11)  $\frac{dI_V(z)}{dz} = 0 \rightarrow I_V(z) = \text{constant}$ , zoals te verwachten.

- 2) Alleen extinctie; loodrecht doorval:

$$\mu = 1 \rightarrow \frac{dI_V(z)}{dz} = -k_V \rho I_V(z) \rightarrow I_V(z) = C_1 e^{-k_V \rho z}$$

Randvoorwaarde  $I_V(0) = C_1$ , dus  $I_V(z) = I_V(0) e^{-k_V \rho z}$ , dus

$$I_V(Z) = I_V(0) e^{-k_V \rho Z} = I_V(0) e^{-\tau_V} \quad (III, 15)$$

waarbij  $\tau_V = k_V \rho Z$  optische dikte van laag

$\tau_V$	0.5	1	2	3	5	10	
$\frac{I_V(z)}{I_V(0)}$	0.60	0.37	0.14	0.05	0.007	$45 \times 10^{-5}$	<u>snel</u> afvallend

Laag optisch dun ald  $\tau_V \ll 1$  : vrijwel geen verzwakking.

optisch dik als  $\tau_V \gg 1$  : laag laat vrijwel niets door.

Fotonen hebben middelbare vrije weglengte  $\bar{\ell}$  zodanig dat

$$k_V \rho \bar{\ell} \approx 1 \rightarrow \bar{\ell} = \frac{1}{k_V \rho} [\text{cm}] .$$

Toepassingen: mist, extinctie aardse dampkring.

3) Extinctie en emissie; loodrecht op laag:  $\frac{dI_V(z)}{dz} = -k_V \rho I_V(z) + k_V \rho S_V$  ; formele oplossing: vermenigvuldig beide leden met  $e^{+k_V \rho z}$

$$\rightarrow \frac{d}{dz} ( I_V(z) \rho e^{+k_V \rho z} ) = +k_V \rho S_V e^{+k_V \rho z} \quad \text{integreer beide leden}$$

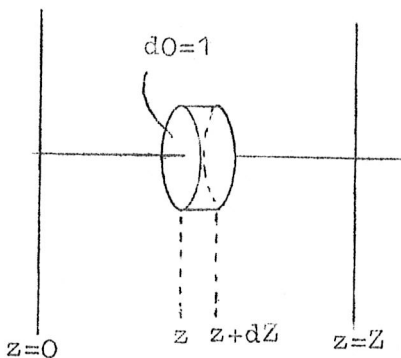
$$\int_0^z \dots dz \rightarrow$$

$$\rightarrow [ I_V(z) e^{+k_V \rho z} ]_0^z = [ +S_V e^{+k_V \rho z} ]_0^z \rightarrow$$

$$\rightarrow I_V(Z) = I_V(0) e^{-k_V \rho Z} + S_V (1 - e^{-k_V \rho Z}) \quad \text{(III, 16)}$$

Eerste term: verzwakte doorvallende straling (vergelijk III,15);

tweede term: in laag geproduceerde straling.



Meer fysische afleiding: eerste term (III,16) volgt uit (III,15) bijdrage aan  $I_V(Z)$  door emissie binnen plat doosje tussen  $z$  en  $z + dz$  :

$$(j_V \rho dz = S_V k_V \rho dz) \times e^{-k_V \rho (Z-z)}$$

emissie binnen doosje      verzwakkingsfactor t.g.v. extinctie  $z \rightarrow Z$ , vergel. (III,15).

Bijdrage gehele laag: integreren van  $z = 0 \rightarrow Z$  :

$$\int_0^Z S_V e^{-k_V \rho (Z-z)} \cdot k_V \rho dz = \dots = S_V (1 - e^{-k_V \rho Z}) : \text{tweede term van (III,16)} .$$

Merk op dat emissie binnen doosje geschreven kan worden als  $S_V \cdot d\tau_V$ : de bronfunctie is de emissiecoëfficiënt per eenheid van optische weglengte!

Laag optisch dun als  $\tau_V = k_V \rho Z \ll 1 \rightarrow I_V(Z) \approx I_V(0) + [S_V - I_V(0)] \cdot k_V \rho Z .$

$$I_V(Z) \gg I_V(0) \quad \text{naar gelang} \quad S_V \gg I_V(0) .$$

Laag optisch dik als  $\tau_V = k_V \rho Z \gg 1 \rightarrow I_V(Z) \approx S_V$ , je merkt dan niets meer van  $I_V(0)$ , je ziet  $S_V$ !

Bijzonder geval:

geen opvallende straling:  $I_V(0) = 0$   
(III.16)  $\rightarrow$

$$I_V(Z) = S_V (1 - e^{-k_V \rho Z})$$

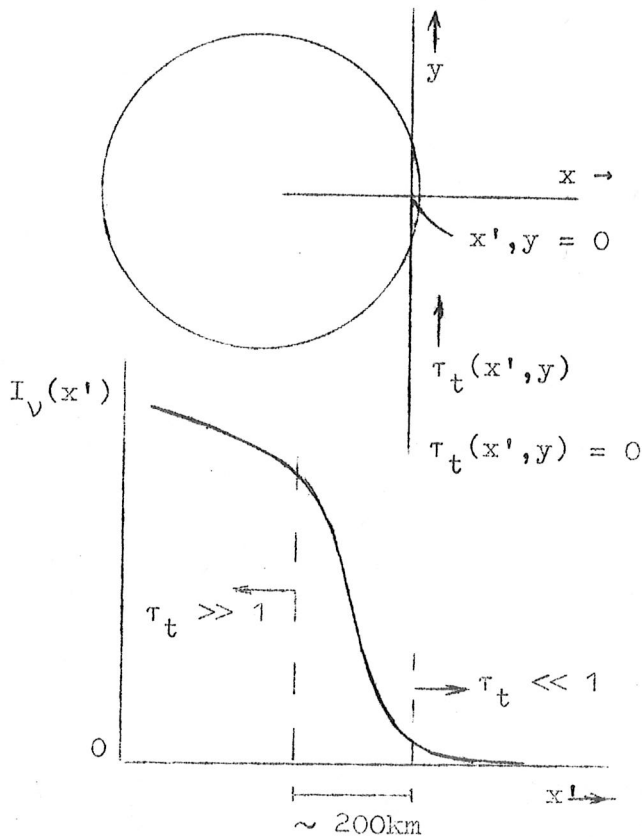
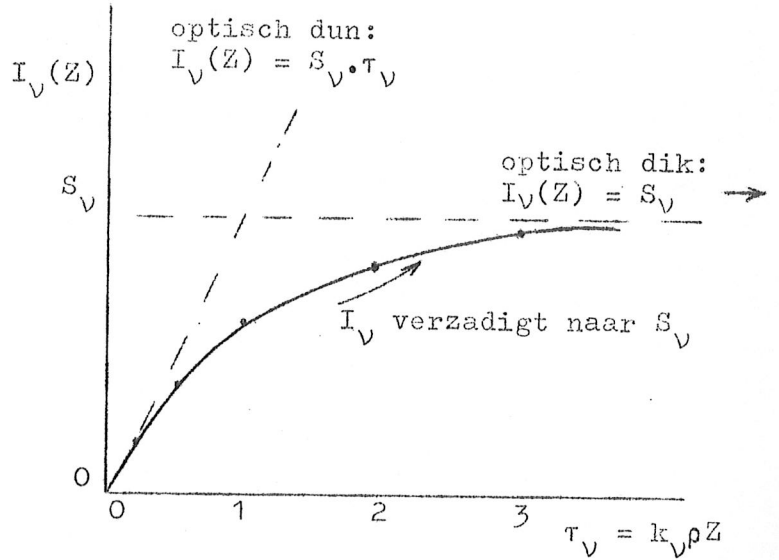
(III, 16a)

Bestudeer zorgvuldig gevallen optisch dun of dik; zie figuur.  $I_V(Z)$  volledig bepaald door bronfunctie  $S_V$  en door optische dikte van laag = produkt  $k_V \rho Z$ .

Soortgelijke uitdrukkingen voor niet-homogene laag (geen opvallende straling):

optisch dun:  $\tau_V \ll 1 \quad I_V = \bar{S}_V \cdot \tau_V$ , waarin  $\bar{S}_V$  een "geschikte" middelwaarde over hele laag

optisch dik:  $\tau_V \gg 1 \quad I_V = \bar{S}_V$ , waarin  $\bar{S}_V$  een geschikt te kiezen middelwaarde is tussen  $\tau_V = 0$  en  $\tau_V = 2$  (van waarnemer af geteld).



Toepassing: verklaring scherpe zonsrand.

Van belang: totale tangentiële optische weglengte

$$\tau_t(x', y = +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} k_V(x', y) \rho(x', y) dy .$$

Optisch dik:  $\tau_t \gg 1 \rightarrow$

$$I_V = \bar{S}_V(x', y)$$

met middelwaarde  $\bar{S}_V$  over  $y$  van  $\tau_t(x', y) = 0$  tot  $\tau_t(x', y) \approx 2$ .

Optisch dun:  $\tau_t(x', \infty) \ll 1 \rightarrow I_\nu = \overline{S_\nu(x', y)} \cdot \tau_t(x', \infty)$

$\overline{S_\nu}$  : middelwaarde langs y .

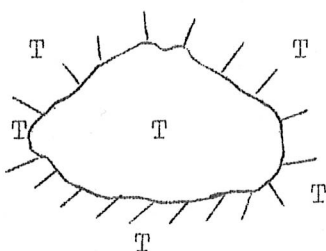
Overgang  $\tau_t(x', \infty) \gg 1$  naar  $\tau_t(x', \infty) \ll 1$  over klein; uit later te bespreken zonsmodel vindt men voor het continue spectrum bij  $\lambda = 4700 \text{ \AA}$  :

$x' \text{ (km)}$	-150	-100	-50	0	+50	+100	+150	200
$\tau_t(x', \infty)$	> 10	5.57	2.48	1.08	0.47	0.20	0.08	0.04

$I_\nu \approx \overline{S_\nu}$  ←-----→  $I_\nu = \overline{S_\nu} \cdot \tau_t$   
 fractie van boogsec.,  
 want  $1'' \stackrel{\Delta}{=} 725 \text{ km}$  op zon.

III.2.1.2. TE, LTE, NLTE, verstrooiing

De toestand van het medium en de bronfunctie hangen af van het soort evenwicht dat zich instelt tussen het medium en het stralingsveld. Wij maken hier een beknopt overzicht van de verschillende soorten evenwicht, waarbij een aantal beweringen niet bewezen wordt. Op enkele aspecten komen wij in III.2.3.2 terug.



1. Thermodynamisch evenwicht (TE): stelt zich in binnen ruimte omsloten door isotherme wanden (T). Medium en stralingsveld geheel door deze éne temperatuur te beschrijven, bijv.:
  - ionisatie-evenwicht, volgens Saha
  - bezettingen energieniveau volgens Boltzmann
  - snelheidsverdeling electronen, atomen
  - ....., Maxwell.

Stralingsveld: homogeen en isotrop, onafhankelijk van materie in holte, bronfunctie = Planck functie, dus:

$$I_\nu = J_\nu = S_\nu = B_\nu ; \quad B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad \text{(III, 17a)}$$

$$\text{of: } B_\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} ; \quad \text{(III, 17b)}$$

Planckse straling (Hohlraumstrahlung, Black Body Radiation).

Benaderingen: als  $h\nu/kT \gg 1$  (zon: röntgen, UV) : Wien

$$B_\nu \approx \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/kT} \quad \text{(III, 18a)}$$

als  $h\nu/kT \ll 1$  (zon:radio): Rayleigh-Jeans:

$$B_\nu \approx \frac{2\nu^2 kT}{c^2} \quad (\text{III, 18b})$$

Opgave 4:

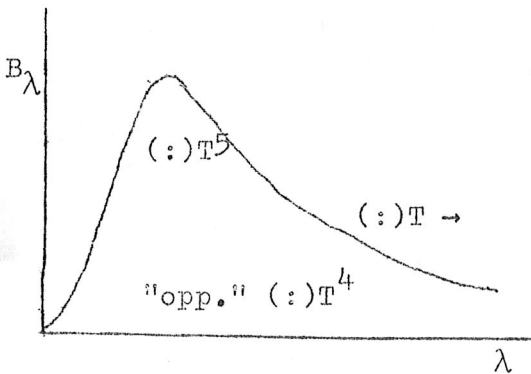
Leid zelf de met (18a) en (18b) corresponderende benaderingen van  $B_\lambda$  af.

De geïntegreerde Planck functie is de Wet van Stefan en Boltzmann:

$$B \equiv \int_0^\infty B_\nu d\nu \equiv \int_0^\infty B_\lambda d\lambda = \frac{\sigma}{\pi} T^4 \quad (\text{III, 19})$$

(  $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2}$  ) .

Planck functie neemt bij alle golflengten toe met T, het sterkst aan de zijde van kleine  $\lambda$  (grote  $\nu$ ), zie figuur.



Gedetailleerd evenwicht: in TE wordt ieder microscopisch proces precies in evenwicht gehouden door inverse proces.

TE fysisch benaderd:

- 1) isotherm doosje met klein gaatje (onverschillig wanden en vulling: er komt  $B_\nu(T)$  uit).
- 2) inwendigen van sterren - stralingsveld ingesloten, isotroop.

2. Lokaal thermodynamisch evenwicht (LTE).

Steratmosferen naar één zijde open: daar kan dus geen TE heersen. In veel gevallen blijkt men gebruik te kunnen maken van een wat algemener type evenwicht: LTE.

Medium: alle evenwichten en bezettingen volgens wetten bij TE genoemd, de in te vullen temperatuur is echter strikt lokaal, hangt af van plaats in medium. Ook van de bronfunctie geldt weer

$S_\nu = B_\nu(T)$  : Planck functie bij lokale temperatuur.

Stralingsveld: niet lokaal bepaald; uit gebieden van verschillende T afkomstig. In het algemeen niet isotroop  $I_\nu \neq J_\nu$ , bovendien  $J_\nu \neq B_\nu$ . Stralingsveld dus niet met één lokale temperatuur te beschrijven.

Voor sommige processen/omstandigheden is LTE een zeer goede benadering: voor sommige continue extinctie/emissie processen; zeer diep in atmosfeer. LTE onhoudbaar in zeer ijle atmosferen en in sterke absorptielijnen.

3. "NLTE".

Als LTE niet geldt, dan moeten alle relevante microscopische processen bekeken worden, die de bezettingen van energieniveaus en de emissie en extinctie van straling regelen. Principe: statistisch evenwicht; per tijdseenheid is het aantal van alle processen die een bepaald energieniveau bevolken gelijk aan het aantal van alle processen die dat energieniveau ontvolken, zodat de gemiddelde bezetting van het energieniveau gelijk blijft.

Wel kan men aantonen dat ook in ijle gassen in de astrofysica de kinetische snelheden van de elektronen (en doorgaans ook van atomen .....) aan de Maxwell-verdeling blijven voldoen → gedefinieerd blijft de lokale (kinetische) elektronentemperatuur  $T_e$ .

De bezettingen van de energieniveaus en de ionisatie-evenwichten worden niet meer door één lokale temperatuur bepaald. De bron-functie hangt van medium, van stralingsveld en van frequentie af. Op NLTE en statistisch evenwicht komen wij terug in III.2.3.2.

4. Zuivere verstrooiing

Wij bekijken nu een medium waarin uitsluitend verstrooiing en geen absorptie optreedt. Alle straling die in een volume element uit een bundel verdwijnt door extinctie moet datzelfde volume weer door "emissie" in andere richtingen verlaten. Toepassing op een plat "doosje"  $dO ds$  (zie fig. op blz. III, 8):

$$\underbrace{\int_{4\pi} \rho \sigma_{\nu} I_{\nu}(\vartheta) dO \cos \vartheta \cdot \frac{ds}{\cos \theta} \cdot d\omega}_{\text{extinctie van straling die uit alle richtingen opvalt, per tijdseenheid per Herz}} = \underbrace{\int_{4\pi} \rho j_{\nu} dO ds d\omega}_{\text{door verstrooiing in alle richtingen geëmitteerde straling, per tijdseenheid en per Herz}} = 4\pi j_{\nu} \rho dO ds$$

Bij overgang  $2e \rightarrow 3e$  lid aangenomen: verstrooiing isotroop.

$$\rightarrow j_{\nu} = \sigma_{\nu} \cdot \frac{1}{4\pi} \int I_{\nu}(\vartheta) d\omega \equiv \sigma_{\nu} J_{\nu} \rightarrow S_{\nu} \equiv \frac{j_{\nu}}{\sigma_{\nu}} \equiv J_{\nu} \quad (\text{III, 20})$$

Dus: bij zuivere verstrooiing hangt  $S_{\nu}$  uitsluitend van het gemiddelde stralingsveld af en in het geheel niet van het medium. Daarentegen: bij LTE:  $S_{\nu} = B_{\nu}(T)$ : bronfunctie hangt uitsluitend van lokale temperatuur van medium doch in het geheel niet van het stralingsveld af.

5. Verschillende extinctie/emissie processen door elkaar

Meestal ontstaan extinctie en emissie door een aantal processen  $i$ , ieder met een eigen extinctie coëfficiënt  $k_{\nu,i}$  en een eigen

emissiecoëfficiënt  $j_{\nu,i}$ . Uiteraard vindt men de totale extinctiecoëfficiënt  $k_{\nu}$  door optelling van de afzonderlijke coëfficiënten:

$$k_{\nu} = \sum_i k_{\nu,i}$$

Analoog: de totale emissiecoëfficiënt:  $j_{\nu} = \sum_i j_{\nu,i}$

Gevolg: bronfunctie van alle processen:

$$S_{\nu} \equiv \frac{j_{\nu}}{k_{\nu}} = \frac{\sum_i j_{\nu,i}}{k_{\nu}} = \frac{\sum_i n_{\nu,i} S_{\nu,i}}{k_{\nu}} \quad (III,21)$$

de bronfunctie is gelijk aan het met extinctiecoëfficiënten gewogen gemiddelde van alle bronfuncties.

Toepassing: mengvorm zuivere absorptie en zuivere verstrooiing

(isotroop):  $k_{\nu} = \kappa_{\nu} + \sigma_{\nu}$ , en

$$S_{\nu} = \frac{\kappa_{\nu}}{\kappa_{\nu} + \sigma_{\nu}} B_{\nu}(T) + \frac{\sigma_{\nu}}{\kappa_{\nu} + \sigma_{\nu}} J_{\nu} \quad (III,21a)$$

Vragen: Hoe is de bronfunctie voor een aantal zuivere LTE processen? Hoe voor een aantal zuivere verstrooiingsprocessen (isotroop)?

6. Vergelijkingen die het medium beschrijven

Herhaling, te vinden in Struktuur der Materie I en Hoofdstuk I Inleiding van dit college.

In ster-atmosferen geldt ideale-gas wet:

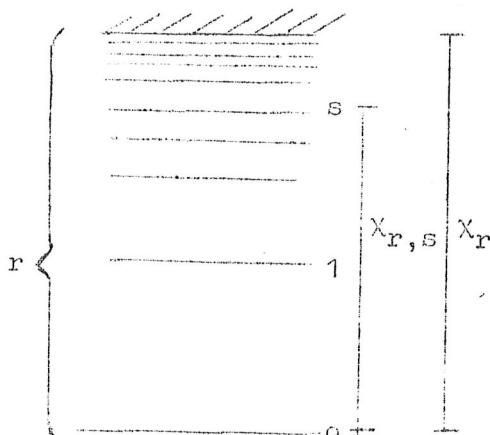
partiële druk van deeltjes type  $i$   $P_i = N_i kT$  (III,22a)

bijv. elektronendruk:  $P_e = N_e kT$  ( $T =$  elektronentemperatuur, zie 3 hierboven).

Totale gasdruk  $P_g = \sum_i P_i = \sum_i N_i kT$  (III,22b)

Maxwellse snelheidsverdeling voor deeltjes van type  $i$ , met massa  $m_i$  met snelheden tussen  $v$  en  $v + dv$ , per volume eenheid:

$$N_i(v) dv = N_i \cdot 4\pi v^2 \left( \frac{m_i}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{1}{2} m_i v^2 / (kT)} \quad (III,23)$$



Onderstaande wetten gelden alleen bij (L)TE:

$r^{de}$  trap van ionisatie ( $r = 0$  : atoom enz. ...) en  $s^{de}$  energieniveau ( $s = 0$  : grondniveau).

Boltzmann:

$$\frac{n_{r,s}}{n_{s,0}} = \frac{g_{r,s}}{g_{s,0}} e^{-X_{r,s}/(k,T)} \quad (III,24a)$$

Voer in:  $N_r \equiv \sum_s n_{r,s}$  en toestand-  
som of partitiefunctie (= toestandsom)

$$U_r \equiv \sum_s g_{r,s} e^{-\chi_{r,s}/(kT)} \quad (III, 25)$$

$$(III, 24a) \rightarrow \frac{n_{r,s}}{N_r} = \frac{g_{r,s}}{U_r} \cdot e^{-\chi_{r,s}/(k,T)} \quad (III, 24b)$$

$$\text{Saha: } \frac{n_{r+1,o} \cdot N_e}{n_{r,o}} = \left( \frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} \cdot \frac{2 \cdot g_{r+1,o}}{g_{r,o}} e^{-\chi_r/(kT)}, \quad (III, 26a)$$

$$\text{met (III, 25)} \rightarrow \frac{N_{r+1} \cdot N_e}{N_r} = \left( \frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} \cdot \frac{2 \cdot U_{r+1}}{U_r} \cdot e^{-\chi_r/(kT)} \quad (III, 26b)$$

Vraag: Vaak schrijft men  $\frac{N_{r+1} \cdot P_e}{N_r} = \dots$ , vul rechterlid aan.

III.2.1.4 Overzicht van de belangrijkste extinctie- en emissieprocessen in de astrofysica

A: Verstrooiingsprocessen

		$\lambda$ -afh.	voorbeelden
A1	Thomsonverstrooiing, aan vrije electronen	$\lambda^0$ (wit)	in <u>hete</u> sterren
A2	Rayleighverstrooiing, aan atomen en moleculen	$\lambda^{-4}$	koelere sterren; planeet atmosferen (blauwe hemel)
A3	Stof, druppeltjes	$d \ll \lambda$ $d \approx \lambda$ $d \gg \lambda$	} witachtig hemel- schijnsel om zon (z.g. aurcool)
		$\lambda^{-4}$	
		$\lambda^0$	



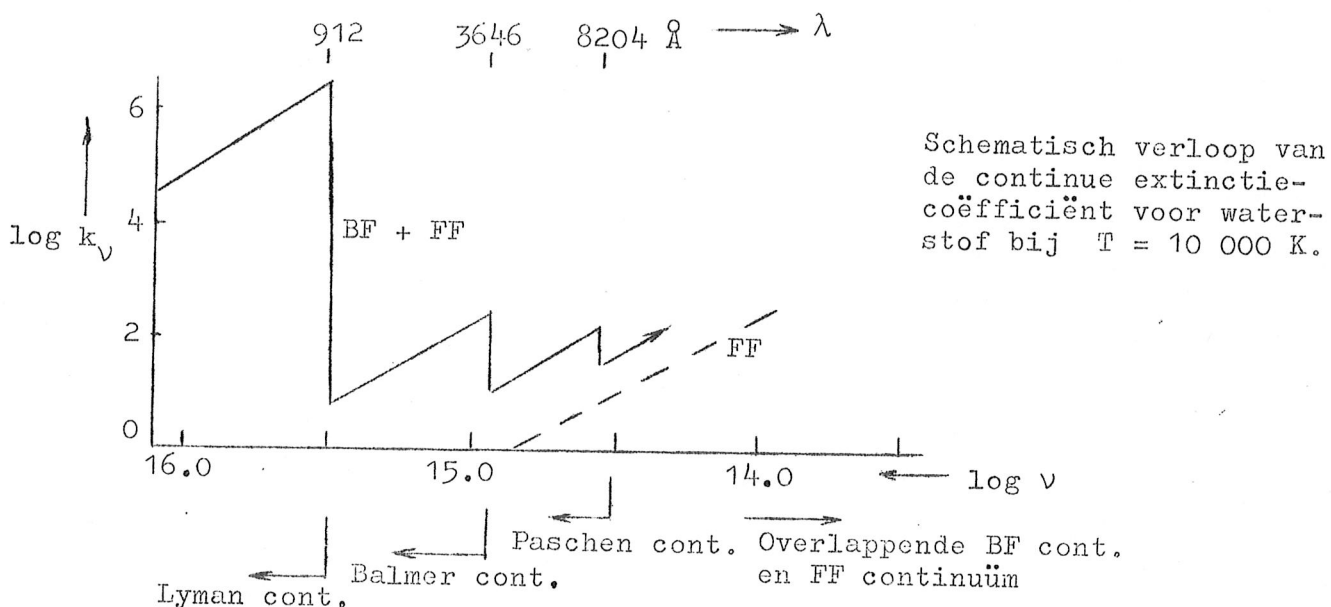


B Fotonvangst en fotoncreatie

	extinctieproces	emissieproces	globaal karakter
B1	Lijnextinctie = foto-excitatie bound - bound abs.	B <sub>1</sub> ' lijnemissie = foto-deëxcitatie b... b, emissie	resonantielijnen: NLTE (verstrooiing) tussen hoge energieniveaus ~ LTE
B2	Foto-ionisatie bound-free absorptie Seriegrons continua $\nu > \nu_0$	B <sub>2</sub> ' foto-recombinatie  of $\lambda < \lambda_0$ (H, He, H <sup>-</sup> , "metalen")	LTE: NLTE: (Lyman continuum) H <sup>-</sup>
B3	Vrij-vrij absorptie free-free  $0 < \nu < \infty$	B <sub>3</sub> ' remstraling vrij-vrij emissie  (H, He, H <sup>-</sup> )	LTE omdat snelheidsverdeling van elektronen aan Maxwell vergelijkend voldoet; $S_\nu = B_\nu(T_e)$
B4	Fotodissociatie van moleculen  $\nu > \nu_0$	B <sub>4</sub> ' foto-recombinatie	(LTE)

Continue extinctie door waterstof

Aangezien verreweg de meeste steratmosferen grotendeels uit waterstof bestaan levert waterstof een belangrijke bijdrage tot de continue extinctiecoëfficiënt.



Ook bij hoge temperaturen bevindt zich veel meer neutrale waterstof in de grondtoestand  $n = 1$  dan in de eerste aangeslagen toestand  $n = 2$ , enz., blijkt uit Wet van Boltzmann:

$$\begin{aligned}
 \text{(III, 24a)} \quad \frac{n_n}{n_1} &= \frac{g_n}{g_1} e^{-(E'_1 - E'_n)/(kT)} = \\
 &= \frac{g_n}{g_1} 10^{-(E'_1 - E'_n) \cdot \frac{5040}{T}} \quad \text{(III, 24c)}
 \end{aligned}$$

met  $E'$  = energie in eV. Bij waterstof:  $g_n = 2n^2$  en  $E'_n = -13,60 / n^2$  eV.

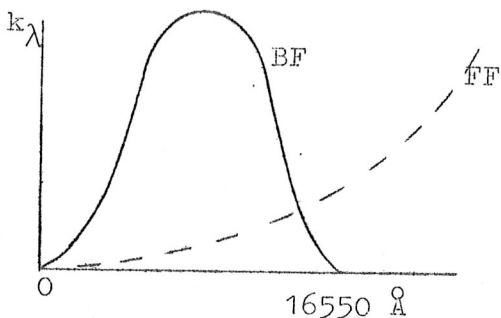
Bij  $T \approx 5000\ K$  bevindt zich een zeer kleine fractie in aangeslagen toestanden:  $n_1 \gg n_2 \gg n_3 \gg n_4$ .

Vraag: Welke waterstofcontinua blijven ook bij  $T \approx 5000\ K$  belangrijk?

Opgave 4: Schat  $n_3/n_1$  en  $n_2/n_1$  voor  $T = 5040\ K$  (~ zon)

Voor sterren met  $T < 6000\ K$  wordt het "gat" in de H extinctie in het optische en nabije infrarode gebied opgevuld door extinctie door het negatieve waterstof-ion. Het H atoom kan een tweede elektron zwakjes binden met een bindingsenergie van slechts  $0,75\ eV$ . Dit geeft een bf-continuüm met een "seriegrens" bij  $\lambda = 16\ 500\ \text{Å}$  van een bijzonder karakter (zie fig.).

$$[eV] = \frac{12345}{[\text{Å}]}$$



Naast de b.f. extinctie coëfficiënt bestaat er ook een f.f. extinctie door het H<sup>-</sup> ion (dus door overgangen tussen open banen van vrije electronen om het H atoom). Bij het H<sup>-</sup> ion zijn geen gebonden-gebonden overgangen geconstateerd.

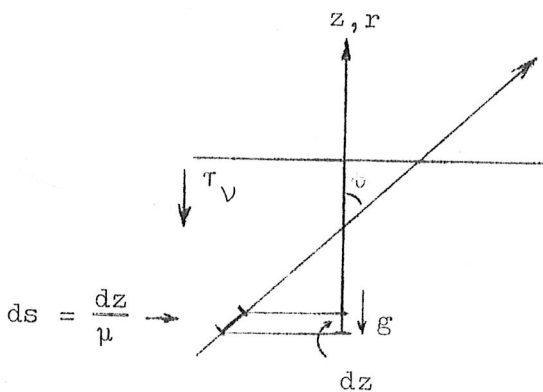
Opmerking: Voor een isotherme laag in LTE geldt:

(III,16a) →  $I_ν = B_ν(T) (1 - e^{-τ_ν})$ , dus in optisch dikke geval  $τ_ν \gg 1$ :  $I_ν = B_ν(T)$ : een isotherme gaslaag in LTE straalt als een zwart lichaam voor alle ν waarbij  $τ_ν \gg 1$ .

III.2.2. Modelatmosferen

Een modelatmosfeer is een tabel van parameters, T, P<sub>g</sub>, ----- als functie van de diepte, die de opbouw van de atmosfeer beschrijven. Theoretische en empirische modellen.

III.2.2.1. Vlakke lagen, relaties en benaderingen



Onbegrensde atmosfeer, vlakke homogene lagen, eigenschappen materiële medium en bronfunctie S<sub>ν</sub> variëren alleen met z, stralingsveld I<sub>ν</sub>(z,ϑ). Vlakke benadering, omdat meeste steratmosferen heel dun zijn vergeleken met straal (Zon: 500 km, t.o.v. R = 700 000 km).

Volgens bekende afspraken:

$$dτ_ν = -k_ν ρ dz ; τ_ν (z = "∞") = 0$$

en

$$τ_ν(z) = \int_∞^z -k_ν ρ dz = \int_z^∞ k_ν ρ dz \tag{III, 27}$$

Transportvergelijking:

$$μ \frac{d I_ν (τ_ν, μ)}{d τ_ν} = I_ν (τ_ν, μ) - S_ν (τ_ν) \tag{III,28 = 14}$$

(Tekens in rechterlid t.g.v. tekenafpraak τ<sub>ν</sub>)

Transportvergelijking in andere vorm te gieten: integreer beide leden

van (III, 28) over hele ruimtehoek  $4\pi$  .  $\int_{4\pi} \dots \frac{d\omega}{4\pi} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \dots d\mu$  ,  
 en bedenkt dat integratie over  $\mu$  en differentiatie naar  $\tau_V$  mogen worden omgewisseld, en dat  $S_V$  isotroop is aangenomen  $\rightarrow$

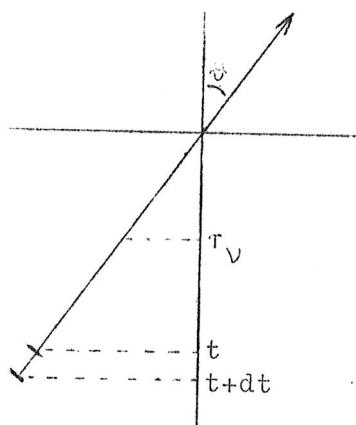
$$\frac{1}{4} \frac{d F_V(\tau_V)}{d \tau} = J_V(\tau_V) - S_V(\tau_V) \quad (III, 29)$$

Wij zoeken het verband tussen  $I_V(\tau_V, \mu)$  en  $S_V(\tau_V)$  , m.a.w. : wij lossen (III,28) op. (vergel. § III.2.1.2.) Weg-elementje  $ds = dz/\mu$  langs richting  $\vartheta$  draagt tot intensiteit bij

$$j_V \rho \frac{dz}{\mu} = S_V \frac{k_V \rho dz}{\mu} = S_V \frac{d\tau_V}{\mu} . \text{ Oplossing voor } 0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}$$

of  $1 \geq \mu > 0$  :

$$I_V^+(\tau_V, \mu) = \int_{\tau_V}^{\infty} S_V(t) \frac{dt}{\mu} \cdot e^{-\frac{(t-\tau_V)}{\mu}}$$



bijdrage  $(t, t+dt)$  , verzwaakt over optische lengte  $(t-\tau_V)/\mu$

dus

$$I_V^+(\tau_V, \mu) = \int_{\tau_V}^{\infty} S_V(t_V) e^{-\frac{(t_V-\tau_V)}{\mu}} \frac{dt_V}{\mu} \quad (III, 30a)$$

Uittredend uit ster"oppervlak"

$$I_V^+(0, \mu) = \int_0^{\infty} S_V(t_V) e^{-\frac{t_V}{\mu}} \frac{dt_V}{\mu} \quad (III, 30b)$$

Oplossing voor  $\frac{\pi}{2} < \vartheta \leq \pi$  of  $0 > \mu \geq -1$  : wanneer geen straling invalt op bovenkant atmosfeer (geen dubbelster), dan is

$$I_V^-(0, \mu) \equiv 0$$

en

$$I_V^-(\tau_V, \mu) = \int_0^{\tau_V} S_V(t) e^{-\frac{(\tau_V-t)}{\mu}} \frac{dt}{\mu} \quad (III, 31)$$

ga na!

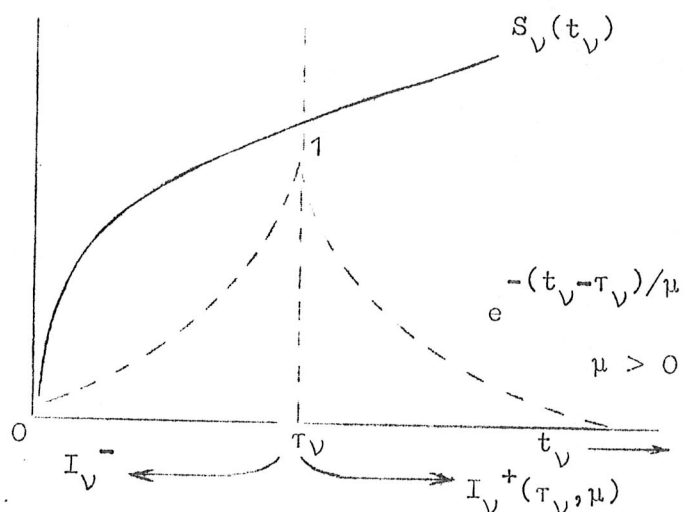
Opgave 5:  $I_V(\tau_V, \mu=0) = \dots ?$

Uit (III,30) en (III,31) blijkt dat  $I_V(\tau, \mu)$  bepaald wordt door de bronfunctie in het naburige "achterliggende" gebied: zie figuur hieronder.

$J_V(\tau_V)$  en  $F_V(\tau_V)$  kunnen uit  $I_V(\tau_V, \mu)$  volgens (III,30 en 31) worden afgeleid uit de definities (III,6 en 7), wij schrijven die uitdrukkingen niet op. Duidelijk is dat  $I_V, J_V, F_V$  alle bepaald worden

door  $S_V(t)$  in de "omgeving"; afstanden  $t - \tau_V \gtrsim 3$  spelen vrijwel geen rol meer.

De formele oplossingen, d.w.z. de relaties die  $I_V(\tau_V, \mu)$ ,  $J_V(\tau_V)$  en  $F_V(\tau_V)$  uitdrukken in de bronfunctie  $S_V(t_V)$  laten zien dat het stralingsveld in de atmosfeer en het spectrum  $I_V(0, \mu)$  of  $F_V(0)$  geheel bekend zijn indien



$S_V(t_V)$  bekend is.  $\rightarrow$

- $\rightarrow$  eerste mogelijkheid:  $S_V(t_V)$  theoretisch berekenen, daaruit het spectrum  $I_V(0, \mu)$  of  $F_V(0)$  berekenen en met waarnemingen vergelijken (methode van theoretische model-atmosferen).
- $\rightarrow$  tweede mogelijkheid: uit het waargenomen spectrum  $I_V(0, \mu)$  of  $F_V(0)$   $S_V(t_V)$  afleiden (methode van empirische model-atmosferen).

Wij zullen beide mogelijkheden onderzoeken, doch eerst leiden wij enkele globale betrekkingen tussen  $I_V$ ,  $J_V$ ,  $F_V$  en  $S_V$  af voor  $\tau_V = 0$  en voor  $\tau_V \gg 1$

Bij  $\tau_V = 0$  : nodig:  $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!$  (III, 32)

Ontwikkel  $S_V(t)$  als een machtreeks:

$$S_V(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots \quad (III, 33)$$

( $t$ : lopend,  $\tau_V$  schaal).

Substitutie van (III, 33) in (III, 30b) geeft, met (III, 32):

$$I_V^+(0, \mu) = a_0 + a_1 \mu + 2! a_2 \mu^2 + 3! a_3 \mu^3 + \dots + \mu^n a_n n! \quad (III, 34a)$$

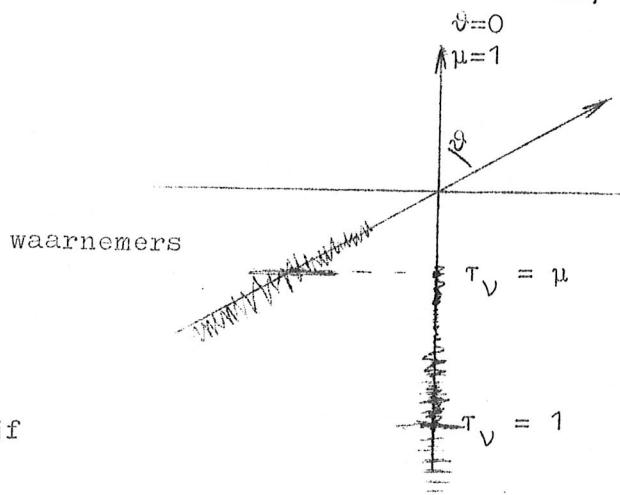
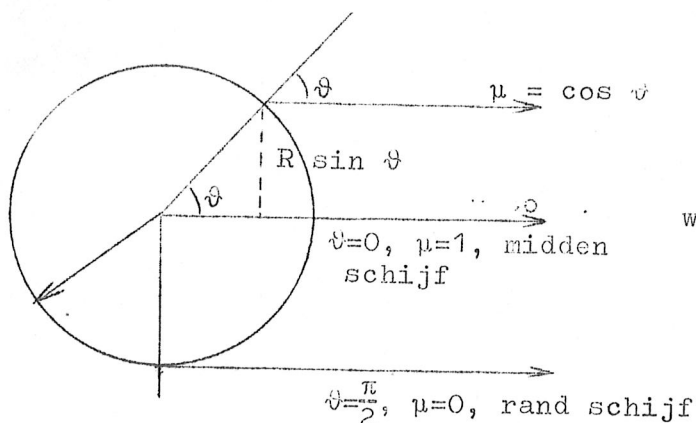
ga na.

$$(III, 33 + 34a) \rightarrow I_V^+(0, \mu) \approx S_V(\tau_V = \mu), \quad (III, 34b)$$

de benadering van Eddington-Barbier; geldt exact voor lineaire

$$S_V(t) = a_0 + a_1 t.$$

Vraag: Wat levert (III, 34a) voor  $I_V(0, \mu)$  bij een constante bronfunctie? Waar zijn wij dat eerder tegengekomen?

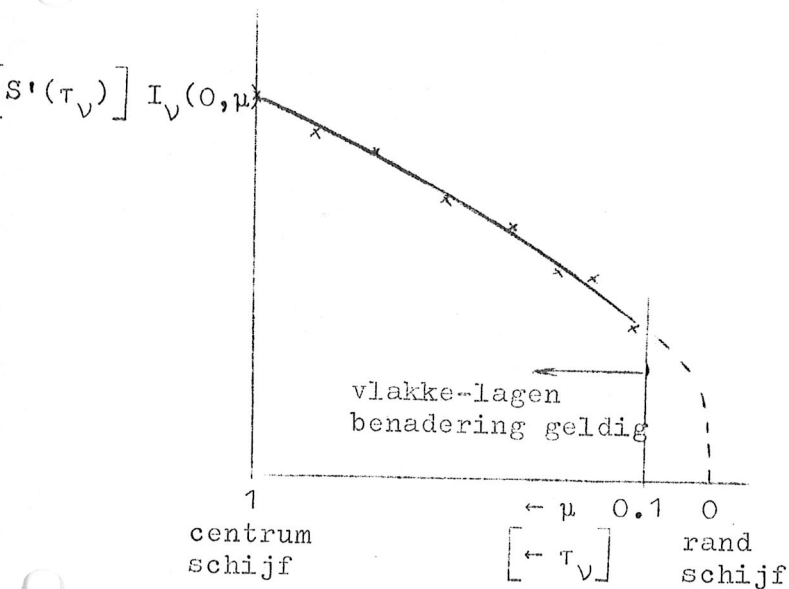


Centrum-randverloop  $I_\lambda(0, \mu)$  van  $\mu = 1 \rightarrow \mu = 0.1$  bij zon tekent verloop  $S_\nu(\tau_\nu)$  met hoogte uit van  $\tau_\nu = 1 \rightarrow \tau_\nu \approx 0.1$ : bronfunctie neemt naar buiten af.

$\rightarrow$  empirische modelatmosfeer voor zon (zie volgende paragraaf III.2.2.2).

Ook bij niet-lineaire  $S_\nu(\tau_\nu)$  geldt: dichter bij de zonsrand is de straling uit hogere lagen afkomstig. Substitutie van (III,34a) en van  $I_\nu^-(0, \mu) \equiv 0$  in (III,7) levert (ga na!):

$$F_\nu(0) = F_\nu^+(0) = a_0 + \frac{2}{3} a_1 + a_2 + \dots \quad (\text{III, 35a})$$



of:

$$F_\nu(0) \approx S_\nu(\tau_\nu = \frac{2}{3}), \quad (\text{III, 35b})$$

(exakt bij lineaire  $S_\nu$ ): de uit waarnemingen af te leiden flux  $F_\nu(0)$  is vrijwel gelijk aan de bronfunctie bij  $\tau_\nu = \frac{2}{3}$ .

Opdracht 6: Leidt af:  $J_\nu(0) = \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{4} a_1 + \frac{1}{3} a_2 + \dots \quad (\text{III, 36a})$

$$\approx \frac{1}{2} S_\nu(\tau_\nu = \frac{1}{2}), \text{ wanneer exakt?} \quad (\text{III, 36b})$$

↑  
verklaar deze z.g. stralingsverdunningsfaktor.

Uit (III,35a + 36a) volgt de z.g. Eddingtonbenadering

$$F_\nu(0) \approx 2 J_\nu(0) \quad (\text{III, 37})$$

Vraag: Geldt (III,37) exakt bij een lineaire  $S_\nu$ ?

Bij  $\tau_V \gg 1$  : Na nogal wat gereken vindt men uit de reeks ontwikkeling:

$$S_V(t) = S_V(t) + (t-\tau_V) \left( \frac{d S_V(t)}{dt} \right)_{\tau_V} + \frac{(t-\tau_V)^2}{2!} \left( \frac{d^2 S_V(t)}{dt^2} \right)_{\tau_V} + \dots$$

en uit (III,30a en 31) volgt voor alle  $\mu$  (mededeling zonder afleiding):

$$I_V(\tau_V, \mu) \approx S_V(\tau_V) + \mu \frac{d S_V(\tau_V)}{d\tau_V} + \mu^2 \frac{d^2 S_V(\tau_V)}{d\tau_V^2} + \dots \quad (\text{III,38})$$

Ga zelf na dat hieruit de relaties volgen:

$$(\text{III,6}) \rightarrow J_V(\tau_V) = S_V(\tau_V) + 0 + \frac{1}{3} \frac{d^2 S_V(\tau_V)}{d\tau_V^2} \quad (\text{III,39a})$$

of

$$J_V(\tau_V) \approx S_V(\tau_V), \quad \text{exakt voor lineaire } S_V(\tau_V), \quad (\text{III,39b})$$

dus: op grote diepte ( $\tau_V \gg 1$ ) nadert gemiddelde intensiteit  $J_V$  tot bronfunctie  $S_V$ .

$$(\text{III,7a}) \rightarrow F_V(\tau_V) \approx 0 + \frac{4}{3} \frac{d S_V(\tau_V)}{d\tau_V} + 0 + \dots; \quad (\text{III,40})$$

de bronfunctie moet met de diepte toenemen opdat er een stralingsflux naar buiten kan lopen. Op grote diepte is LTE een goede benadering  $\rightarrow$  de Planck functie  $B_V [T(\tau_V)]$  moet met de diepte toenemen  $\rightarrow$  temperatuur moet met de diepte toenemen. Aanschouwelijk duidelijk: thermische energie stroomt van hogere naar een lagere temperatuur, onverschillig of dit door geleiding, convectie of straling gebeurt.

### III.2.2.2. De zonne-atmosfeer: structuur, spektra en empirisch model. Fotosfeer, chromosfeer, corona.

In het zichtbare continuüm ("wit licht") wordt de zon gezien als een schijf met een straal van 700 000 km en met een verrassend scherpe rand. De helderheid neemt naar de rand af (randverzwakking). De laag waar het witte licht vandaan komt heet fotosfeer. Rand waar tangentiële weglengte  $\tau_t = 1$  is ligt bij optische diepte  $\tau_{\lambda=5000} = 0.003$  (vergelijk § III.2.1.1. eind). Spektrum van fotosfeer in nabij UV - zichtbaar - IR : continuüm met absorptielijnen (z.g. Fraunhofer lijnen).

Buiten de fotosfeer strekt zich de chromosfeer uit,  $\lesssim 10\,000$  km dik. Het continuüm in nabij UV - zichtbaar - IR is zwak t gevolg van feit dat chromosfeer in "wit" licht optisch zeer dun is. Op dit continuüm zijn heldere emissielijnen gesuperponeerd. Het spektrum van de lage chromosfeer (tot ongeveer 500 km) lijkt sterk op een "gespiegeld"



Fraunhofer spektrum; in de hoge chromosfeer blijven alleen enkele sterke emissielijnen over: vooral de Balmerlijnen van waterstof - vandaar purperrode kleur - vandaar naam: chromosfeer.

Om chromosfeer: de corona, een zilvergrijze stralenkrans, veranderlijk van vorm en afmetingen. In het zichtbare spektrale gebied is het continuüm uiterst zwak - alleen goed zichtbaar tijdens totale zonsverduisteringen; daarop zijn "verboden" emissielijnen gesuperponeerd van sterk geïoniseerde elementen ( $[Fe X]$  ...  $[Fe XIV]$ ;  $Ca XV$ ). Spektrum in röntgengebied: emissielijnen van sterk geïoniseerde elementen, in radiogebied met  $\lambda > 1$  cm: continuümstraling met constante, langzaam en snel veranderlijke componenten. Zowel de "röntgenzon" als de "radiozon" zijn veranderlijk van vorm en altijd uitgestrekter dan de "optische zon".

(Behalve in deze paragraaf wordt de zon verder besproken in III.2.2.7 en in III.4).

#### Afleiding van een empirische modelatmosfeer

Volgens vorige paragraaf kan uit waargenomen randverloop  $I_V(0, \mu) = f_V(\mu) S_V(\tau_V)$  worden afgeleid, bijv. door in (III, 34a):  $I_V^+(0, \mu) = a_0 + a_1 \mu + 2a_2 \mu^2$  de coëfficiënten  $a_0$ ,  $a_1$  en  $2a_2$  zo goed mogelijk aan het waargenomen  $I_V(\mu)$  verloop aan te passen. Met deze coëfficiënten is dan meteen de met de diepte verloopende bronfunctie  $S_V(\tau_V) = a_0 + a_1 \tau_V + a_2 \tau_V^2$  (III, 33) gevonden. Beperkingen van methode met vlakke-lagen benadering ( $0.1 < \mu \leq 1.0$ ) veroorzaken dat  $S_V$  alleen redelijk betrouwbaar is voor  $0.05 < \tau_V < 2.0$ .

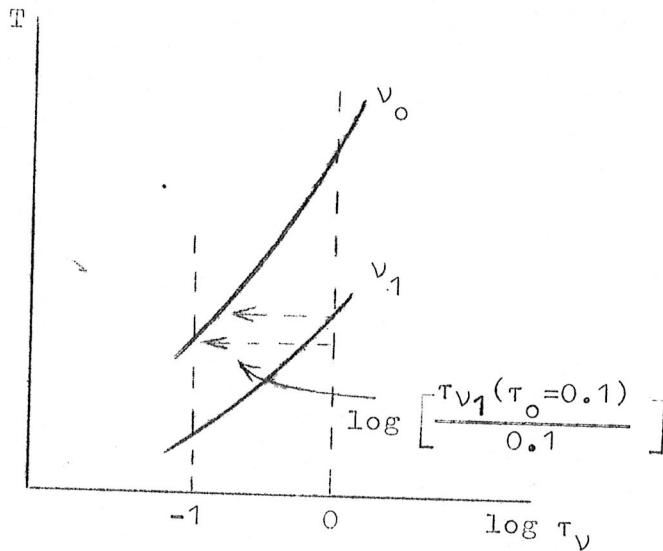
In de zonne-atmosfeer is LTE een heel goede benadering voor het zichtbare en het IR continue spektrum, aangezien daar de extincties door  $H^-$  ionen (bf en ff) en H-atomen (ff) de belangrijkste zijn (zie ook III.2.3.2). Met LTE kan op elke diepte de temperatuur worden bepaald volgens:  $S_V(\tau_V) \equiv B_V(T)$ , de Planck functie  $\rightarrow T(\tau_V)$  !

Aangezien de continue extinctiecoëfficiënt  $k_V$  varieert met  $\nu$  is het zinvol om bij een flink aantal  $\nu$ 's het randverloop  $I_V(0, \mu)$  te meten en om te zetten in  $T(\tau_V)$  betrekkingen, want dit geeft:

- 1) T over groter dieptebereik, met
- 2) een grotere nauwkeurigheid.

De coëfficiënten  $a_0$ ,  $a_1$  en  $a_2$  hangen van  $\nu$  af. Herleid alle monochromatische optische diepten  $\tau_V$  op één standaard optische diepte  $\tau_0$  (vaak neemt men: bij  $\nu_0$  corresponderend met  $\lambda_0 = 5000 \text{ \AA}$  in het groen), gebruik makend van

$$d\tau_V = -k_V \rho dz \rightarrow d\tau_V = \frac{k_V}{k_0} d\tau_0 \rightarrow \tau_V(\tau_0) = \int_0^{\tau_0} \frac{k_V(t_0)}{k_0(t_0)} dt_0 \quad (\text{III, 41})$$



De corresponderende verschuivingen in de  $(T, \log \tau_\nu)$ -grafiek laten op de overlappende stukken meteen zien of de in (III,41) aangenomen extinctiecoëfficiënt op de juiste manier van  $\nu$  afhangt. Daarbij is gebleken dat in het zichtbare en infrarode zonnenspectrum het negatieve  $H^-$ -ion inderdaad de belangrijkste oorzaak van extinctie (absorptie) is.

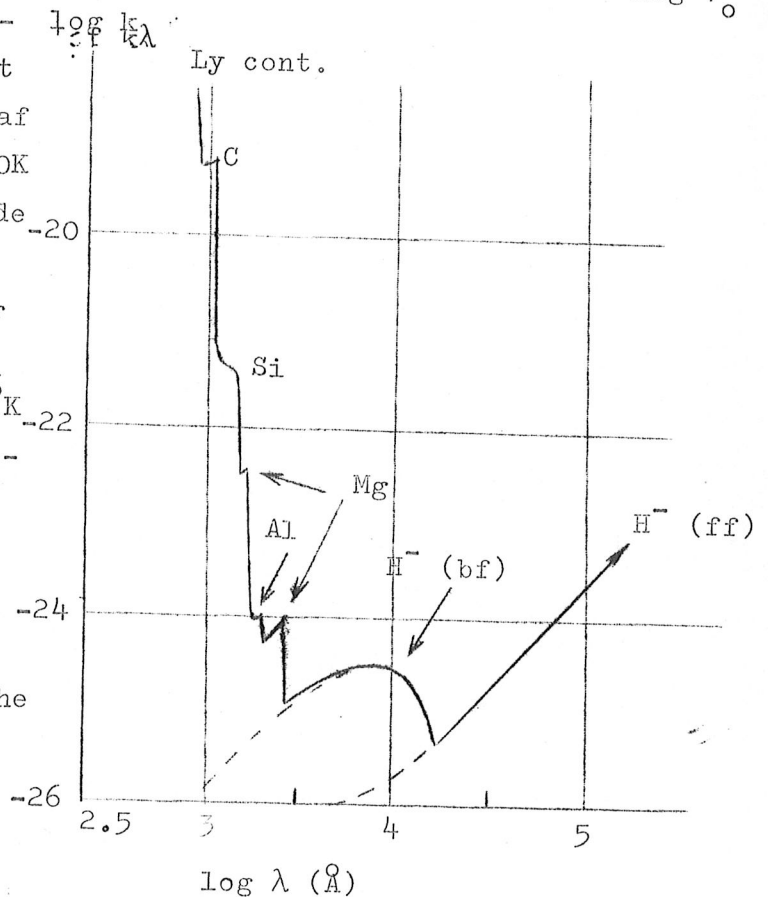
In sommige spectrale gebieden (ver UV, radio) kan men de randverzwakking niet gedetailleerd waarnemen. Kan men "midden schijf" nog wel waarnemen, dan heeft men

$$I_\nu(0, \mu) \approx B_\nu [ T(\tau_\nu = 1) ] \quad (\text{uit (III, 34b)})$$

Kan men alleen de totale flux waarnemen, dan geldt:

$$F_\nu(0) \approx B_\nu [ T(\tau_\nu = \frac{2}{3}) ] \quad (\text{uit (III, 35b)})$$

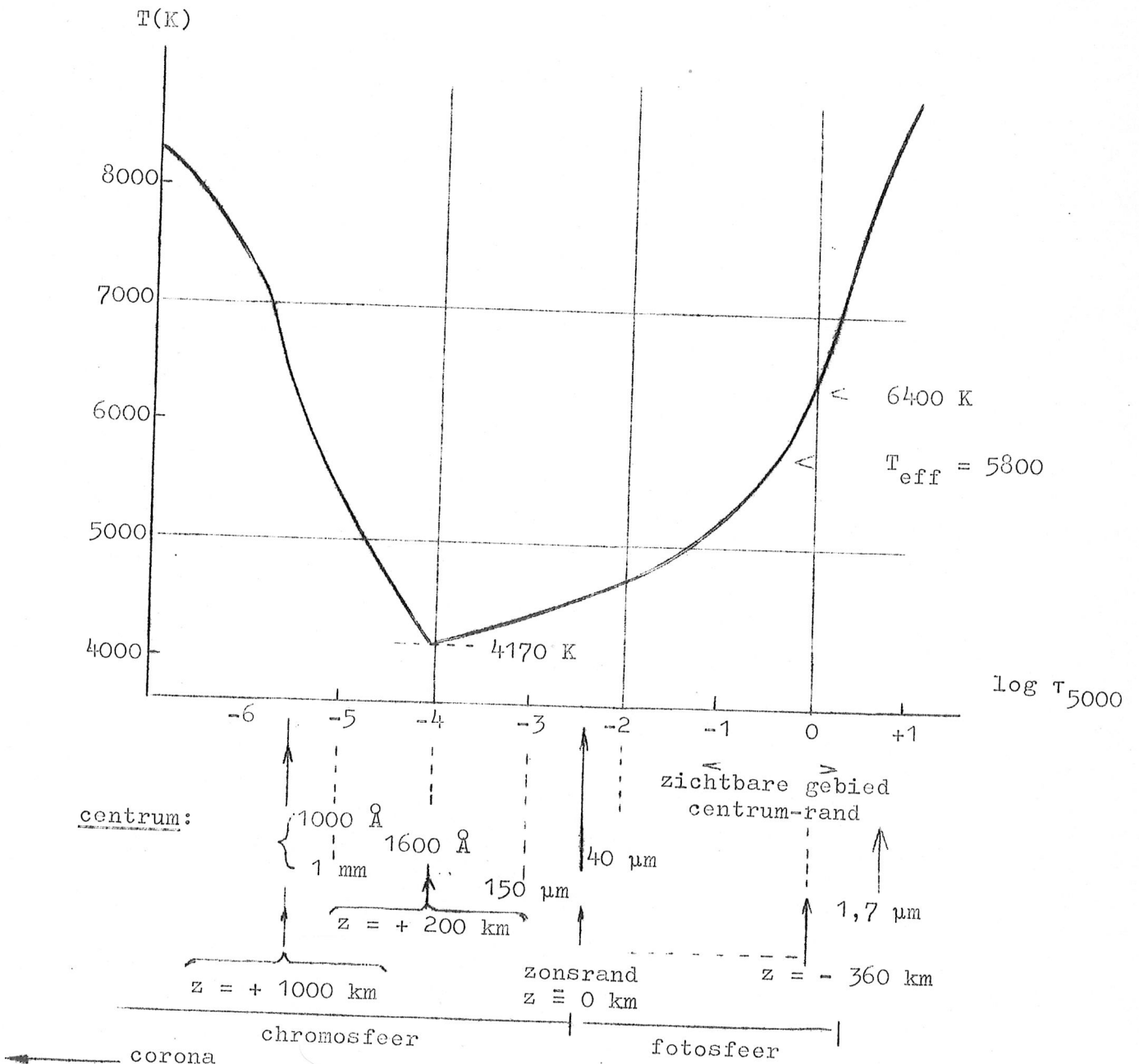
Past men alle recente gegevens aan elkaar dan ontstaat de  $T - \log \tau_0$  grafiek op de volgende bladzijde. In de fotosfeer neemt de temperatuur naar buiten af tot een minimum van ca. 4200K in de lage chromosfeer. In de hoge chromosfeer neemt de temperatuur naar buiten weer toe, in de corona wordt een temperatuur van  $1 \text{ à } 2 \times 10^6 \text{ K}$  bereikt. In III.2.2.5 bespreken wij hoe bij  $T(\tau_0)$  gevonden kan worden de gasdruk  $P_g(\tau_0)$  en de geometrische hoogte  $z(\tau_0)$ . In III.2.2.7 gaan wij in op de theoretische verklaring van het gevonden temperatuurverloop.



Onder de  $T - \log \tau$  grafiek op de volgende bladzijde is schematisch aangegeven uit

welke golflengtegebieden de informatie afkomstig is. Dit volgt uit het verloop van de continue extinctie coëfficiënt in het zonnegas, waarvan een grafiek op blz. 26 (geeft  $\log k_\lambda$  [cm<sup>2</sup> per gemiddelde kern] voor  $\tau_{5000} = 0.08$  met  $T = 5040$  K,  $P_g = 4 \times 10^4$  dyne cm<sup>-2</sup>). Geef U rekenschap van grote trekken met behulp van III.2.1.4 : hoge bf-absorptiekanten in UV (elementen bijgeschreven), H<sup>-</sup>(bf) in zichtbaar en nabij IR, H<sup>-</sup>(ff) flink oplopend naar ver IR.

De informatie van de diepste delen van de fotosfeer ( $T \sim 7000$  K) komt van het centrum van de schijf bij golflengten  $\lambda \approx 17000$  Å en  $\lambda \approx 4000$  Å . In de fotosfeer treffen wij ook de z.g. effectieve tem-



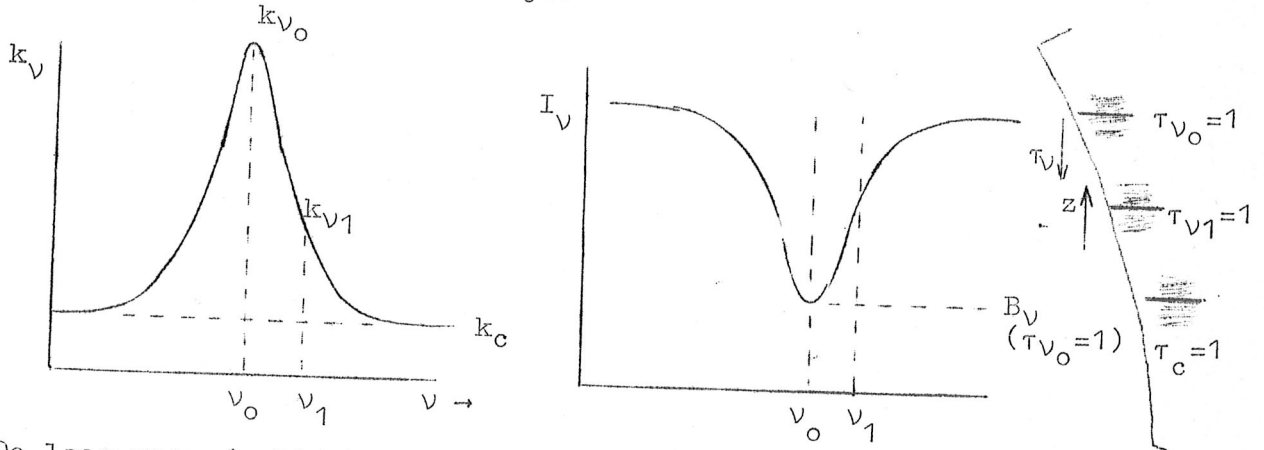
peratuur  $T_{\text{eff}} = 5800 \text{ K}$  aan die uit de z.g. zonneconstante volgt via de totale flux per opp. eenheid  $\pi F = \sigma T_{\text{eff}}^4$  (inleiding I.2.2.2, ga dit nog eens na.)

Gegevens over de lage chromosfeer (op schijf) uit ver infrarood en uit ultraviolet. Temperatuurminimum  $\approx 4200 \text{ K}$  goed zichtbaar bij  $\lambda \approx 1600 \text{ \AA}$  en bij  $\lambda \approx 400 \mu$ . Blijkbaar komt  $\tau_{1600\text{\AA}} = 1$  overeen met  $\tau_{5000\text{\AA}} = 10^{-4}$ : de chromosfeer is in het zichtbare continuüm volkomen doorzichtig.

De zeer hoge temperatuur van de corona van  $1 \text{ à } 2 \times 10^6 \text{ K}$  volgt uit de continuüm intensiteiten in het radiogebied ( $\lambda > 1 \text{ cm}$ ) en uit het röntgengebied. Ook de emissielijnen in het verre UV en het röntgengebied van hoog geïoniseerde elementen en de "verboden" emissielijnen in eclipspektra van de corona bevestigen deze hoge temperaturen.

Verklaring van Fraunhofer lijnen

Het spectrum van de zonneschijf toont absorptielijnen van  $\lambda \approx 2000 \text{ \AA}$  tot ver in het IR. Dit kan ook worden verklaard met het naar buiten afnemen van  $T$  (en bronfunctie) in fotosfeer en lage chromosfeer: voor midden schijf:

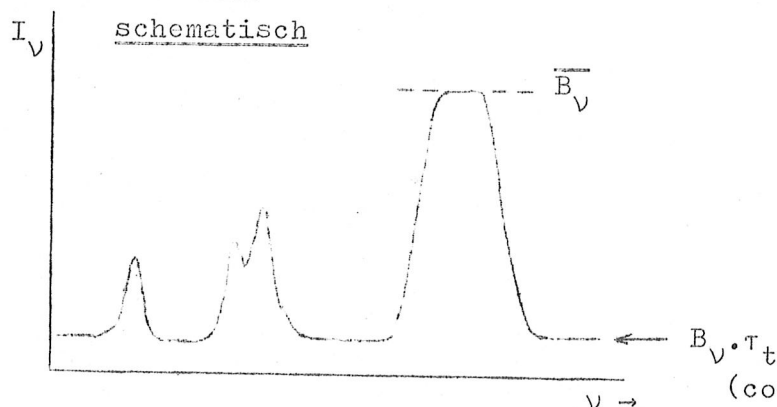


De laag waar de lijnkern wordt gevormd ligt (bij de monochromatische optische diepte  $\tau_{\nu_0} = 1$ ) hoger in de atmosfeer dan de laag waar het continuüm wordt gevormd. Het lijnprofiel tekent het hoogterverloop van de bronfunctie uit.

Omgekeerd: wanneer in een spektrale lijn het verloop van  $k_\nu$  bekend is kan men daaruit empirisch het hoogterverloop van de bronfunctie kwantitatief afleiden (en, indien LTE geldt: daaruit weer het hoogterverloop van  $T$ ).

Opdracht 7 of discussievraag: Verklaar het waarnemingsfeit dat op de schijf voor  $\lambda < 1600 \text{ \AA}$  uitsluitend emissielijnen op het continuüm worden waargenomen. Gegevens: continuüm bij  $\lambda \approx 1600 \text{ \AA}$  wordt in temperatuurminimum gevormd; neem aan dat ook in spektrale lijnen de bronfunctie op Planckfunctie lijkt.

Het flitsspectrum



Zodra tijdens een zonsverduistering de maan de fotosfeer afschermt laat de chromosfeer het "flitsspectrum" zien: een zwak continuüm met daarop emissielijnen. Vergelijk § III.2.1.1:

chromosfeer in continuüm en vele lijnen optisch zeer dun  $\rightarrow I_v = \overline{B}_v \cdot \tau_t$   
 Aangezien in de lijnen  $\tau_t$  groter is dan in continuüm, is  $I_v$  in de lijnen groter. Zeer sterke lijnen zijn optisch dik ( $\tau_t \gg 1$ )  $\rightarrow I_v = \overline{B}_v$

Geen gedetailleerde empirische modellen voor sterren mogelijk, want:

- 1) Geen randverzwakking  $I_v(0, \mu)$  waar te nemen; alleen  $F_v$  beschikbaar;
- 2)  $F_v$  doorgaans alleen bekend over beperkt spectraal gebied.

Voor steratmosferen construeert men theoretische modellen, die men naderhand aan de hand van waarnemingen controleert. In sommige gevallen kunnen de waarnemingscriteria worden verscherpt:

- 1) Bij bedekkingsveranderlijken met een zeer donkere component kan men iets over de randverzwakking te weten komen;
- 2) Uitbreiding van  $F(\nu)$  door waarnemingen in UV (vroeg spektrale typen) en/of in IR (late spektrale typen).

Het feit dat verreweg de meeste sterspektra ook absorptielijnen vertonen wijst er wel op dat ook in een steratmosfeer de temperatuur naar buiten afneemt.

III.2.2.3 Stralingsevenwicht; grijze atmosferen

Een stationnaire atmosfeer moet alle in het sterinwendige vrijgemaakte energie doorgeven en uitstralen in de wereldruimte. Op alle hoogten  $z$  in de atmosfeer loopt dus een constante energiestroom. In beginsel kan deze energiestroom bestaan uit een stralingsflux, een convectieve energiestroom, een mechanische flux (bijv. geluidsgolven), enz.

Dus:

$$\pi F(z) = \pi F_{\text{rad}}(z) + \pi F_{\text{conv}}(z) + F_{\text{mech}}(z) + \dots = \pi F = \text{constant.}$$

Wij nemen voorlopig aan dat de atmosfeer alle energie in de vorm van straling transporteert: de atmosfeer is in stralingsevenwicht (radiative equilibrium). Wij zullen deze stelling naderhand controleren en, waar nodig, corrigeren.

$$\begin{aligned} \pi F(z) &= \pi F_{\text{rad}}(z) = \pi F = \text{constant, of} \\ F(z) &= \int_0^{\infty} F_{\nu}(z) d\nu = F \end{aligned} \quad (\text{III, 42a})$$

of:

$$\frac{dF(z)}{dz} = 0 \quad (\text{III, 42b})$$

De voorwaarde voor stralingsevenwicht is ook anders te schrijven:

Herschrijf (III, 29):  $\frac{1}{4} \frac{dF_{\nu}(z)}{dz} = k_{\nu} \rho S_{\nu}(z) - k_{\nu} \rho J_{\nu}(z)$ , integreer over  $\nu$ , dan volgt uit (III, 42b):

$$\int_0^{\infty} k_{\nu} \rho S_{\nu}(z) d\nu = \int_0^{\infty} k_{\nu} \rho J_{\nu}(z) d\nu; \quad (\text{III, 43})$$

deze uitdrukking is aanschouwelijk duidelijk: linkerlid: emissie per volume eenheid, rechterlid: extinctie per volume eenheid. De dichtheid  $\rho$  kan nog worden uitgedeeld.

De totale flux  $\pi F$  is een fundamentele grootte, die vaak uitgedrukt wordt in de effectieve temperatuur  $T_{\text{eff}}$  volgens

$$\sigma T_{\text{eff}}^4 \equiv \pi \int_0^{\infty} F_{\nu} d\nu \quad (\text{III, 44})$$

aanleunend tegen de Wet van Stefan en Boltzmann (III, 19). Alleen bij de zon is  $T_{\text{eff}}$  direkt te bepalen, vergelijk I.2.2.2. Deze maat onderstelt niet dat het stralingsveld op een Planck's stralingsveld lijkt; deze temperatuur is wel "ergens" in de atmosfeer gelijk aan de kinetische temperatuur - zie vorige paragraaf over zon.

De voorwaarden voor stralingsevenwicht (III, 42 of 43) leggen een voorwaarde op aan  $S_{\nu}(z)$ , aangezien zowel  $F_{\nu}(z)$  als  $J_{\nu}(z)$  door  $S_{\nu}(z)$  "in de buurt" worden bepaald. De oplossing van  $S_{\nu}(z)$  wordt bemoeilijkt door het feit dat  $k_{\nu}(z) = k_{\nu} [T(z), P_e(z)]$  (denk aan wetten van Saha en Boltzmann), en terwijl  $k_{\nu}(T, P_e)$  uit de natuurkunde bekend zal zijn, zijn de relaties  $T(z)$  en  $P_e(z)$  aanvankelijk onbekend - die zoeken wij juist. Daarom kunnen theoretische modelatmosferen in stralingsevenwicht alleen in achtereenvolgende benaderingen worden bepaald. Wij beginnen met een sterk schematische onderstelling:

$$\text{materie grijs: } k_{\nu}(z) = k(z) \quad (\text{III, 45a})$$

voor alle  $\nu$ : geen spektrale lijnen, enz. Gevolg: voor alle  $\nu$ :

$$\tau_{\nu}(z) \equiv \tau(z) = \int_z^{\infty} k(z) \rho(z) dz \quad (\text{III, 45b})$$

(bij niet-grijze atmosfeer zal in het algemeen  $\tau_{\nu_1}(z) \neq \tau_{\nu_2}(z)$  zijn!).

(Opmerking: maak niet de vergissing  $\tau \neq \int_0^{\infty} \tau_{\nu} d\nu$ , want de monochromatische  $\tau_{\nu}$  is een dimensieloze grootheid. Totale grootheden

$Q \equiv \int_0^{\infty} Q_{\nu} d\nu$  hebben alleen zin voor grootheden  $Q_{\nu}$  die per frequentie-eenheid gedefinieerd zijn, zoals  $I_{\nu}$ ,  $J_{\nu}$ , en  $F_{\nu}$ ).

Wij kunnen beide leden van de transportvergelijking over  $\nu$  integreren, nu mogen ten gevolge van (III, 45) integratie over  $\nu$  en differentiatie naar  $\tau$  worden omgewisseld:

$$(\text{III, 28}) \rightarrow \mu \frac{dI}{d\tau} = I(\tau) - S(\tau); \quad (\text{III, 46})$$

analoog:

$$(\text{III, 29} + 42) \rightarrow (\text{III, 43}) \rightarrow \underline{S(\tau) = J(\tau)} \quad (\text{III, 47})$$

(n.b. doch  $S_{\nu}(\tau) \neq J_{\nu}(\tau)$  !)

$$(\text{III, 40}) \rightarrow \text{voor } \tau \gg 1 : F(\tau) \approx \frac{4}{3} \frac{dS(\tau)}{d\tau} = F = \text{constant} \quad (\text{III, 48})$$

(III, 42a) ↑

dus voor  $\tau \gg 1$

$$S(\tau) \approx \frac{3}{4} F \cdot (\tau + c) \quad (\text{III, 49a})$$

wanneer wij aannemen dat deze benadering redelijk is voor alle  $\tau$  kunnen wij de constante  $c$  berekenen, bijv. uit

$$\begin{aligned} (\text{III, 35b}) \rightarrow F &= S\left(\tau = \frac{2}{3}\right) \rightarrow c = \frac{2}{3} \quad (\text{ga na!}) \rightarrow \\ &\rightarrow \underline{S(\tau) \approx \frac{3}{4} F \cdot \left(\tau + \frac{2}{3}\right)} \quad (\text{III, 49b}) \end{aligned}$$

(benadering van Eddington).

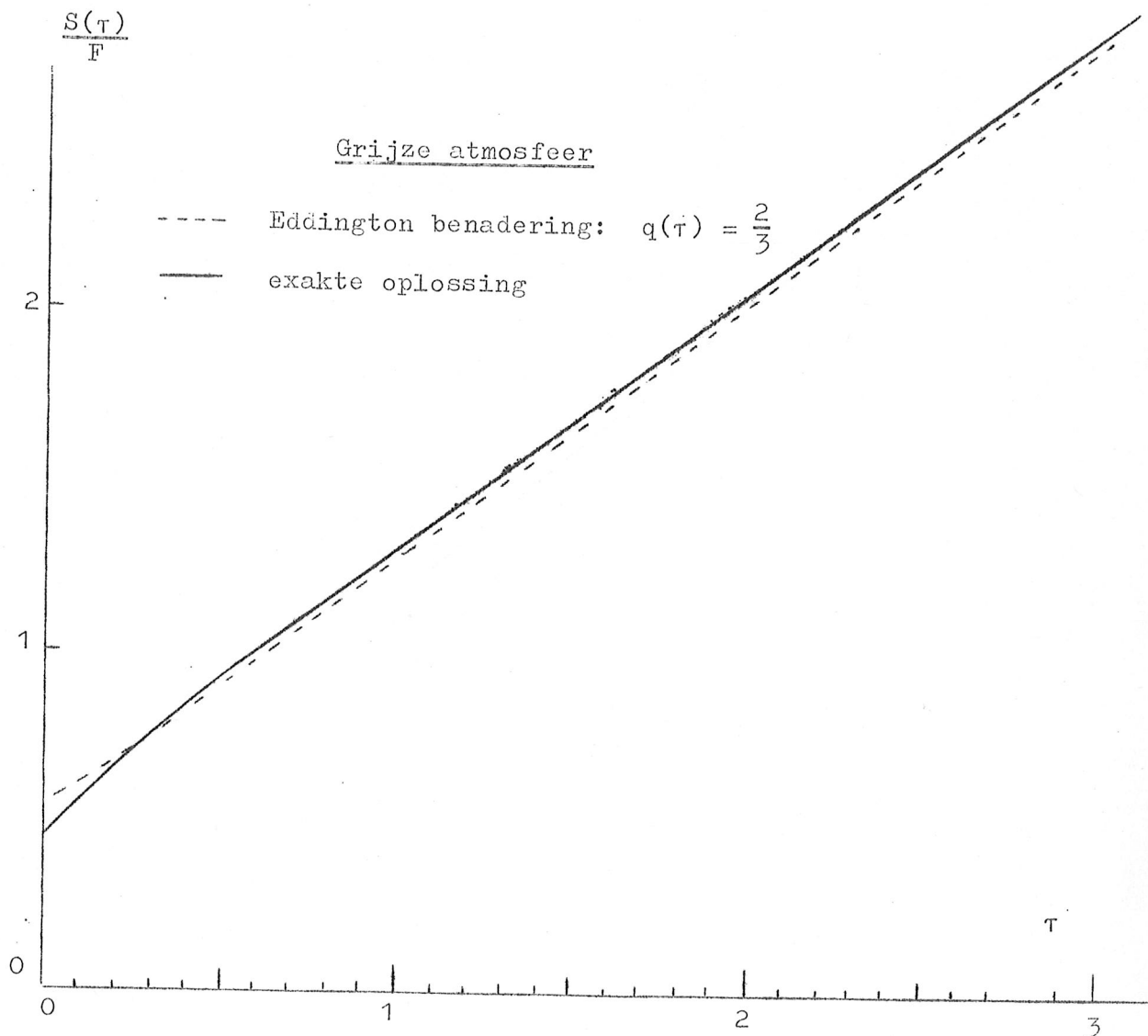
Opgave 8: Ga na dat  $c = \frac{2}{3}$  ook volgt uit (III, 37) + (III, 47).

De exakte oplossing voor grijze atmosfeer in stralingsevenwicht is:

$$(\text{III, 50}) \quad \underline{S(\tau) = \frac{3}{4} F \cdot \left[ \tau + q(\tau) \right]}.$$

De hulpfunctie  $q(\tau)$  kan numeriek met grote nauwkeurigheid worden berekend; daarbij blijkt dat  $q(\tau)$  weinig van  $\frac{2}{3}$  verschilt:

$\tau$	=	0	0.03	0.06	0.1	0.3	0.6	1.0	2.0	$\infty$
$q(\tau)$	=	0.5774	0.6012	0.6148	0.6279	0.6634	0.6858	0.6985	0.7079	0.7104



Uit (III,49b) volgt met (III,34a):  $I^+(0,\mu) = \frac{3}{4} F (\frac{2}{3} + \mu)$  dus voor de relatieve randverzwakking in de totale intensiteit

$$\frac{I^+(0,\mu)}{I^+(0,1)} = \frac{3}{5} (\mu + \frac{2}{3})$$

$\sin \vartheta = \sqrt{1-\mu^2}$	$\frac{3}{5} (\mu + \frac{2}{3})$	$\left[ \frac{I(0,\mu)}{I(0,1)} \right]_{\text{obs}}$ (oude gegevens)
0.00	1.00	1.00
0.2	0.99	0.99
0.4	0.95	0.97
0.6	0.88	0.92
0.8	0.76	0.81
0.9	0.66	0.70
0.98	0.52	0.49
1.00	0.40	-



Omstreeks 1920 stelde men vast dat de overeenstemming met de zonnewaarnemingen verrassend goed is, de grove benadering van grijze materie in aanmerking genomen. Daaruit trok men de konklusie dat de zonne-atmosfeer zich vrijwel in stralingsevenwicht moest bevinden.

Uit de geïntegreerde bronfunctie  $S = \int_0^{\infty} S_{\nu} d\nu$  kunnen alleen alle geïntegreerde grootheden  $I(\tau, \mu)$ ,  $J(\tau)$  en  $F(\tau)$  berekend worden. Om de monochromatische grootheden te berekenen moet een extra onderstelling worden gemaakt: gebruikelijk:

$$\text{LTE} \rightarrow \text{via (III, 19)} : S(\tau) \equiv B(\tau) = \frac{\sigma}{\pi} [T(\tau)]^4, \text{ dus,}$$

samen met (III, 44) en (III, 50), (ga na!):

$$T(\tau) = T_{\text{eff}} \sqrt[4]{\frac{3}{4} [\tau + q(\tau)]} \quad (\text{III, 51})$$

waaruit de monochromatische bronfunctie direkt volgt:

$$S_{\nu}(\tau) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Planck}}}{B_{\nu}} \left\{ T_{\text{eff}} \sqrt[4]{\frac{3}{4} [\tau + q(\tau)]} \right\} \quad (\text{III, 52})$$

Opgave 9: Laat zien dat uit (III, 51) volgt  $T_{\text{eff}} = T(\tau = \frac{2}{3})$  bij de benadering  $q(\tau) = \frac{2}{3}$ . (Bij de exakte oplossing vindt men  $T_{\text{eff}} = T(\tau = 0.645)$ ).

Uit (III, 52) is  $I_{\nu}(\tau, \mu)$  met (III, 30 en 31) te berekenen, en daaruit weer  $J_{\nu}(\tau)$  en  $F_{\nu}(\tau)$  (dat moet met numerieke methoden).

$I_{\nu}(0, \mu)$  (bij vaste  $\mu$ ) en  $F_{\nu}(0)$  zijn "gladde" functies van  $\nu$  die sterk op Planck functies lijken, want (III, 34b)  $\rightarrow$

$$I_{\nu}(0, \mu) \approx B_{\nu} \left[ T(\tau = \mu) \right] \text{ en (III, 35b) en opgave 7 } \rightarrow$$

$$F_{\nu}(0) \approx B_{\nu} \left[ T(\tau = \frac{2}{3}) \right] = B_{\nu}(T_{\text{eff}}).$$

Verloop van stralingsveld met diepte (onderstaande kwalitatieve conclusies gelden ook als atmosfeer niet grijs is).

Aangezien  $T(\tau)$  monotoon toeneemt met de diepte (III, 51) neemt bronfunctie  $B_{\nu}(\tau)$  voor alle  $\nu$  met  $\tau$  toe, het sterkst bij grote  $\nu$  (vergelijk discussie van Planckfunctie in III.2.1.2). Gevolg:

$I_{\nu}(\tau, \mu)$  neemt voor alle  $\mu$  met  $\tau$  toe, zo ook  $J_{\nu}(\tau)$ ; het sterkst bij grote  $\nu$ . Bij toenemende  $\tau$  neemt vooral de terugkerende straling  $I_{\nu}^{\leftarrow}(\tau, \mu)$  ( $\mu < 0$ ) (zie III, 31), dus ook  $F_{\nu}^{\leftarrow}(\tau)$  toe  $\rightarrow$  bij toenemende diepte nadert het stralingsveld het isotrope geval steeds dichter; voorbeeld: bij  $\tau = 10$  in grijze atmosfeer (ga na!)

$$(\text{III, 38} + 49b) \rightarrow I(10, \mu) \approx 8F + \frac{3}{4} F \cdot \mu$$

isotrope term ↓ ↓ anisotrope term.

Vraag: hoe groot zijn  $J(10)$  en  $F(10)$  ?

Natuurlijk blijkt geïntegreerde flux  $\pi F(\tau)$  constant; de top van  $\pi F_{\nu}(\tau)$  als  $f(\nu)$  schuift voor toenemende  $\tau$  naar steeds grotere  $\nu$ , waarom?

Randtemperatuur: met  $q(\tau) = \frac{2}{3}$ : (III,51)  $\rightarrow T(0) = T_{\text{eff}} \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ , met  $q(0) = 0.5774 \rightarrow T(0) = 0.811 T_{\text{eff}}$ . Toepassing op zon:  $T_{\text{eff}} = 5800 \text{ K} \rightarrow T(0) = 4700 \text{ K}$ , dat is duidelijk hoger dan in de III.2.2.2 gevonden minimum temperatuur  $T_{\text{min}} = 4200 \text{ K}$ . Komt dat omdat het zonnegas niet grijs is?

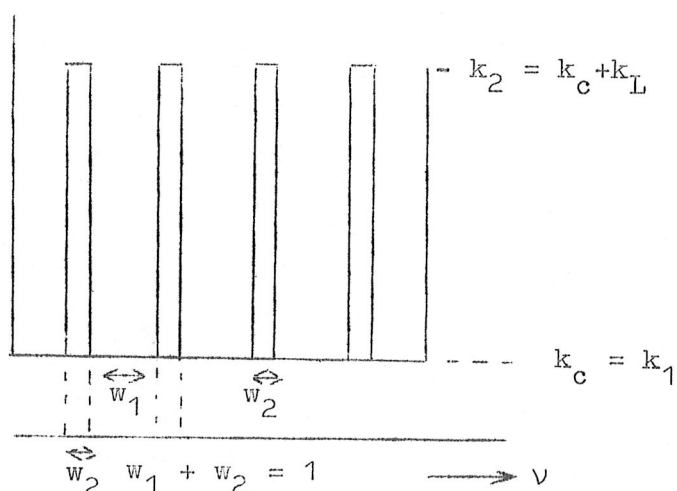
### III.2.2.4 Niet-grijze atmosferen, het dekenefekt

Stermaterie is verre van grijs: de continue extinctiecoëfficiënt  $k_{\nu}$  varieert met een paar orden van grootte en daar moeten dan de scherpe pieken van de lijnextinctie nog op worden gesuperponeerd. (zie § III.2.1.4).

Wij zoeken antwoord op de volgende vragen:

1. Hoe verandert de bouw van de atmosfeer (diepteverloop bronfunctie, temperatuur) wanneer de extinctiecoëfficiënt sterk met de frequentie varieert?
2. Zijn inzinkingen in het continue sterspektrum bij seriegrenzen en het optreden van relatief donkere spektrale lijnen in sterspektra te begrijpen?

Dit is door te rekenen met een vereenvoudigd model, het z.g. "paaltjesmodel" (picket fence); met de (niet om te onthouden) onderstellingen:



- 1) Constante continue extinctie  $k_1 = k_c$ .
- 2) Equidistante rechthoekige "spektrale lijnen", beslaan fractie  $w_2$  van spectrum, extinctiecoëfficiënt  $k_L$ .
- 3)  $k_L/k_c = \eta$  constant met diepte.
- 4) LTE: zelfde  $S_{\nu} = B_{\nu}$  in lijnen en continuum.

In een dergelijk model bestaan er twee optische diepteschalen

naast elkaar:

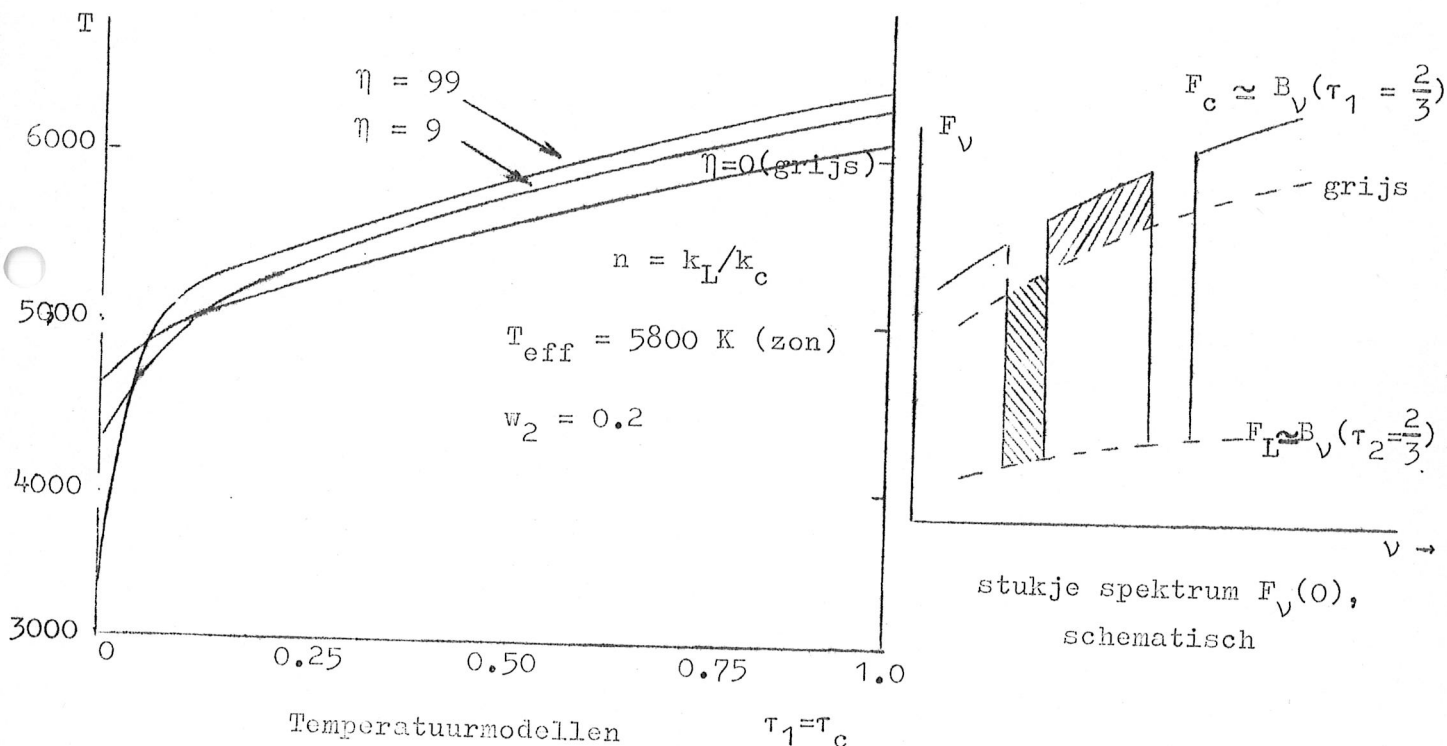
$$\left. \begin{array}{l} \text{in het continuum: } d\tau_1 \equiv -k_c \rho dz \\ \text{in de "lijnen": } d\tau_2 = -(k_c + k_L) \rho dz \end{array} \right\} d\tau_2 = \frac{k_c + k_L}{k_c} d\tau_1,$$

waaruit met de onderstelling (3) volgt:

$$\tau_2 = (1 + \eta) \tau_1 \quad \text{(III,54)}$$

Stralingsevenwicht: de totale flux = de totale flux in het continuum + de totale flux in alle lijnen moet op alle diepten in de atmosfeer dezelfde zijn.

Voorbeelden van resultaten:



De verschillen die tussen een paaltjesmodel en het grijze model met dezelfde  $T_{\text{eff}}$  optreden zijn kwalitatief te begrijpen:

- 1) Het optreden van relatief donkere absorptielijnen: De straling in de lijnen is uit veel hogere lagen afkomstig waar een lagere temperatuur heerst dan in de diepere lagen waar de straling in het continuum vandaan komt. Bij een lagere temperatuur past een lagere Planckse bronfunctie.

B.v. in lijnen:  $F_L \approx B_\nu (\tau_2 = \frac{2}{3})$

$$\tau_2 = \frac{2}{3} \rightarrow \tau_1 = \frac{2}{3(1+\eta)} \quad (= 2/300 \text{ voor } \eta = 99 !)$$

- 2) In de iets diepere lagen veroorzaken de spektrale lijnen hogere temperaturen dan in een grijs model met dezelfde effectieve temperatuur (of: zelfde totale flux). De flux die in de lijnen verdwijnt, moet terugkomen in het continuum (zie gearceerde oppervlakten in rechterfiguur hierboven). Vergeliken met het grijze geval moet er hier in het continuum per frequentieëenheid een grotere flux  $\pi F_\nu$  lopen. Dit maakt een wat hogere (en iets steilere) bronfunctie, dus ook een iets hogere temperatuur nodig in de wat diepe-

3) De spektrale lijnen veroorzaken een lagere randtemperatuur  $T(0)$  dan in het grijze geval. Probeer dat als volgt in te zien: voor  $\tau_1 \approx \frac{2}{3}$  geldt  $\tau_2 \gg 1$ : gevolg: daar loopt vrijwel geen netto flux in de lijnen, want  $F_L^- \approx F_L^+$ . { (III,40)  $\rightarrow F_L(\tau_2) \approx \approx \frac{4}{3} dB_V/d\tau_2 = \frac{4}{(1+\eta)} \cdot \frac{4}{3} \frac{dB_V}{d\tau_1}$  :  $B_V(\tau_2)$  loopt erg vlak }. In de buitenste delen van de atmosfeer, voor  $\tau_2 \lesssim 1$  of  $\tau_1 \lesssim 1/(1+\eta)$ , loopt er wel een merkbare flux in de lijnen, naast de grotendeels uit diepere lagen afkomstige flux in het continuum. Om de totale flux constant te houden moet de flux in de lijnen zo klein mogelijk blijven en moet de flux in het continuum hier iets kleiner zijn dan in het grijze geval  $\rightarrow B(\tau_1) < < B_{\text{grijs}}(\tau_1)$ , ofwel  $T(\tau_1) < T_{\text{grijs}}(\tau_1)$ , voor  $\tau_1 \lesssim 1/(1+\eta)$ .

De in 2) en 3) genoemde verschijnselen worden schilderachtig het deken-effect van de spektrale lijnen genoemd: het lichaam blijft warmer onder de deken (2); de bovenkant van de deken is kouder dan de huid zonder deken (3).

Uit de kwalitatieve verklaringen van de effecten 1), 2) en 3) blijkt dat de aan het begin van deze paragraaf genoemde onderstellingen voor het paaltjesmodel alleen dienen om de berekening van  $T(\tau_1)$  te vergemakkelijken. Onregelmatig geplaatste lijnen, met uiteenlopende en diepte-afhankelijke  $k_L/k_C = \eta$  veroorzaken globaal dezelfde effecten. Hetzelfde geldt voor een variabele continue extinctiecoëfficiënt. Kortom: elke afwijking van grijsheid veroorzaakt een dekeneffect. Daarom is het wel te begrijpen dat uit de randverzwakking van de zon een wat lagere temperatuur volgt dan men uit het grijze model berekent.

#### Middelbare extinctiecoëfficiënt

Vergelijk nog eens het verloop  $T(\tau)$  voor verschillende (niet-) grijze modellen bij dezelfde  $T_{\text{eff}}$  - fig. op blz. III, 35. Op voldoende grote optische diepten kan men alle niet-grijze modellen naar het grijze model schalen door geschikte keuze van een middelbare extinctiecoëfficiënt  $k_R$ , met de daarbij passende optische diepteschaal:  $d\tau_R = -k_R \rho dz$ . De Noor Rosseland heeft de methode aangegeven om  $k_R$  te berekenen uit elke gegeven  $k_V$  (vandaar index R). Hieruit volgt: voor alle steratmosferen geldt op voldoende grote diepte ( $\tau_R > 2$  bijv.):

$$T(\tau_R) = T_{\text{eff}} \sqrt[4]{\frac{3}{4} [\tau_R + q(\tau_R)]}, \quad (\text{III,55})$$

vergel. (III,51). Op grote diepte hangt het model  $T(\tau_R)$  dus alleen van  $T_{\text{eff}}$  (of van totale flux  $F$ ) af. Zo'n model kan vloeiend op een model voor het sterinwendige worden aangesloten. Bij het berekenen van modellen voor het sterinwendige bedient men zich altijd van Rosseland-gemiddelden  $k_R$  (ook stilzwijgend gebeurd in hoofdstuk II).

Het is niet mogelijk om voor  $\tau_R \lesssim 1$  (d.w.z. juist het gebied waar het waarneembare spektrum wordt gevormd!) de modellen met het grijze model te verbinden, want de randtemperatuur  $T(0)$  hangt van aard en mate van niet-grijsheid in  $k_V$  af. Daarom moet rekening worden gehouden met het verloop van  $k_V(\tau_R)$ .

Het verloop van de extinctiecoëfficiënt hangt af van:

- 1) het verloop van de extinctiecoëfficiënt met de frequentie per deeltje dat bijdraagt aan de totale extinctiecoëfficiënt; uit natuurkunde bekend (vergel. III.2.1.4);
- 2) de concentraties van de verschillende soorten deeltjes die tot  $k_V$  bijdragen. Deze hangen af van:
  - a) de abundanties van enkele elementen
  - b) de frakties van de deeltjes van één element die zich in een bepaalde energie- en ionisatietoestand bevinden. (Bijv. voor Balmercontinuum: fractie van neutraal H in  $n = 2$ ) - bij LTE worden deze frakties door vergelijkingen van Saha en van Boltzmann bepaald. Dus:  $k_V(T, P_e, \text{abundanties})$ .

### III.2.2.5 Drukverloop, hydrostatisch evenwicht

In deze paragraaf zoeken wij een methode om uit een aangenomen temperatuurverloop  $T(\tau_0)$  het verloop van de gasdruk  $P_g(\tau_0)$  en van de elektronendruk  $P_e(\tau)$  te bepalen.

Wij laten eerst zien: wanneer twee van de drie grootheden  $T$ ,  $P_g$  en  $P_e$  gegeven zijn, dan kan de derde worden gevonden.

Partiële druk van deeltjes van soort  $i$ :  $P_i = N_i kT$  (III,56)  
 ( $N_i$ : aantal deeltjes per vol. eemheid;  $k$ : constante van Boltzmann).

Elektronendruk:  $P_e = N_e kT$  (III,56a)

Gasdruk: som van alle partiële drukken:

$$P_g = \sum_i N_i kT = P_{\text{kernen}} + P_e \quad (\text{III,57})$$

Met "kernen" worden zware deeltjes: atomen of ionen bedoeld; daarvoor hoeven wij alleen rekening te houden met H en He aangezien deze elementen in verreweg de grootste concentraties voorkomen.

Elektronen worden geleverd door ionisatie van

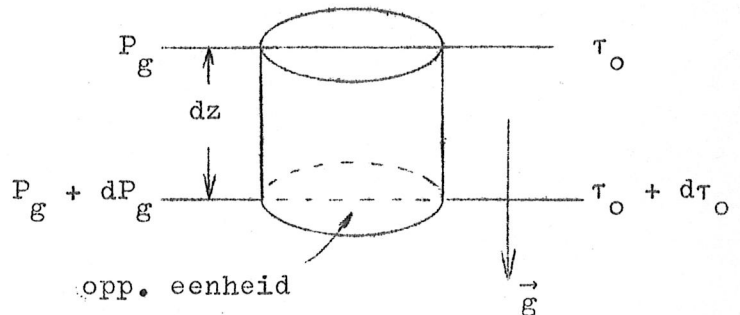
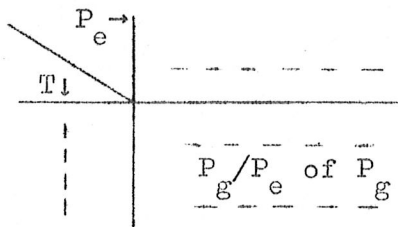
- H (I.P. = 13.60 eV) en He (I.P. = 24.6 en 54.4 eV), bij hete sterren (O, B, A, F);

- "Metalen" (I.P.  $\lesssim 8$  eV), bij koele sterren (F, G, K, M)

Gevolg:  $N_e = N_{\text{ionen}(x)} + 2N_{\text{ionen}(2x)}$

alleen nodig indien He gedeeltelijk dubbel geïoniseerd is (O.B.).

Kies abundanties  $A_E \equiv N_E/N_H$  voor de elementen  $E = \text{He}$  en de belangrijkste metalen. Bereken voor aantal stellen waarden  $T, P_e$  voor elk element de verhouding  $N_{\text{ionen}}/N_{\text{atomen}}$  met behulp van Saha, vergelijking (III,26b) - LTE onderstellend. Na vermenigvuldiging met abundanties volgt uit optellingen de verhouding  $(N_{\text{kernen}} + N_e) / N_e = P_g/P_e$ . Zo ontstaan tabellen  $\{T, P_g, P_e\}$  waaruit bij elk gegeven tweetal grootheden de derde door interpolatie gevonden kan worden.



Hydrostatisch evenwicht:

Druktoeneming  $dP_g$  juist gelijk aan gewichtslaagje per oppervlakte-eenheid:

$$d P_g = g \rho |dz| \tag{III,58a}$$

met

$$d \tau_o = k_o \rho |dz|$$

wordt dit

$$\frac{d P_g(\tau_o)}{d \tau_o} = \frac{g}{k_o} \tag{III,58b}$$

Indien (dikte atmosfeer)  $\ll$  (straal ster) (al gebruikt in vlakke-lagen benadering), dan geldt  $g = GM/R^2 = \text{constant}$ . Extinctiecoëfficiënt  $k_o$  (monochromatisch of Rosseland) is een funktie van  $T$  en  $P_e$ , dus van de diepte.

Uit de numerieke integratie van (III,58b) volgt  $P_g(\tau_o)$  en  $P_e(\tau_o)$ , waarbij gebruik wordt gemaakt van de  $\{T, P_g, P_e\}$  tabellen. Verder kunnen nu onder meer worden berekend:

- de massadichtheid  $\rho(\tau_o) = \frac{P_g(\tau_o) \cdot \mu}{R T(\tau_o)}$ , (III,59)

waarin het gemiddelde moleculaire gewicht  $\mu$  per deeltje van de abundanties en ionisatiegraad van H en van He afhangt - dus ook van  $T$  en  $P_e$  ;

- de geometrische hoogte (ga na!)

$$z(\tau_0) = \int_{\tau_0}^{\tau_0'} \frac{dt_0}{k_0(t_0) \rho(t_0)} \quad (\text{III,60})$$

waarbij het nulpunt  $z(\tau_0') = 0$  bij een zekere  $\tau_0'$  wordt gekozen.

Met  $z(\tau_0)$  kan de vlakke-lagen benadering gecontroleerd worden: is inderdaad  $\Delta z \approx z(\tau_0 = 0,01) - z(\tau_0 = 3) \ll R$ ? Blijkt inderdaad te kloppen voor empirische zonnemodel (§ III.2.2.2) en voor theoretische modellen in stralingsevenwicht, behalve voor enkele zeer ijle superreuzen.

Opmerking: In atmosferen van zeer hete sterren (O, vroege B) speelt de stralingsdruk  $P_r$  een meetbare rol. Daarmee wordt (III,58a):

$$d(P_g + P_r) = g \rho |dz| \quad (\text{III,58c})$$

### III.2.2.6 Theoretische modelatmosferen in stralingsevenwicht

Modelatmosferen, die aan stralingsevenwicht voldoen, kunnen in achtereenvolgende benaderingen (iteraties) worden berekend, uitgaande van reële extinctiecoëfficiënten  $k_\nu(T, P_e)$ . Zo'n model hangt af van de volgende parameters:

- A) Flux  $\pi \tilde{F}$  (of  $T_{\text{eff}}$ );
  - B) Versnelling zwaartekracht  $g$
  - C) Abundanties van enkele elementen
- } nodig voor berekening van drukken en van  $k_\nu(T, P_e)$

Globaal verloopt de iteratieve berekening als volgt:

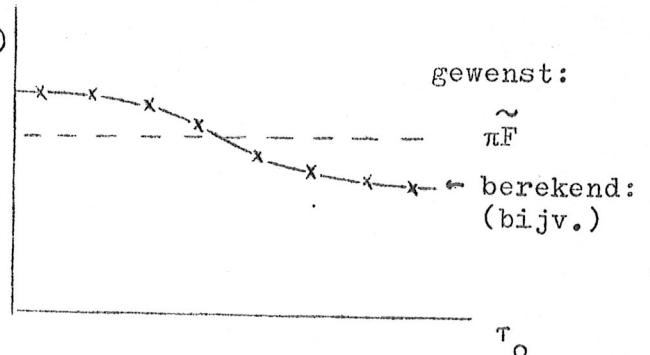
Begin met een model in eerste benadering:  $T^{(1)}(\tau_0) \rightarrow P_g^{(1)}(\tau_0)$ ,  $P_e^{(1)}(\tau_0)$ , dit kan bijvoorbeeld een grijs model zijn. Uit dit model volgt de bronfunctie  $S_\nu^{(1)}(\tau_0) = f(\nu, \tau_0)$  (bij LTE eenvoudig:  $S_\nu^{(1)}(\tau_0) = B_\nu [T^{(1)}(\tau_0)]$ , de Planckfunctie). Bereken uit  $S_\nu^{(1)}(\tau_0)$  de monochromatische fluxen  $\pi F_\nu^{(1)}(\tau_0)$  voor een aantal frequenties  $\nu$  en een aantal diepten  $\tau_0$  en vervolgens  $\pi F^{(1)}(\tau_0) = \int \pi F_\nu^{(1)}(\tau_0) d\nu$ . Controleer nu of  $\pi F^{(1)}(\tau_0)$  constant gelijk is aan de o

gewenste flux  $\pi \tilde{F} = \sigma T_{\text{eff}}^4 \cdot \pi F(\tau_0)$

Is dat niet het geval, verbeter dan dat aangenomen temperatuurverloop

$T^{(1)}(\tau_0) \rightarrow T^{(2)}(\tau_0)$ .

Onderzoek dit model in tweede benadering op bovenomschreven manier - ga zo door totdat



$\left| \pi F^{(n)}(\tau_0) - \pi \tilde{F} \right|$  klein genoeg is geworden.

Deze iteratieve berekening is pas goed mogelijk geworden door snelle computers. Tegenwoordig kan men in de extinctiecoëfficiënt ook een aantal spektrale lijnen meenemen.

De bespreking van de resultaten stellen wij uit tot na de volgende paragraaf.

### III.2.2.7 Stralingsevenwicht of convectie? Convectie in de zon.

Tot dusverre hebben wij stralingsevenwicht aangenomen; m.a.w. wij onderstelden dat alle energie door straling wordt getransporteerd. Achteraf moet deze onderstelling worden getoetst aan de gevonden modellen. Het daarvoor geschikte criterium van Schwarzschild is al besproken in hoofdstuk II, hier kort herhaald:

Noem de met stralingsevenwicht berekende temperatuurgradiënt  $\left| \frac{dT}{dz} \right|_{S.E.}$ . Volgens Schwarzschild zal het model in stralingsevenwicht goed zijn, m.a.w. er zal géén convectie optreden indien:

$$\left| \frac{dT}{dz} \right|_{S.E.} \leq \left| \frac{dT}{dz} \right|_{ad} \quad (\text{II, } = \text{III,61})$$

waarin de adiabatische temperatuurgradiënt

$$\left| \frac{dT}{dz} \right|_{ad} = \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \cdot \frac{T}{P} \cdot \left| \frac{dP}{dz} \right|, \quad (\text{II, } = \text{III,62})$$

met  $\gamma = c_p/c_v$ .

Toepassing van criterium (III,62) leert dat de atmosferen van zeer hete sterren (O, B, vroege A) inderdaad geheel in stralingsevenwicht zijn.

Dat geldt ook voor de buitenste lagen van koelere sterren, doch voor  $\tau_R > 1$  is bij F, G, K en M sterren stralingsevenwicht niet langer mogelijk - daartreedt convectie op. In de z.g. convectiezone neemt de gradient  $\left| \frac{dT}{dz} \right|$  ( $\bar{T}(z)$ : een over het horizontale X,Y-vlak gemiddelde temperatuur) waarden aan die tussen  $\left| \frac{dT}{dz} \right|_{S.E.}$  en  $\left| \frac{dT}{dz} \right|_{ad}$  zullen liggen. Men kan de temperatuurgradiënt in de convectiezone benaderd berekenen en zodoende het  $T(z)$  verloop in de in stralingsevenwicht verkerende buitendelen van de atmosfeer naar beneden verlenen met  $\bar{T}(z)$  in de convectiezone.

Uitweiding:

1. Al na de eerste paar honderd km nadert de temperatuursgradiënt  $\left| \frac{dT}{dz} \right|$  de adiabatische temperatuursgradiënt zeer dicht. Bij de berekening van modellen voor sterinwendigen rekent men in convectiezones dan ook meestal met de adiabatische temperatuurgradiënt.

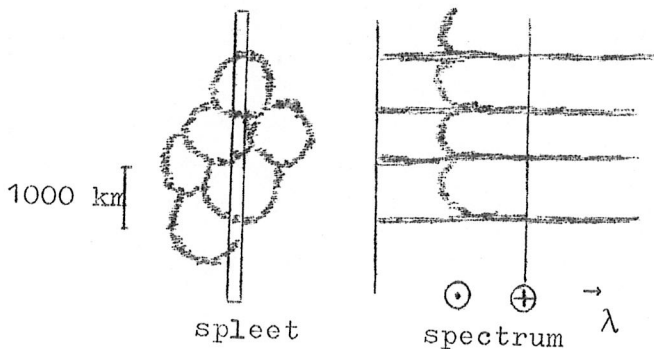


2. Convectionzones treden daar op waar waterstof gedeeltelijk geïoniseerd is. Bij de daar heersende temperaturen verkeert een relatief groot deel van de nog neutrale H in de niveaus  $n = 2, 3, \dots \rightarrow$  gas voor alle golflengten erg ondoorzichtig, middelbare extinctiecoëfficiënt  $k_R$  zeer hoog  $\rightarrow |dT/dz|_{S.E.}$  zeer groot, veel groter dan adiabatische gradiënt. Bijkomstig is dat adiabatische gradiënt in gedeeltelijk geïoniseerd gas wat kleiner is dan in neutraal of volledig geïoniseerd gas (bij expansie van stijgende bel treedt afkoeling op - dus ook recombinitie, hetgeen een deel van de voor expansie benodigde energie levert) .

De ondergrens van de convectionzone treedt daar op waar H en He zeer volledig geïoniseerd zijn: gas wordt daar weer doorzichtig (alleen verstrooiing door vrije elektronen), met het gevolg dat  $|dT/dz|_{S.E.}$  weer kleiner wordt dan de adiabatische gradiënt  $\rightarrow S.E.$

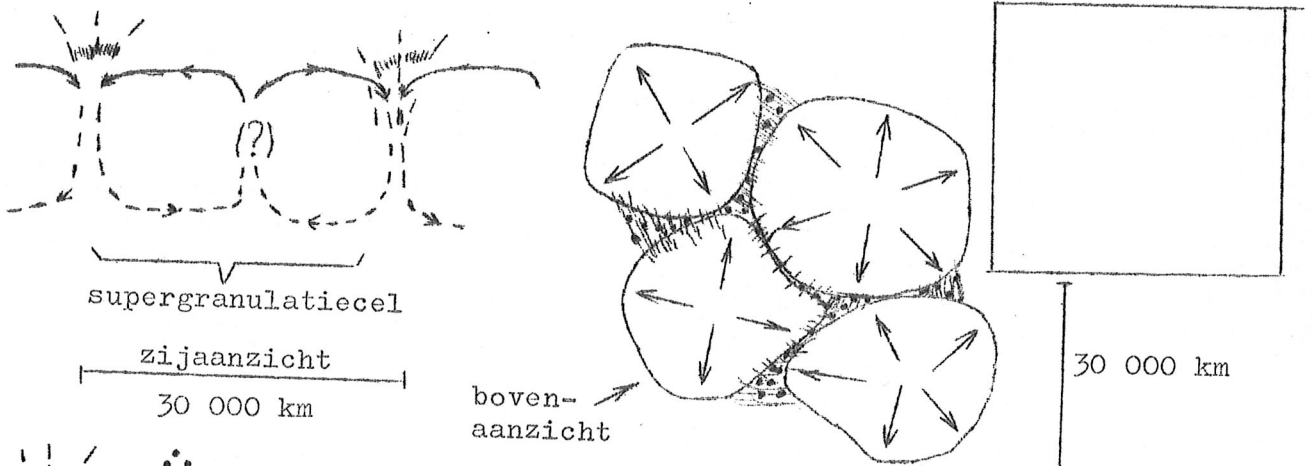
Zonneverschijnselen die met convection samenhangen.

De convectionzone begint bij  $\tau_{5000\text{\AA}} = 1$ , vrij diep in de fotosfeer. Sommige convectieve elementen "schieten door" in de hogere fotosfeer, hetgeen een aantal verschijnselen veroorzaakt:



Granulatie: heldere "korreligheid" over hele zonnenschijf. Diameters granulen  $\sim 700 - 1500$  km, levensduur  $\approx 15$  min. Convectief verschijnsel: temperatuurfluctuaties  $500 - 1000$  K; in hete korrels opstijgsnelheden  $\approx 1 \text{ km s}^{-1}$ ; in donkere

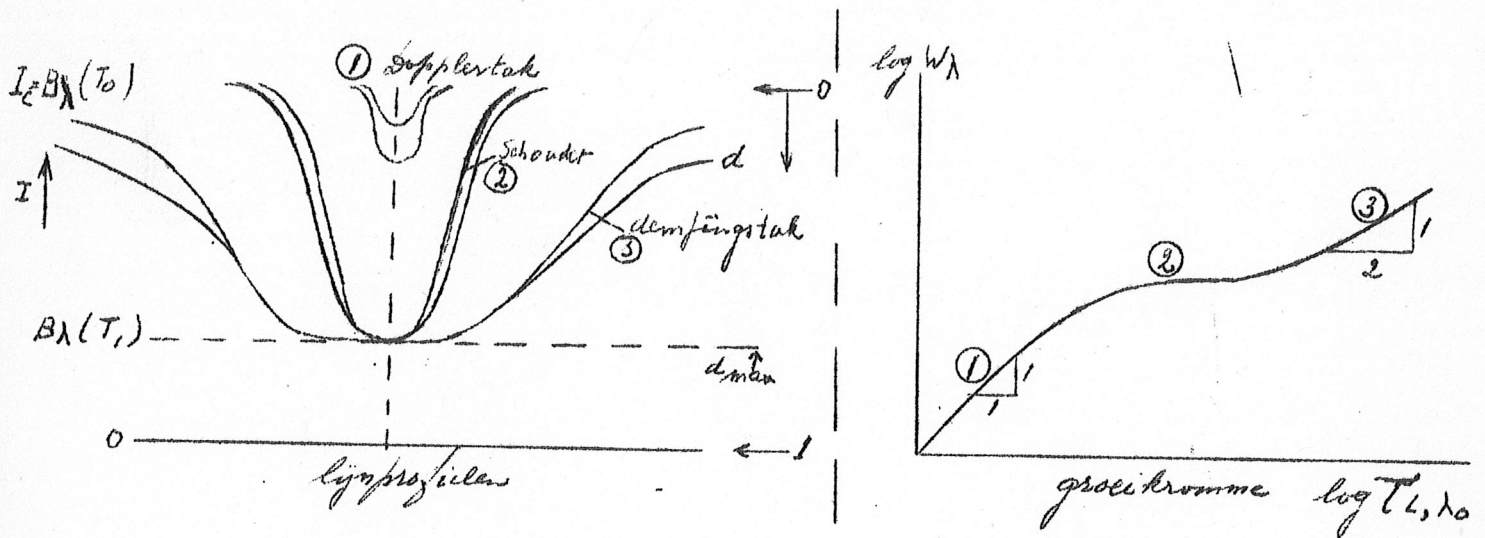
kanalen daling met  $\approx 3 \text{ km s}^{-1}$ .



cf

Concentratie van magnetisch velden

Heldere vlokjes in chromosferisch netwerk.



Het lijnprofiel en de grootte van  $\bar{W}_\lambda$  hangt af van  $\tau_{L,\lambda_0}$

- (1) zeer zwakke lijnen:  $\tau_{L,\lambda_0} \ll 1$  dus  $\tau_{L,\lambda} \ll 1$  voor alle  $\lambda$  (III,93) →

$$d_\lambda = d_{\max} \cdot \tau_{L,\lambda} \quad \text{of} \quad - \left( \frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_0} \right)^2$$

(III,95):  $d_\lambda = d_{\max} \cdot \tau_{L,\lambda_0}$  e want volgens § III.2.3.3. mag  $\kappa_\lambda$

hier met een dopplerprofiel benaderd worden. Bij deze zwakke lijnen neem de uitzakking  $d_\lambda$  overal evenredig met  $\tau_{L,\lambda_0}$  toe, dit geldt dus ook voor de equivalente breedte;

(III,94) →  $W_\lambda = d_{\max} \int \tau_{L,\lambda} d\lambda = d_{\max} \cdot \tau_{L,\lambda_0} \cdot \pi \cdot \Delta\lambda_D$  (III.96)

Dopplertak: helling 1:1 in groeikromme:  $\log W_\lambda$  tegen  $\log \lambda_{L,\lambda_0}$ .

Zodra de optische dikte in de lijnkern  $\tau_{L,\lambda_0}$  in de buurt van 1 komt, groeit de lijninzakking minder snel dan evenredig met  $\tau_{L,\lambda_0}$  aan. Vervolgens komen wij in het gebied van:

- (2) verzadigde lijnen, met  $\tau_{L,\lambda_0} \gtrsim 10$ . De lijnkern wordt nu "platgedrukt tegen de bronfunctie  $B_\lambda(T_1)$ "; de equivalente breedte groeit nu slechts heel langzaam aan voor toenemende  $\tau_{L,\lambda_0}$ , uit bovenstaande figuur blijkt wel dat hier

$$W_\lambda \approx d_{\max} \cdot \Delta\lambda_D \cdot (\text{factor } 2 \dots \text{tot } 4) \quad \text{(III,97)}$$

Schouder in de groeikromme. Deze toestand duurt totdat  $\tau_{L,\lambda_0}$  zo groot geworden is dat ontstaan:

- (3) lijnen met dampingsvleugels,  $\tau_{L,\lambda_0} \gg 1$  ( $\gtrsim 1000$  bijv., zie figuur op blz. III,44). Terwijl er in de lijnkern niets verandert,

groeit de inzakking in de vleugels aan met toenemende  $\tau_{L,\lambda_0}$ ; in de verre vleugels waar  $\tau_{L,\lambda} \ll 1$  evenredig met  $\tau_{L,\lambda_0}$ :

$$(III,92c + III,93) \rightarrow d_\lambda = d_{max} \tau_{L,\lambda_0}^H(a,v) = d_{max} \cdot \tau_{L,\lambda_0} \quad \text{blz. III,44} \quad (III,98)$$

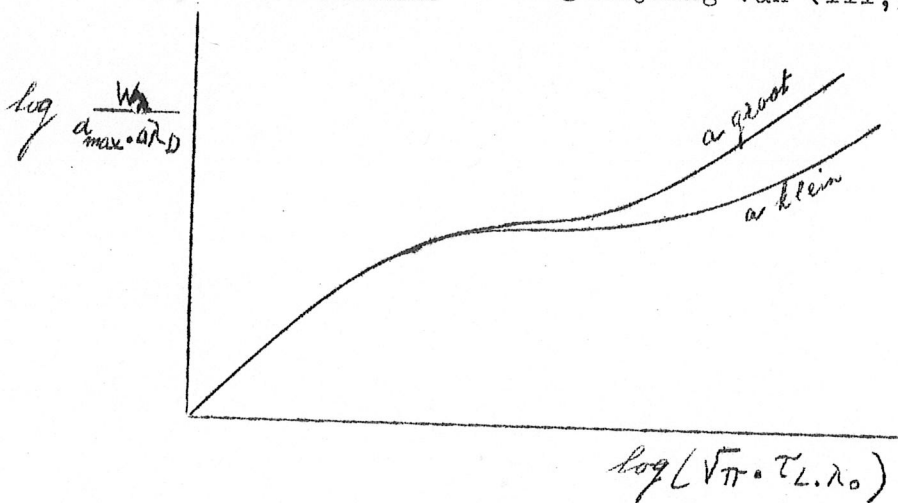
$$\cdot \frac{a}{\pi \cdot (\Delta\lambda/\Delta\lambda_0)^2}$$

Men kan aantonen dat voor lijnen met flinke dempingsvleugels:

$$W_\lambda = d_{max} \cdot \Delta\lambda_D \cdot \sqrt{\pi} \cdot \tau_{L,\lambda_0} \cdot a \quad (III,98)$$

dempingstak van de groeikromme: de equivalente breedte neemt daar evenredig met  $\sqrt{\tau_{L,\lambda_0}}$  toe.

Opmerkingen: 1. vergelijking van (III,96)97 en 99) leert dat de



vorm van de groeikromme alleen nog maar van  $a = \gamma / (4\pi\Delta\nu_D)$  afhangt wanneer men  $\log [W_\lambda / (d_{max} \cdot \Delta\lambda_D)]$  uitzet tegen  $\log [\tau_{L,\lambda_0} \cdot \sqrt{\pi}]$   
Schematische figuur hiernaast.

2. Precies zo'n groeikromme komt te voorschijn voor emissielijnen met  $T_1 > T_0$ ; de kernen van sterke lijnen verzadigen dan tegen  $B_\lambda(T_1) > B_\lambda(T_0)$

Wanneer men het spektrum van een lichtbron met behulp van een groeikromme wil onderzoeken zijn vooraf  $\Delta\lambda_D$  en  $d_{max}$  doorgaans niet bekend. Men schrijft  $\Delta\lambda_D = \frac{v_0}{c} \lambda_0$  en voor zeer zwakke lijnen volgt dan uit (III, 96) en (III, 92b):

$$W_\lambda / \lambda_0 = d_{max} \cdot \frac{\pi e^2}{mc^2} \cdot Z \cdot \lambda_0 \cdot f_{ij} \cdot N_i \quad (III,100a)$$

Voor deeltjesconcentratie van element E, ionisatietrap k, niveau i kan men schrijven

$$N_i = (N_{k,i} / \sum_i N_{k,i}) \times (\sum_i N_{k,i} / N_E) \times N_E$$

waarbij de eerste factor volgens Boltzmann

$$N_{k,i} / \sum_i N_{k,i} (\cdot) \approx \epsilon_i \cdot 10^{-\chi_i} \cdot 5040 / T_1$$

(Vergelijk blz. III 12a)

$\chi_i$  is de excitatie energie in eV van niveau i). Hergroepering en logaritmeneming levert:

$$(III, 100b): \log X = \log C + \log (g_i f_{ij} \lambda_o) - \chi_i \frac{5040}{T_1} \quad (= \log \frac{W\lambda}{\lambda} \text{ voor}$$

zeer zwakke lijnen); deze  $\log X$  gebruikt men als abscis voor de groeikromme en  $\log \frac{W\lambda}{\lambda}$  als ordinaat.

De grootheid  $C$  in de eerste term is evenredig met  $d_{\max}$ , met  $Z$ , met  $\frac{\sum N_{k,i}}{N_E}$  en met  $N_E$ ,  $C$  hangt dus af van de toestand in de lijnvormende laag (van  $T_1$  en  $P_e$ ) en is evenredig met  $Z$  en  $N_e$ .

De tweede term hangt uitsluitend af van lijnconstanten:  $g_i$ ,  $f_{ij}$  en  $\lambda_o$ , terwijl in de derde term uitsluitend de excitatiepotentiaal van het onderste energieniveau en de temperatuur  $T_1$  bevat.

Opgaven: 1) Wanneer  $\log \frac{W\lambda}{\lambda}$  als ordinaat gekozen wordt, neemt de hoogte van de schouder van de groeikromme toe met toenemende middelbare snelheid  $\bar{v}_o$  van de atomen in de gezichtslijn. Beredeneer dit aan de hand van de voorafgaande figuur en bijbehorende opmerking 1.; maak dit resultaat ook fysisch duidelijk.

2) Hoe hangt de hoogte van de schouder van de groeikromme (met  $\log \frac{W\lambda}{\lambda}$  als ordinaat) af van  $d_{\max}$ ?

Wanneer wij groeikromme uit sterspektra willen afleiden, moeten wij het hierboven gebruikt model van de "omkerende" lijnvormende laag verfijnen. Dan moet rekening gehouden worden met:

1. De lagen waarin de lijnen en de laag waarin het continue spectrum gevormd worden overlappen elkaar. Het gevolg is dat de rol die  $l_\lambda$  in bovenstaande afleiding speelt overgenomen wordt door de verhouding

$$\eta_\lambda = l_\lambda / k_c \text{ en de rol van } N_E \text{ door } A_E = N_E / N_H.$$

2. In plaats van twee waarden voor de bronfunktie  $B_\lambda(T_o)$  en  $B_\lambda(T_1)$  hebben wij in een atmosfeer met een geleidelijk met de diepte toenemende bronfunktie te maken. Gevolg:  $d_{\max}$ , volgens (III, 93) het relatieve verschil van de bronfunktie in de lijnvormende laag met de bronfunktie in de continuüm-vormende laag, moet vervangen worden door de relatieve toeneming van de bronfunktie met de diepte.

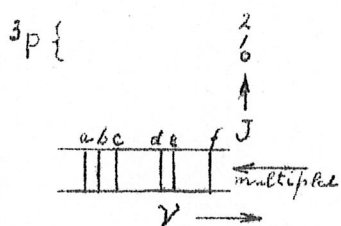
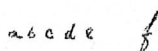
Wanneer de lijnen van één element in niet al te verschillende diepten van de atmosfeer worden gevormd heeft het zin een gemiddelde excitatie-temperatuur  $T_{ex} \rightarrow \theta_{ex} = 5040 / T_{ex}$  in te voeren, zodat de uitdrukking voor de abscis van de groeikromme wordt

$$\log X = \log C + \log (g_i f_{ij} \lambda_o) - \chi_i \theta_{ex} \quad (III, 100c).$$

Hierin is  $C$  recht evenredig met  $A_E = N_E / N_A$ .  $C/A_E$  moet uit het model berekend worden (hangt vooral af van gemiddelde waarden  $\langle T \rangle$  en  $\langle P \rangle$  en van de temperatuursgradient;  $C$  varieert maar heel langzaam met  $\lambda_0$ ).

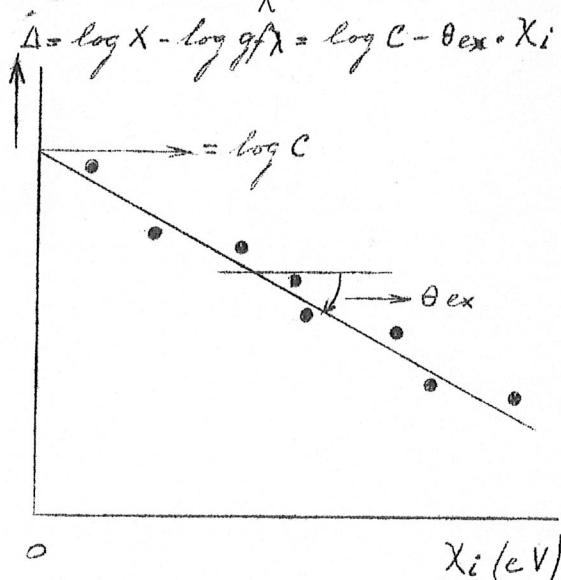
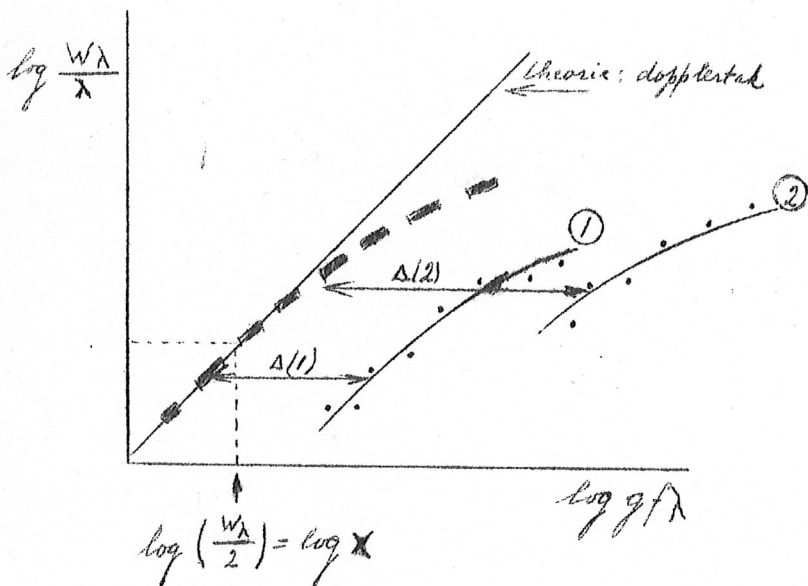
Constructie van een empirische groeikromme. Het effectieve aantal deeltjes verantwoordelijk voor de vorming van de verschillende spektrale lijnen van één element in één ionisatietoestand loopt sterk uiteen: (:)

$N_E g_i f_{ij} \times 10^{-\chi_i} \text{ex}$ . Wanneer er sprake is van één gemiddelde excitatietemperatuur kunnen wij voor alle beschikbare lijnen van één ionisatietoestand van één element één (al dan niet volledige) groeikromme construeren. Aan de natuurkunde ontleen wij de grootheden  $\lambda_0$ ,  $g_i$ ,  $\chi_i$ ,  $f_{ij}$  en in het sterspektrum meten wij  $W_\lambda$ .



De energietermen zijn gesplitst in fijnstructuurniveau's - de verzameling spektrale lijnen die tussen alle niveau's van twee termen mogelijk zijn, heet een multiplet (Struktuur der Materie § 3G, I). Spreiding in golflengte van enkele Å (simpele atomen, bijv. Na) tot meer dan 100 Å (complexe atomen, Fe). De excitatie-energieën  $\chi_i$  van de niveau's in de laagste term verschillen heel weinig (paar honderdsten van 1 eV) - zij mogen door één gemiddelde waarde worden benaderd.

De constructie van de empirische groeikromme verloopt nu als volgt. Zet in één figuur  $\log (W_\lambda / \lambda)$  uit tegen  $\log (g f \lambda)$ ; alle lijnen van één multiplet leveren één stukje groeikromme, zie figuur stukje (1), (2), enz. Spreiding van de punten t.g.v. onnauwkeurigheden in  $W_\lambda$  en in  $f$ .



Schuif alle stukken van de verschillende multipletten aaneen tot één vloeiende kromme → (gedeelte van) groeikromme.

De noodzakelijke verschuiving  $\Delta$  t.o.v. de rechte  $\log (W_\lambda/\lambda) = \log X$  voor zeer zwakke lijnen geeft voor elk multiplet, volgens (III, 100c)

$$\Delta = \log X - \log (g f \lambda) = \log C - \chi_i \theta_{\text{ex}}.$$

Zet voor alle multipletten de gevonden verschuivingen  $\Delta$  uit tegen  $\chi_i$ ; pas een rechte aan: helling  $\rightarrow \theta_{\text{ex}} = 5040/T_{\text{ex}}$  → de excitatietemperatuur.

Snijpunt van rechte met  $\chi_i = 0 \rightarrow \log C$ . Uit een model kan men  $\log (C/A_E)$  berekenen; samen geeft dit: relatieve abundantie  $A_E = N_E / N_H$  van het element.

Vergelijking van de hoogte van de schouder van de empirische groeikromme met die van een theoretische groeikromme levert de middelbare snelheid van de atomen in de gezichtslijn  $\xi_0$ . Wanneer men gelijk stelt  $T_{\text{kin}} = T_{\text{ex}}$  dan blijkt  $\xi_0$  vrijwel steeds duidelijk groter te zijn dan men op grond van zuiver thermische snelheden zou verwachten. Dit gaf aanleiding om microturbulentie in te voeren, zie eind § III. 2.3.3. Men vindt  $\xi_{\text{mt}} \approx 1 \text{ km s}^{-1}$  bij de zon, bij sommige sterren zelfs vele  $\text{km s}^{-1}$ .

Uit de ligging van de dempingstak volgt via de vergelijking met een theoretische groeikromme een waarde voor  $a = \gamma / (4\pi \Delta v_D)$ , en met  $\Delta v_D = v_0 \xi_0 / c$ ,  $\gamma$ . Voor de zon en een aantal sterren vond men dempingsconstanten die in goede overeenstemming met de verwachte drukverbreding (ongeveer 10 x stralingsdemping). Uit  $\gamma$  kan de concentratie  $N$  van de storende deeltjes worden afgeleid.

Opmerking: Groeikrommen kunnen niet alleen toegepast worden op spektra met absorptielijnen (absorptievaten, sterren) doch ook op spektra met emissielijnen (vlammen, bogen, schokbuizen in het laboratorium, en in de astrofysica: emissienevels (Hoofdstuk IV), eclipsspectra van chromosfeer).

### Abundanties

Hoewel men uiteindelijk streeft naar gedetailleerde interpretatie van lijnprofielen (met NLTE effecten enz.) zijn de meeste astrofysische abundanties tot dusverre bepaald uit groeikromme analyses met een LTE theorie. Daarbij is gebleken dat de zon en de overgrote meerderheid van de sterren dezelfde chemische samenstelling hebben:

grotendeels H

vrij veel He:  $A_{\text{He}} = N_{\text{He}} / N_{\text{H}} \approx 0.1$

iets C, N en O:  $A_{\text{C}} \approx 5 \times 10^{-4}$ ,  $A_{\text{N}} \approx 1 \times 10^{-4}$ ,  $A_{\text{O}} \approx 1 \times 10^{-3}$

overige elementen zeer schaars: totaal ongeveer  $1 \times 10^{-4}$  (belangrijkst zijn Si, Mg, Fe, Xe).

Slechts bij enkele typen sterren vindt men opvallende afwijkingen: zo blijken zeer oude sterren (z.g. populatie II sterren) "metaalarm" te zijn: zware elementen zijn 10 tot 100 maal schaarser dan in de zon. Deze gegevens zijn van groot belang voor een beter inzicht in de ontwikkeling van de sterren en van het melkwegstelsel.

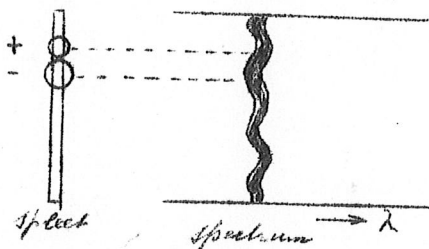
III. 2.3.5 snelheidsvelden en magnetische velden.

De component van het snelheidsveld in de gezichtslijn wordt zichtbaar door het doppler effect:

$$\frac{v - v_0}{v_0} = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} = \frac{v_r}{c}$$

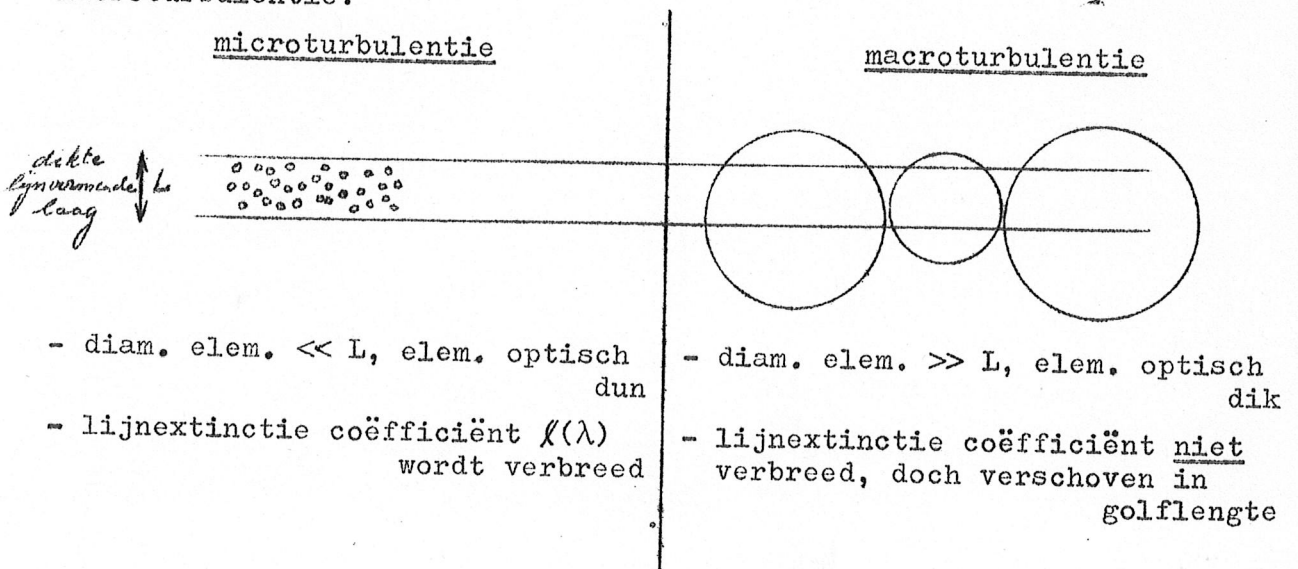
Voor radiële snelheden van sterren als geheel verwijzen wij naar hoofdstuk V. Hier bekijken wij alleen de snelheidsvelden in de individuele sterren zelf.

Macroturbulentie: Wanneer men het spektrum van de zon opneemt bij een goede kwaliteit van het zonsbeeld, dan ziet men "kronkellijnen". Blijkbaar correspondeert een bocht naar lange golflengten met een gebied op de zon waar de lijn vormende laag naar beneden beweegt (+). De snelheden variëren van enkele tienden tot enkele  $\text{km s}^{-1}$ ; de grootte van de gebieden van een half tot een paar duizend km. Het patroon wisselt met de tijd (zie verder § III.4.2.1.)



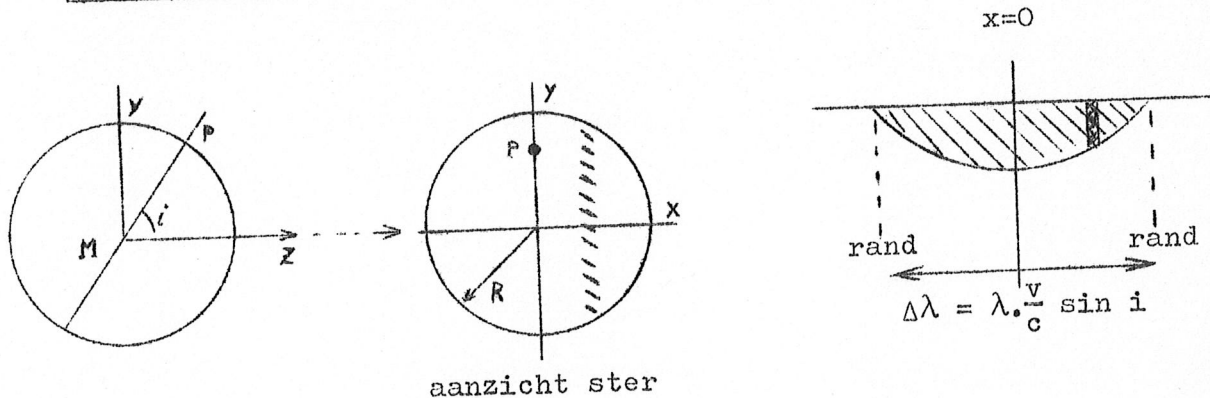
Macroturbulentie: een snelheidsveld waarin de elementen aanzienlijk

groter zijn dan de dikte van de lijnvormende laag. Wordt macroturbulentie slechts gedeeltelijk opgelost (zon) of in het geheel niet (sterren) dan ontstaan verbrede spektrale lijnen. <sup>V</sup>ergelijking tussen micro- en macroturbulentie:



Gevolg voor sterke lijnen (op schouder of dempingstuk groeikromme):  
 - kernen blijven even diep,  $w_\lambda$  neemt toe met toenemende  $v_{\text{micro}}$  | -  $w_\lambda$  verandert niet, dus kernen worden minder diep met toenemende  $v_{\text{macro}}$ .

Rotatie van sterren. Rotatieas PM in vlak yz, z naar waarnemer gericht

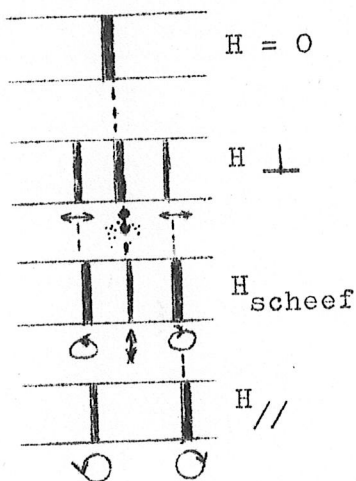


hellingshoek  $i$ , snelheid aan equator  $v$ . Men kan aantonen dat strookjes op de sterschijf // y-as (gearceerd) dezelfde snelheid  $\frac{x}{R} \cdot v \sin i$  t.o.v. de waarnemer hebben.

Wanneer de snelheid  $v \sin i$  de thermische + turbulente snelheden flink overtreft, ontstaan ondiepe komvormige lijnen, met een totale breedte  $\Delta\lambda = \lambda \cdot (v/c) \cdot \sin i$ . Door vergelijking van waargenomen profielen met profielen berekend voor verschillende waarden van  $v \sin i$  kan men  $v \sin i$  bepalen, met een nauwkeurigheid van ongeveer  $25 \text{ km s}^{-1}$ . Door aan te nemen dat de hellingshoeken  $i$  toevallig verdeeld zijn, vindt men een opvallend verband tussen  $v$  en het spectrale type.

B :	$v = 200 - 250 \text{ km s}^{-1}$
A :	150 - 200 "
F :	25 - 100 "
G, K, M :	< 25 "

Het dopplereffekt is ook van groot belang bij het onderzoek van veranderlijke sterren (§ III.3.2.).



Magnetische velden kunnen gemeten worden met het Zeeman-effekt: wanneer de lichtbron zich in een magnetisch veld bevindt splitsen de meeste spectrale lijnen in een aantal componenten (zie Structuur der Materie § 3D en 3E en § I.2.3.2). De lijnen die in drie componenten splitsen zijn het meest geschikt voor meting. Wanneer  $H \perp$  gezichtlijn, dan zijn er twee symmetrisch verschoven componenten ( $\sigma$ ) en



een ~~om~~vergeschoven komponent ( $\pi$ ). Wanneer  $\vec{H} //$  gezichtslijn dan zijn er alleen de twee symmetrisch verschoven componenten.

De verschuivingen zijn evenredig met  $H$ ; de evenredigheidsconstante hangt van de lijn af en die is bekend uit de natuurkunde. De oriëntatie van  $\vec{H}$  t.o.v. de waarnemer kan worden gevonden uit de intensiteitsverhoudingen en de polarisatie van de componenten (korte toelichting op het college).

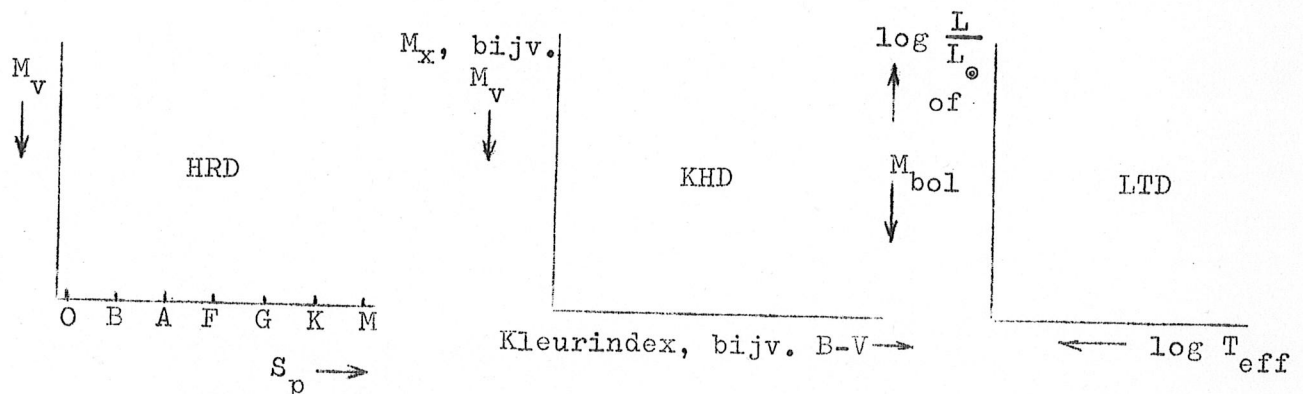
Toepassingen: zon (§ III.4.3.), magnetische sterren (§ III.3.2.).

### III.3. Sterren

#### III.3.1. Klassificatie van sterren; het lichtsterkte-temperatuur

diagram

In § I.2.2.3. is het Hertzsprung-Russell diagram (HRD) en het kleurhelderheidsdiagram (KHD) ingevoerd om sterren twee-dimensionaal te ordenen. Deze diagrammen kunnen in verband worden gebracht met het lichtsterkte-effectieve temperatuordiagram (LTD), waarvan in hoofdstuk II intensief gebruik is gemaakt.



In deze paragraaf bespreken wij de belangrijkste methoden van sterklassificatie en de samenhang tussen de ordinaten en tussen de abscissen van de diagrammen, tegen de achtergrond van het reeds behandelde over modelatmosferen.

De lichtsterkte  $L$  is de totale energie door de ster per tijdseenheid uitgestraald (geproduceerd); de effectieve temperatuur  $T_{\text{eff}}$  is een maat voor de energieflex door het steroppervlak per oppervlakte-eenheid. De straal  $R$  van de ster levert het verband tussen  $L$  en  $T_{\text{eff}}$  volgens

$$L = 4 \pi R^2 \cdot \frac{\sigma T_{\text{eff}}^4}{\pi F(0)} \quad (\text{III},101)$$

Uit Hoofdstuk II weten wij dat  $L$ ,  $R$  en  $T_{\text{eff}}$  volledig bepaald zijn wanneer van de ster bekend zijn: de massa en chemische samenstelling als functie van de afstand tot het middelpunt van de ster.

Alle waargenomen karakteristieken van een ster, vervat in het verloop van de uittredende flux met de golflengte,  $F_\lambda(0)$ , met inbegrip van de profielen van spektrale lijnen, kunnen in principe uit een modelatmosfeer worden berekend. Wij zagen in §§ III.2.2.3 - III.2.2.6 dat een modelatmosfeer volledig bepaald is door

- 1)  $T_{\text{eff}}$ ,
- 2) versnelling zwaartekracht  $g = GM/R^2$ ,
- 3) abundantie van He en eventueel de abundanties van die "metalen", die merkbaar bijdragen tot de produktie van vrije elektronen.

Voor de berekening van lijnprofielen is bovendien de abundantie van het betreffende element nodig. In § III.2.3.4 vermeldden wij al dat de chemische samenstellingen van de atmosferen van verreweg de meeste sterren binnen de nauwkeurigheid van de analyse aan elkaar gelijk zijn.

Reuzen hebben een wat grotere massa  $M$  en een veel grotere straal  $R$  dan dwergen (hoofdrekssterren) van dezelfde  $T_{\text{eff}}$  (wij komen daar aanstands op terug). Gevolg: bij reuzen is de gravitatieversnelling  $g$  veel kleiner dan bij dwergen met dezelfde  $T_{\text{eff}}$ .

Het temperatuurmodel  $T(\tau_0)$  ( $\tau_0$  is de optische diepte bij een bepaalde golflengte, bijv.  $5000 \text{ \AA}$ ) hangt bij stralingsevenwicht sterk af van  $T_{\text{eff}}$ , doch vrijwel niet van  $g$ , dus: reuzen en dwergen met dezelfde  $T_{\text{eff}}$  hebben vrijwel dezelfde  $T(\tau_0)$ . Daarentegen hangen de drukken  $P_g$ ,  $P_e$  sterk van  $g$  af, volgens

$$(III,59b) \rightarrow P_g(\tau_0 = \frac{2}{3}) = \int_0^{\frac{2}{3}} (g / k_0) d\tau_0,$$

dus bij reuzen zullen de drukken  $P_g$ ,  $P_e$  en de dichtheid  $\rho$  bij  $\tau_0 \approx \frac{2}{3}$  veel lager zijn dan bij dwergen.

Vraag: Waarom nemen wij  $\tau_0 = 2/3$ ?

Opmerking:  $k_0$  kan toenemen met toenemende  $P_e$  (bijv. bij  $H^-$  absorptie), hetgeen de hierboven beredeneerde drukverlaging dwergen  $\rightarrow$  reuzen enigszins tegenwerkt.

Aangezien over grote spektrale bereiken de golflengte-afhankelijkheid van de continue extinctiecoëfficiënt  $k_\lambda$  wel gevoelig is voor  $T$  doch weinig van  $P_e$  afhangt, zijn de verschillen in de golflengte-afhankelijkheid van het continuüm  $F_{\text{cont},\lambda}(0)$  voor reuzen en dwergen  $T_{\text{eff}}$  klein.

Bij sterren van dezelfde  $T_{\text{eff}}$  domineren in het optische spectrum de lijnen van één ionisatietrap (bijv. bij G2 sterren, als zon: de lijnen van neutrale atomen), gevolg: het globale uiterlijk van het lijnenspectrum hangt sterk van  $T_{\text{eff}}$ , doch weinig van  $g$  af.

Samengevat: Het globale verloop van  $F_\lambda(0)$  hangt sterk van  $T_{\text{eff}}$  doch weinig van  $g$  af. Om sterren met dezelfde  $T_{\text{eff}}$  doch verschillende  $g$  te onderscheiden moet men letten op bepaalde spektrale lijnen die bijzonder gevoelig zijn voor de druk; wij komen daar aanstonds op terug.

Verband tussen een schijnbare magnitude  $m_x$  en  $F_\lambda$ ,  $R$  (straal) en  $r$  (afstand) van de ster:

$$m_x = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{afpraak}}}{\text{const.}_1} - 2.5 \log \int_{\substack{\text{"0"} \\ \text{"\infty"}}} \frac{\pi R^2}{r^2} \cdot F_\lambda \cdot G_{x,\lambda} \cdot d\lambda \quad (\text{III,102a})$$

buiten aardatm. ontvangen monochrom. flux  $\pi F_\lambda$ , vergelijk blz. III.5 bovenaan.

door detector op aarde geregistreeerde flux.

of:

$$m_x = \text{const.}_2 - 5 \log R + 5 \log r - 2.5 \log \int F_\lambda \cdot G_{x,\lambda} d\lambda \quad (\text{III,102b})$$

$G_{x,\lambda}$  is de gevoeligheidskromme voor de combinatie  $x$  van detector (fotografische plaat of fotocel), filters en aardse dampkring.

Voorbeelden:

1. veel gebruikt fotografisch systeem:

fotografische magnitude  $m_{\text{fot}}$  :  $\lambda_{\text{max}} = 4300 \text{ \AA}$  (blauwviolet gevoelige platen)

foto-visuele magnitude  $m_{\text{vis}}$  :  $\lambda_{\text{max}} = 5400 \text{ \AA}$  (op platen ook gevoelig in geel, + kleurfilter).

2. veel gebruikt foto-elektrisch systeem:

$$\begin{cases} U & \lambda_{\text{max}} = 3500 \text{ \AA} \text{ (UV)} \\ B & \lambda_{\text{max}} = 4350 \text{ \AA} \text{ (blue)} \\ V & \lambda_{\text{max}} = 5550 \text{ \AA} \text{ (visual!)} \end{cases}$$

De bolometrische magnitude  $m_{\text{bol}}$  wordt gedefinieerd voor een detector met een gelijke gevoeligheid voor alle golflengten, buiten de dampkring van de aarde, dus met  $G_{\text{bol},\lambda} = \text{constant}$ . Uit III,101 en 102b volgt

$$\begin{aligned} m_{\text{bol}} &= (\text{const.})_3 + 5 \log r - 2.5 \log L = \\ &= (\text{const.})_4 + 5 \log r - 5 \log R - 10 \log T_{\text{eff}} \quad (\text{III,103c}) \end{aligned}$$

Voor sterren waarbij het belangrijkste deel van de fluxkromme  $F_\lambda$  in het optische venster van de aardatmosfeer valt (zichtbaar, nabij IR) kan men  $m_{\text{bol}}$  bepalen uit fluxmetingen op aarde door correctie voor de extinctie in de aardatmosfeer (voor  $4000 \lesssim T_{\text{eff}} \lesssim 6000 \text{ K}$  : sterren als zon of wat koeler).

Temperatuur criteria: kleurindices  $\Delta m_{\lambda_1, \lambda_2}$ , Zo'n kleurindex wordt als volgt gedefinieerd:

$$\Delta m_{\lambda_1, \lambda_2} \equiv m_{\lambda_1} - m_{\lambda_2}, \text{ met piekgolflengten } \lambda_1 < \lambda_2. \quad (\text{III}, 103a)$$

Uit (III,102b) volgt:

$$\Delta m_{\lambda_1, \lambda_2} = \text{const.} \cdot 5 - 2.5 \log \frac{\int F_{\lambda} G_{1, \lambda} d\lambda}{\int F_{\lambda} G_{2, \lambda} d\lambda} \quad (\text{III}, 103b)$$

Uit het voorgaande blijkt dat zo'n kleurindex weinig van de druk (van g) afhangt. Veel gebruikte kleurindices:

fotografisch : (colour index)  $CI \equiv m_{\text{fot}} - m_{\text{vis}}$

foto-elektrisch:  $B - V$  (en daarnaast  $U - B$ )

Vraag: Beredeneer dat

t.g.v. de te-

kenafsprak in

(III,103a) alle

kleurindices  $\Delta m_{\lambda_1, \lambda_2}$

toenemen met afnemen-

de  $T_{\text{eff}}$ .

Opmerking: De magni-

tuden  $m_{\text{vis}}$

en  $V$  zijn vrijwel aan

elkaar gelijk. De con-

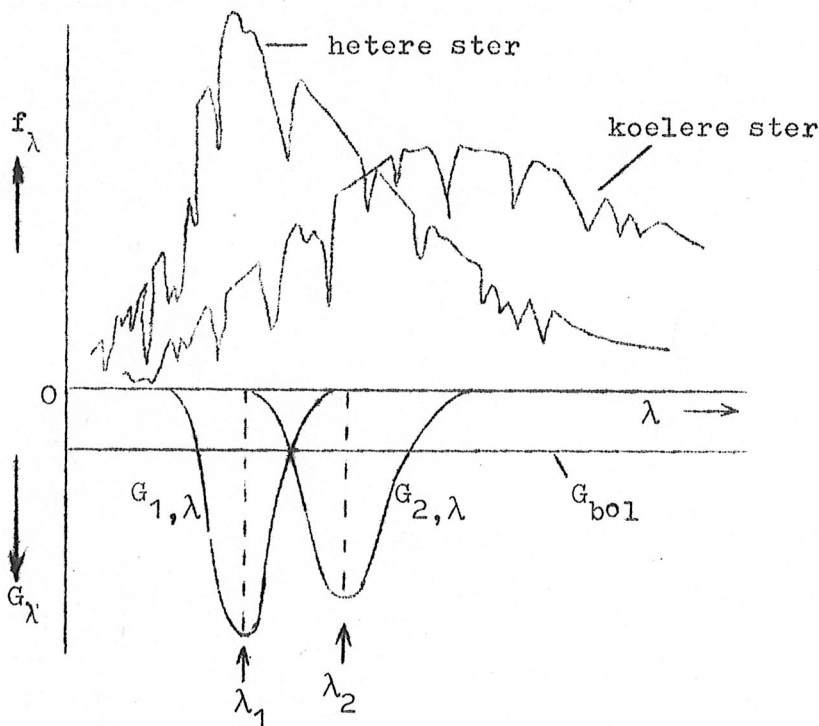
stante in (III,102)

wordt vastgelegd door

een aantal standaard-

sterren, waarvoor men

zo goed mogelijk sa-



menhangende visuele magnituden heeft afgesproken. De overige magnitudeschalen worden daarmee verbonden door de (willekeurige) eis dat alle magnituden aan elkaar gelijk zijn voor A<sub>0</sub>-sterren. Dus:  $\Delta m_{\lambda_1, \lambda_2} = 0$  voor A<sub>0</sub> sterren.

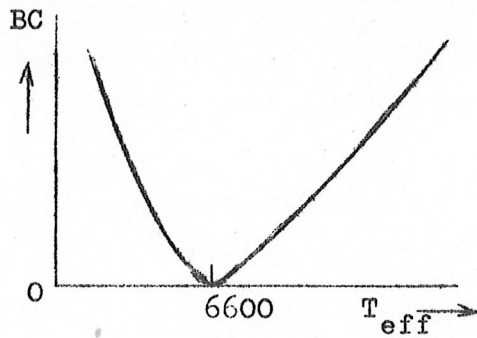
Een bijzondere "kleur"-index is de bolometrische correctie:

$$BC \equiv m_{\text{vis}} - m_{\text{bol}} \quad (\text{III}, 104)$$

De tekenafsprak bij (III,103) faalt hier, zodat sommigen de BC tegengesteld definiëren. Ga na, dat  $BC(T_{\text{eff}})$  een minimum zal vertonen.

Men definieert nu de constante in de  $m_{\text{bol}}$  schaal door te eisen:

$BC \geq 0$ . (Daar komt uit:  $BC = 0$  voor  $T_{\text{eff}} \approx 6600 \text{ K}$ , een F5 ster).



Herinnering: onder een absolute magnitude  $M_x$  verstaan wij de magnitude die de ster kan hebben op een afstand van 10 parsec (dus met parallax  $p = 0.1$ ).

$$(III,102b) \rightarrow M_x - m_x = 5 - 5 \log r \quad (\text{in parsec}) = \\ = 5 + 5 \log p \quad (\text{in boogsec.}) \quad (III,105)$$

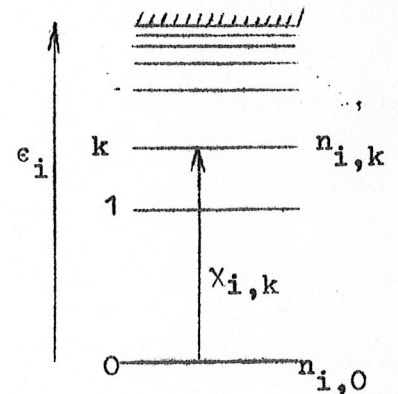
Uit de definitie en schaalconstante van  $m_{bol}$  volgt:

$$M_{bol} = 4,72 - 2,5 \log (L/L_{\odot}) \quad (III,106)$$

met  $L_{\odot} = 3,9 \times 10^{33} \text{ erg} \cdot \text{s}^{-1}$ . Daarmee is de relatie tussen de voor LTD gebruikte ordinaten vastgelegd.

De spektrale klassificatie (Sp) is in de eerste plaats een temperatuurklassificatie - door de reeks O, B, A, F, G, K, M (eventueel met decimale onderverdeling) neemt  $T_{eff}$  monotoon af. Wij lichten dit met enkele voorbeelden toe: wij bekijken de atoom- en ionspektra van een element E, totale deeltjesdichtheid  $N_E$ , deeltjesdichtheid ionen trap i in  $k^{de}$  aangeslagen toestand  $n_{i,k}$ , totale dichtheid ionen in trap i:

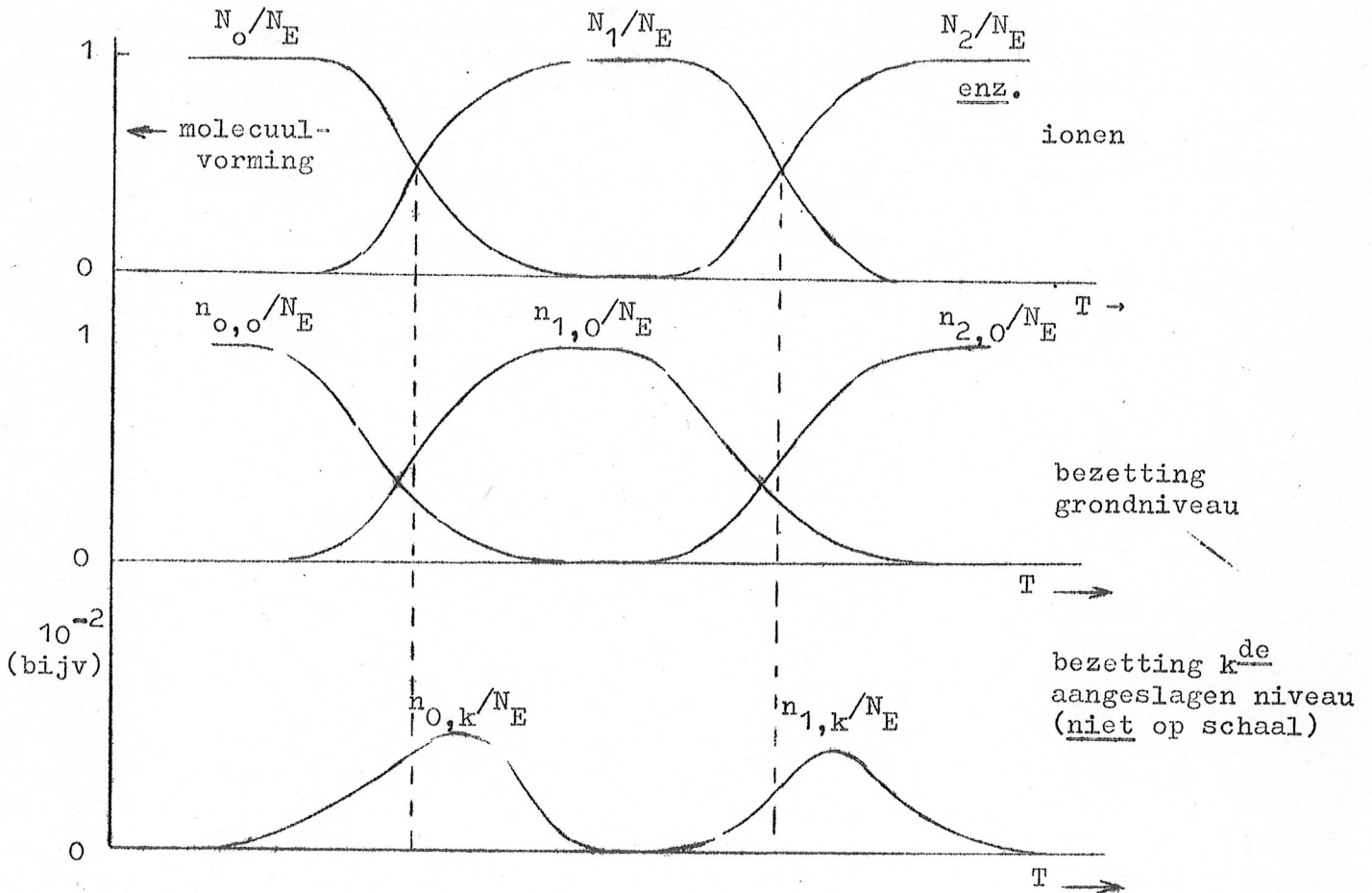
$N_i = \sum_k n_{i,k}$ . In de hierna volgende figuur stelt de eerstvolgende strook de met Saha (III,58) berekende relatieve concentraties van de ionen  $N_i/N_E$  voor. Merk op dat bij een combinatie  $(T, P_e)$



hoogstens twee opeenvolgende ionisatietrappen gelijktijdig optreden. De ligging van  $N_i/N_E$  als  $f(T)$  wordt bepaald door de ionisatiepotentialen  $\epsilon_{i-1}$  en  $\epsilon_i$  (bij  $N_0/N_E$ : alleen door  $\epsilon_0$ ), en ook door  $P_e$ . Het aantal ionen in de grondtoestand  $n_{i,0}$  is vrijwel gelijk aan het totale aantal ionen, totdat de volgende ionisatie inzet, want dan neemt de bezetting van de aangeslagen niveaus toe. De top van de bezetting van een aangeslagen niveau  $n_{i,k}/N_E$  ligt bij een temperatuur waarbij het element zich al voor een belangrijk deel in de volgende ionisatietoestand  $(i+1)$  bevindt. De vorm van  $n_{i,k}/N_E$  hangt, via de wet van Boltzmann vooral af van de excitatiepotentiaal  $\chi_{i,k}$ .

Voorbeelden: Ca ( $\epsilon_0 = 6.11 \text{ eV}$ ,  $\epsilon_1 = 11.87 \text{ eV}$ ):

Ca II, H en K lijnen (3934 en 3968 Å) (uit het grondniveau van  $\text{Ca}^+$ ): worden zichtbaar bij A<sub>0</sub>, nemen toe in sterkte door typen F en G, nemen



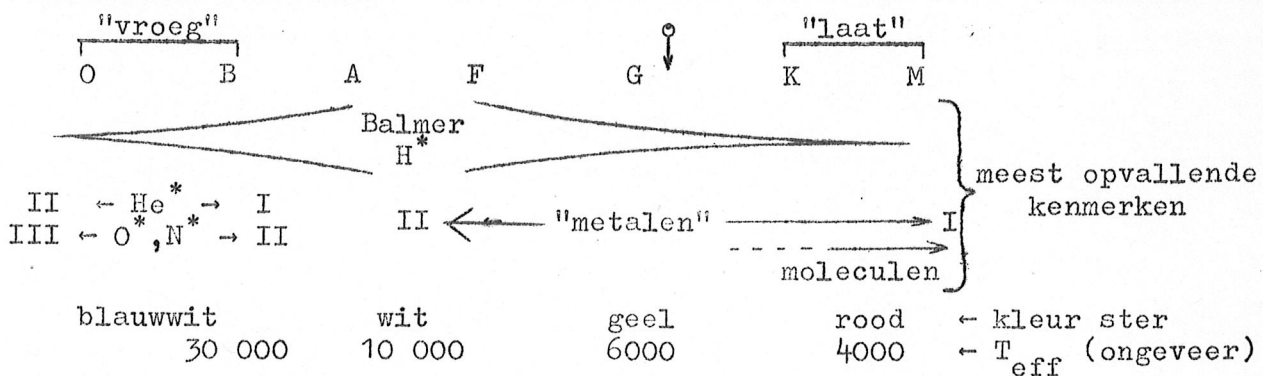
weer af van  $K \rightarrow M$ . Verklaring: vóór  $A_o$  is Ca tweevoudig geïoniseerd. Bij  $M$  is Ca neutraal.

Ca I 4226 Å : verschijnt zwak bij spektrale type F, neemt zeer sterk toe door  $K \rightarrow M$ .

Balmerlijnen H ( $\chi_{0,1} = 10.15$  eV,  $\epsilon_o = 13.60$  eV) : max. bij A3, nemen af door  $B \rightarrow O$  omdat H zeer sterk geïoniseerd wordt, nemen af door  $F \rightarrow G \rightarrow K \rightarrow M$  omdat de bezetting van het aangeslagen niveau sterk afneemt.

Wanneer een element geheel neutraal is neemt bij afnemende temperatuur de molecuulvorming met abundante elementen (H, O vooral) toe.

Schematisch overzicht: (\* betekent: lijnen tussen aangeslagen niveaus)



Vragen:

1. Waarom zijn Ca II , H en K lijnen in B-sterren verdwenen, terwijl de Balmerlijnen van H nog steeds goed zichtbaar zijn? (twee redenen!)
2. Waarom is He I 4471 Å ( $\chi_{0,k} = 20.87$  eV  $\epsilon_0 = 24.58$ ) in A sterren verdwenen, terwijl de Balmerlijnen daar juist zeer sterk zijn?
3. Een lijn treedt op in G sterren, neemt voortdurend in sterkte toe tot K5 en neemt daarna weer af. Wat voor een soort lijn zou dat kunnen zijn?

Lichtsterkte classificatie (LC = Luminosity class)

Een Balmerlijn, bijv.  $H_{\gamma}$ , blijkt in het spektrum van een  $A_3$  dwerg veel bredere vleugels te hebben dan in het spektrum van een  $A_3$  reus. Verklaring: bij een dwerg (grotere  $g$ ) zijn de drukken in de lijnvormende laag veel groter dan bij een reus, daardoor is de drukverbreding van de daarvoor zeer gevoelige Balmerlijn veel groter (§ III.2.3.3). De breedte van de vleugels voor  $H_{\gamma}$  is daarom een heel gevoelig criterium voor  $P_e$ , dus voor  $g$  in B, A en F sterren.

Vraag: waarom niet voor andere spektrale typen?

Voor andere spektrale typen gebruikt men de sterkteverhouding van een tweetal naburige lijnen van verschillende ionisatietrappen omdat in Wet van Saha de elektronendruk  $P_e$  optreedt (III,58).

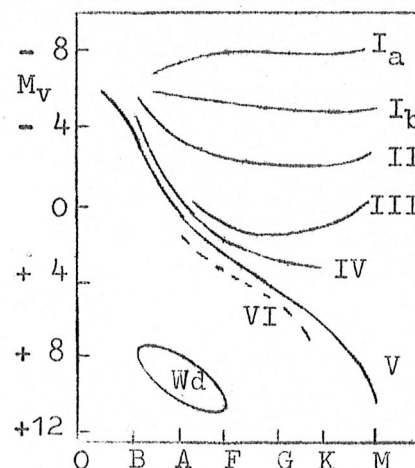
Vraag: Bij voorkeur gebruikt men lijnen van verschillende ionen van hetzelfde element; waarom? Doch dat lukt niet altijd.

Merk op dat men voor de verschillende spektrale typen verschillende lichtsterkte (of  $g$ -) criteria nodig heeft; de spektrale classificatie gaat vooraf aan de lichtsterkte classificatie.

Omdat de sterkten van Balmerlijnen en de sterkteverhoudingen van lijnen van verschillende ionisatietrappen ook bij de spektrale classificatie gebruikt worden, zijn de spektrale classificatie en de lichtsterkte-classificatie niet volkomen onafhankelijk.

Aan de hand van een aantal criteria (standaardsterren) onderscheidt men:

LC	(luminosity class)
Ia	Extreme superreuzen
Ib	Superreuzen
II	Heldere reuzen
III	Reuzen
IV	Subreuzen
V	Dwergen-hoofdreekssterren
VI	Subdwerfen
Wd	Witte dwergen



De ijking  $LC \rightarrow M_v$  dient te geschieden aan de hand van sterren met bekende afstanden: laat veel te wensen over, vooral voor de superreuzen (waarom?).

Belangrijke mogelijkheid om "spektroskopische paralaxen" te bepalen:

$$\left. \begin{array}{l} \text{spektrum} \rightarrow LC \rightarrow M_v \\ \text{fotometrie} \rightarrow m_v \end{array} \right\} \rightarrow p \text{ met (III.105); vergelijk ook I.2.2.2.}$$

Toepasbaar op groot aantal sterren van zeer uiteenlopend type. De nauwkeurigheid wordt begrensd door de ijking van de LC criteria. (Bovendien kan interstellair extintie systematisch fouten geven, zie onder).

Betrekkingen tussen abscissen en ordinaten van LTD, KHD en HRD.

Slechts voor de zon en een zeer beperkt aantal sterren kan men de  $T_{\text{eff}}$  vrij direkt bepalen: wanneer men door metingen kan vinden:

$$\left. \begin{array}{l} \text{de schijnbare } m_{\text{bol}} \text{ (zie boven)} \\ \text{de afstand } r \text{ (trigonometrische parallax)} \\ \text{de straal } R \text{ (Interferometrisch, bedek-} \\ \quad \text{kingsveranderlijke)} \end{array} \right\} \rightarrow T_{\text{eff}} \text{ met (III.103c)}$$

Voor alle overige sterren kan men de  $T_{\text{eff}}$  (of  $\pi F$ ) alleen vaststellen door in een kwantitatief onderzoek het spektrum te vergelijken met spektra berekend met theoretische stermodellen. Het best passende model levert dan  $T_{\text{eff}}$  en  $g$  voor de betreffende ster.

Aangezien Sp en LC berusten op schattingen uit fotografische spektrogrammen met het oog kunnen deze parameters niet direkt uit modellen worden berekend. Wel kan men voor goed onderzochte sterren het verband vastleggen tussen  $(Sp, LC) \leftrightarrow (T_{\text{eff}}, g)$ . Zo ook:

$$\text{kleurindices, bijv. (B-V)} \leftrightarrow (T_{\text{eff}}, (g))$$

De betrekkingen tussen Sp en de kleurindices, bijv. het verband  $Sp \leftrightarrow B-V$  kan men natuurlijk geheel empirisch vaststellen, met LC als parameter. (Mooie figuur: Unsöld: Der neue Kosmos p. 125).

Het verband tussen  $M_v$  en  $M_{\text{bol}}$  wordt gegeven door de bolometrische correctie

$$\begin{aligned} BC &= M_v - M_{\text{bol}} = m_v - m_{\text{bol}} = \\ &= \text{const.} - 2.5 \log \int F_{\lambda} \cdot G_{v,\lambda} d\lambda + 10 \log T_{\text{eff}} \end{aligned} \quad (\text{III,104})$$

Voor sterren waarbij  $T_{\text{eff}}$  niet veel van de zon verschilt kan men behalve  $m_v$  ook  $m_{\text{bol}}$  vrij direkt meten, waarmee BC bekend is. Voor veel hetere of koelere sterren kan  $\int F_{\lambda} \cdot G_{v,\lambda} d\lambda$  weliswaar uit de waargenomen  $F_{\lambda}$  worden afgeleid doch  $T_{\text{eff}}$  moet aan een model worden ontleend.

Samengevat: Abscissen ("temperatuurmaten") en ordinaten ("lichtsterkte maten") van LTD, KHD en HRD zijn op elkaar te herleiden. Voor bepaalde problemen laat de nauwkeurigheid van de transformatie  $LTD \leftrightarrow (KHD, HRD)$



te wensen over, vooral voor zeer hete of zeer koele sterren. In de onderstaande tabel is het verloop van Sp, B-V, U-B als functie van  $T_{\text{eff}}$  weergegeven voor hoofdreekssterren (V) en van reuzen (III).

$T_{\text{eff}} =$	5500.	5000	4500	4000	3500	
Sp {	V	G4	G8	K2	K6	M0
	III	F9	G3	G7	K1	K5
B-V {	V	0.68	0.80	0.95	1.11	1.30
	III	0.63	0.76	0.92	1.11	1.40
U-B {	V	0.17	0.36	0.57	1.06	1.23
	III	0.27	0.44	0.61	1.00	(1.6)

Merk op dat het spektrale type niet alleen van  $T_{\text{eff}}$  doch ook nog van LC (dus  $g$ ) afhangt, zoals op grond van het voorgaande te verwachten is: lijnsterkten hangen ook van  $P_e$  af, Sp en LC criteria niet onafhankelijk. Anderzijds hangen de kleurindices B-V en U-B naar verwacht was heel weinig van LC af, omdat het continue spektrum vrijwel niet van  $P_e$  afhangt.

Opgave: Uit bovenstaande tabel blijkt dat een reus wat "vroeger" in de spektrale reeks wordt geplaatst dan een dwerg met dezelfde  $T_{\text{eff}}$ . Maak dit kwalitatief aannemelijk (daarbij te bedenken dat bij G en K sterren de spektrale klassificatie voornamelijk geschiedt door vergelijking van atoom- en ionlijnen van "metalen").

Tot dusverre hebben wij aangenomen dat de sterren vrijwel dezelfde chemische samenstelling hebben. Er zijn echter sterren met duidelijk afwijkende abundanties en daarvoor gaat de gebruikelijke klassificatie (Sp, LC) niet op.

Voorbeeld: Subdwergeren (VI). Blijkbaar zeer oude sterren met veel minder "metalen" dan zon. Complicaties: een subdwerger kan op grond van metaallijnen over een A5 ster worden aangezien en op grond van Balmerlijnen als een F0 ster. Doordat de metaallijnen veel zwakker zijn, zijn de continue spektra veel minder gestoord dan bij normale dwergen; vooral naar de kleine golflengten is het verschil opvallend. Gevolg: uit de kleurindices B-V en U-B lijken subdwergeren blauw-violetter dan normale dwergen, doch dit hoeft niet te betekenen dat subdwergeren heter zijn dan hoofdreekssterren met dezelfde  $M_{\text{bol}}$ .

Bij (veelkleuren-) fotometrie kan extinctie en roodverkleuring door interstellair stof nog als complicatie optreden; dit treedt vooral op bij ver verwijderde sterren die dicht bij het melkwegvlak staan; meer hierover in hoofdstuk IV. Men definieert kleurexcessen als volgt:

kleurexces = gemeten kleurindex - echte kleurindex, bijv.:

$$E_{B-V} = (B-V)_{\text{gemeten}} - (B-V)_{\text{intrinsiek}} \quad (\text{III.106})$$

De intrinsieke kleurindex kan men alleen vaststellen als men bijv. (Sp, LC) kent. Aangezien men de relaties tussen de verschillende kleurindices voor niet-verkleurde en niet-verzwakte sterren kent, vallen verkleurde dus verzwakte sterren direkt op. Door eenzelfde golflengteafhankelijkheid in de verzwakking aan te nemen, kan men trachten de gemeten helderheden en kleurindices te corrigeren.

Opgave: Weeg voor- en nadelen van spektrale klassificatie en meting van kleurindices tegen elkaar af.

Wij vatten nog enkele relaties van grootheden van sterren met  $L$  en  $T_{\text{eff}}$  samen, die reeds bekend zijn uit de voorafgaande hoofdstukken en dit hoofdstuk

#### Sterdiameters

Uit (III.102c) volgt:

$$M_{\text{bol}} = M_{\text{bol}_{\odot}} + 10 \log T_{\text{eff}_{\odot}} - 5 \log \frac{R}{R_{\odot}} - 10 \log T_{\text{eff}} \quad (\text{III.107})$$

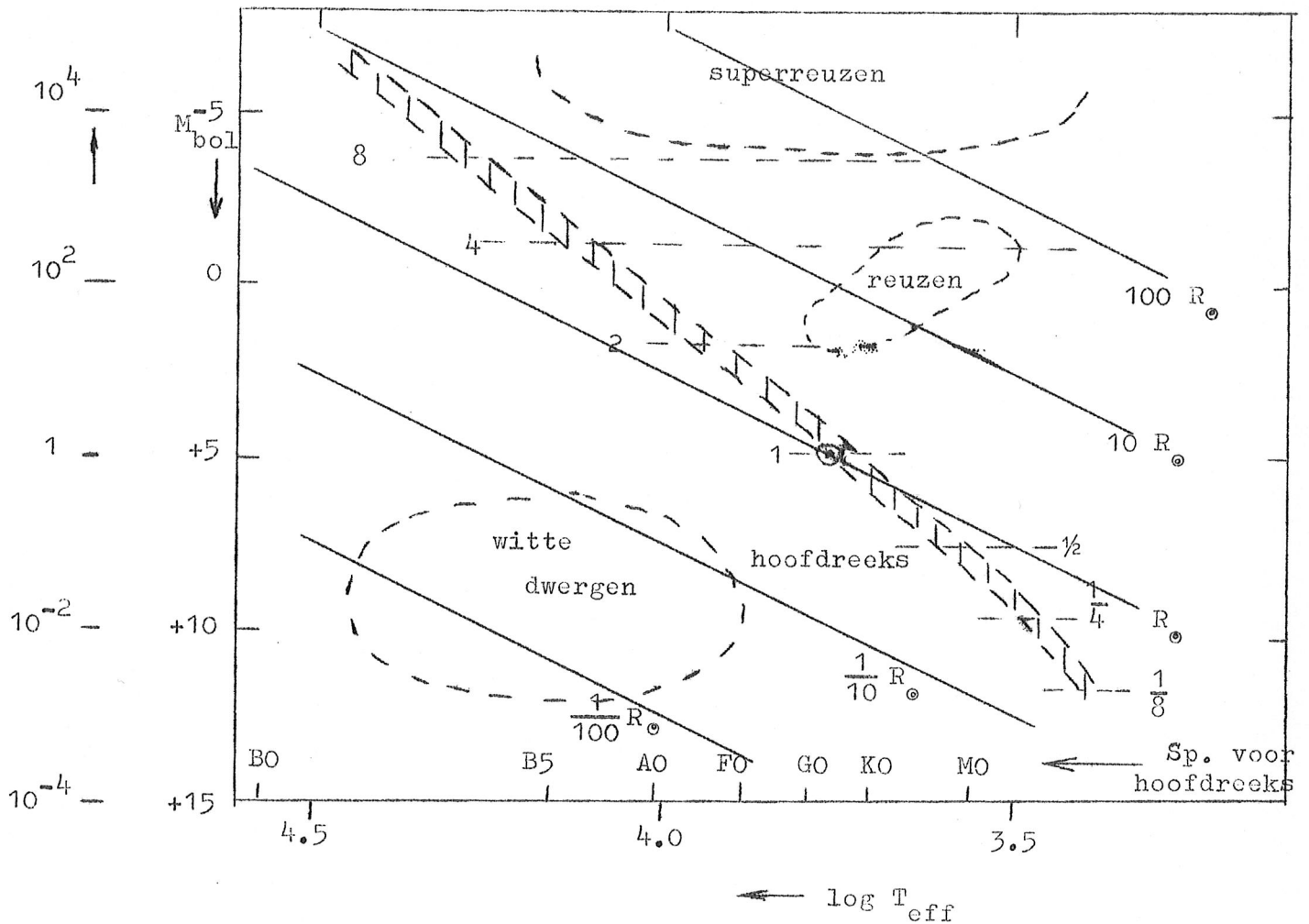
$$\quad \quad \quad \parallel \quad \quad \parallel$$

$$\quad \quad \quad +4.72 \quad + \quad 37.62$$

In het LTD ontstaat een schaar evenwijdige rechten met  $R/R_{\odot}$  als parameter - zie dunne getrokken lijnen in figuur op volgende bladzijde. Transformatie van lijnen van gelijke  $R/R_{\odot}$  naar HRD of KHD levert een schaar wat verbogen krommen op. Het is belangrijk de theoretische waarden voor  $R/R_{\odot}$  te vergelijken met empirisch bepaalde diameters (interferometrisch, uit bedekkingsveranderlijken (hoofdstuk V) of uit sterbedekkingen door maan).

Massa's. Uit waarnemingen van een aantal dubbelsterren kan men de massa van de componenten bepalen (§ 1.2.4, Hoofdstuk V); uit de resultaten komt een massa-lichtsterkte relatie te voorschijn (§ II.6.5):

$\mathcal{M}(M_{\text{bol}})$ , die voor de hoofdreeks en voor reuzen geldt, doch bijv. niet voor witte dwergen. In de figuur op de volgende bladzijde zijn lijnen van gelijke massa, uitgedrukt in  $\mathcal{M}_{\odot}$ , als dunne streeplijnen aangegeven. Met de theorie van sterevolutie kunnen wij deze min of meer horizontale lijnstukjes begrijpen voor  $\mathcal{M} > \mathcal{M}_{\odot}$ : het zijn stukken van evolutiesporen (§ II.8.2). Ook is het duidelijk dat de witte dwergen sterk afwijken van het  $\mathcal{M}(M_{\text{bol}})$  verband van de hoofdreeks.



Rotatiesnelheden: Wij zagen in § III.2.3.5 dat de gemiddelde rotatiesnelheid langs de hoofdreeks van boven naar beneden afneemt, die afname is zeer sterk over het spectrale type  $F_0 \dots F_9$ . Ook de gemiddelde rotatiesnelheden voor reuzen zijn in LTD in te vullen.

Samenvatting: Dat "jonge" sterren gemiddeld snel roteren is te begrijpen uit de contractie van sterren in een turbulent medium. Blijkbaar wordt de rotatie van een ster op de hoofdreeks geremd, (door magnetische remming  $\rightarrow$  overdracht impulsmoment aan omringende materie?) waardoor oude hoofdreekssterren G  $\dots$  M slechts heel langzaam roteren. Stopt men het impulsmoment van het gehele planetenstelsel in zon, dan zou deze een rotatiesnelheid van 370 in plaats van  $2 \text{ km sec}^{-1}$  hebben! Bovendien: contraherende sterren die vlak bij de hoofdreeks gekomen zijn (T Tauristerren, § III.3.2.3 en § II.7.6) hebben inderdaad hogere rotatiesnelheden dan de hoofdreekssterren.

### III.3.2 Intrinsiek veranderlijke sterren

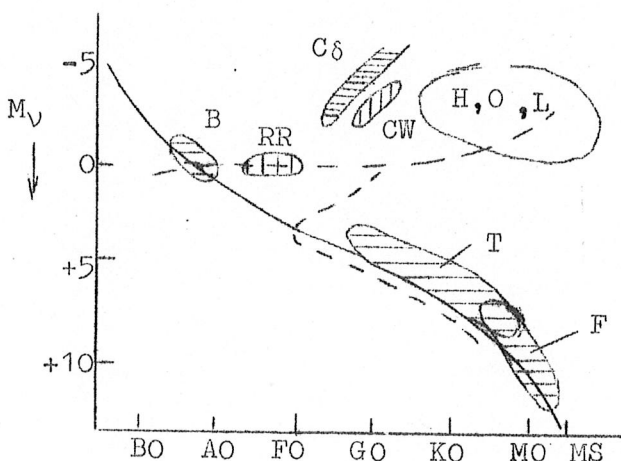
De meeste sterren zijn stabiel. Een minderheid toont duidelijk waarneembare veranderingen, in de helderheid, of het spectrum, of beide. Het meest opvallend zijn sterren waarvan de helderheid verandert

("veranderlijke sterren").

Deze sterren zijn gecatalogiseerd volgens het volgende schema: wanneer de ster geen klassieke aanduiding heeft ( $\delta$  Cephei, Algol) plaatst men vóór de naam van het sterrebeeld, (in volgorde van ontdekking):

R, S, T, ..... Z; RR, RS, ..... RZ; SS, ST, ..... SZ, ....., .... ZZ (totaal 334 mogelijkheden per sterrebeeld. Daarna V 335, V 336, ..... Voorbeelden: T Tauri; RR Lyrae, RW Aurigae.)

De bedekkingsveranderlijken worden in hoofdstuk V genoemd; wij bekijken hier enkele typen intrinsiek veranderlijke sterren. Overzicht:



— as hoofdreeks, reuzentak populatie I  
 --- populatie II (bijv. bolhopen).

Pulserende sterren:

- C $\delta$  Cepheïden I ( $\delta$  Cephei) - populatie I
- CW Cepheïden II (W Vir) - populatie II
- RR Clusterveranderlijken (RR Lyrae) - populatie II
- H,O halfregelmatige, onregelmatige en langperiodieke veranderlijken.

Contraherende sterren: T = T Tauri sterren.

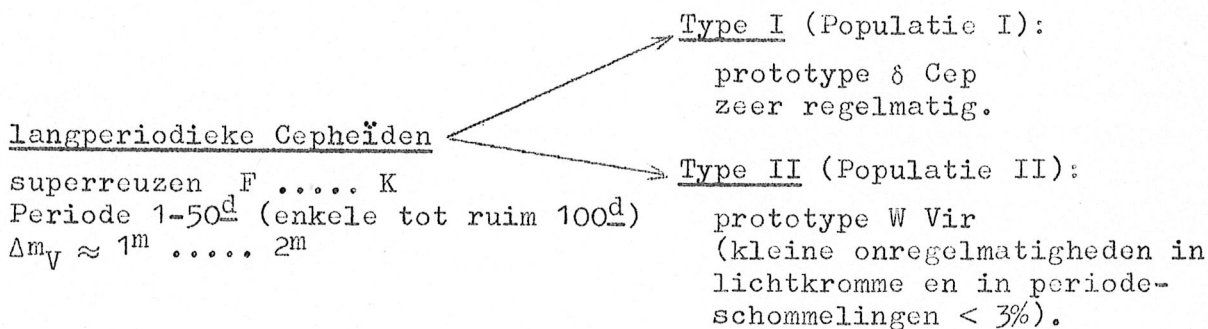
("actieve sterren") F = vlam- en flitssterren.

Magnetische sterren: B

(Eruptieve veranderlijken niet in HRD opgenomen).

III.3.2.1 Pulserende sterren

Wij bespreken hier alleen de meest regelmatige typen:



Met dezelfde periode wisselt: 1) de helderheid;

2) het spectrale type (kleurindex);

3) de radiële snelheid  $v_{rad}$  (uit dopplereffekt).

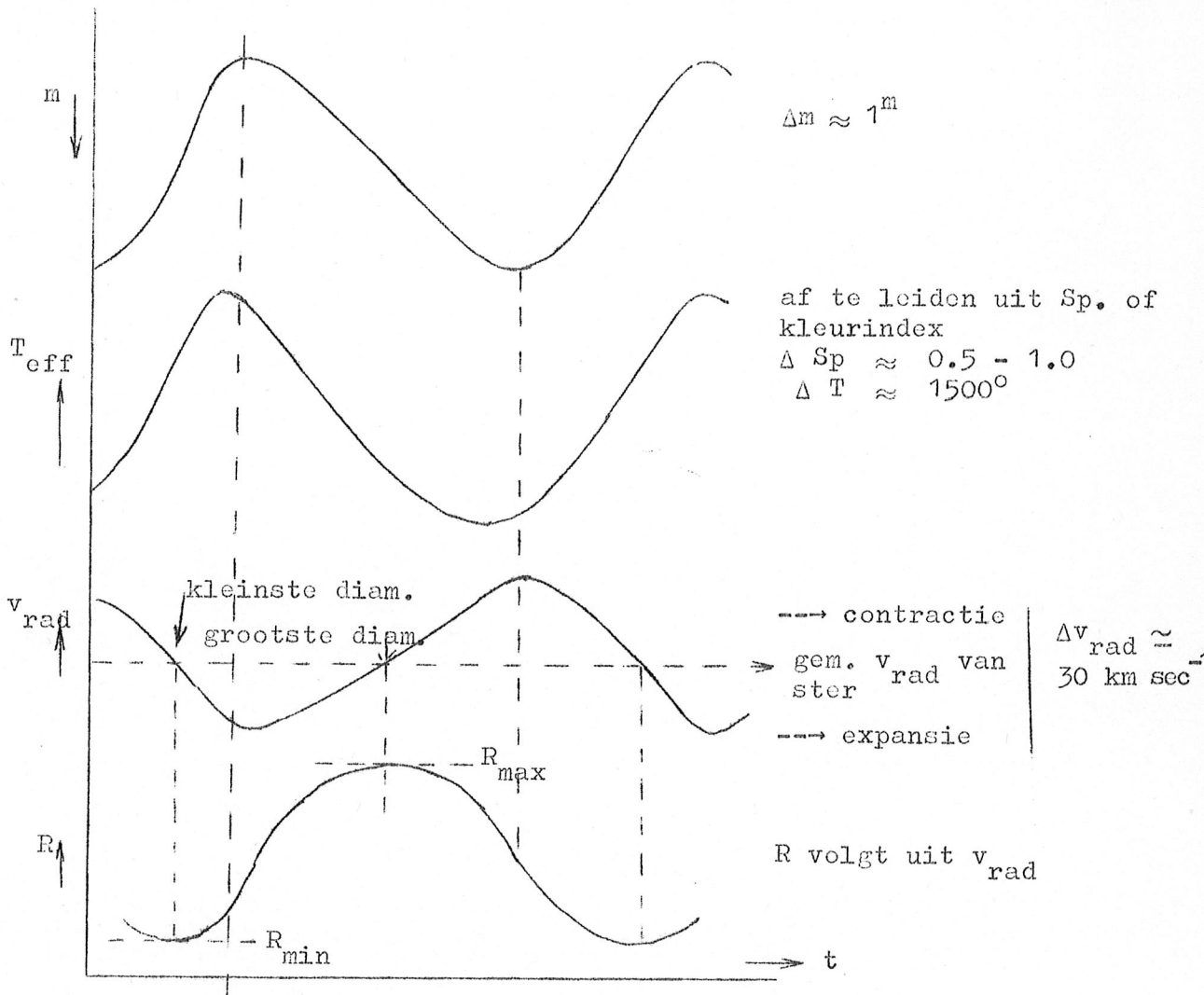
Periode-relaties:

- hoe langer P: des te later Sp (lagere  $T_{\text{eff}}$ ) - (gemiddeld).
- : des te groter M, (R, massa). (periode-lichtsterkte relatie).
- : des te kleiner gemiddelde dichtheid  $\bar{\rho}$  (periode-dichtheid relatie).

Onderscheiding Type I - II: vorm lichtkromme, verband  $\Delta m$ -P, al dan niet optreden van emissielijnen (soms vrij lastig!).

Kortperiodieke Cepheïden = RR Lyrae sterren = clusterveranderlijken. Snel pulserende A-reuzen (B8 ..... F2),  $P < 1^d$ . Uitsluitend (?) populatie II (halo + kern melkwegstelsel, "gap" in horizontale tak HRD van bolhopen).  $\Delta m_V \approx 1^m$ .

Interpretatie van de waarnemingen  $m(t)$ ,  $T_{\text{eff}}(t)$ ,  $v_{\text{rad}}(t)$ :  
 Cepheïden zijn sterren die radiëel pulseren. De maximale/minimale helderheid valt vrijwel samen met hoogste/laagste temperatuur (iets erna) en met de grootste expansie/contractie snelheid - zie volgende figuur. Blijkbaar is de temperatuurvariatie belangrijker voor de helderheidsvariatie dan de variatie van de middellijn.



Uit de kromme  $v_{\text{rad}}(t)$  kan men  $R(t_2) - R(t_1)$  afleiden voor elk paar tijdstippen  $t_2$  en  $t_1$ , en wel in het bijzonder  $R_{\text{max}} - R_{\text{min}}$ . Bedenk dat de expansiesnelheid  $v_{\text{exp}}(t)$  groter is dan  $v_{\text{rad}} - v_{\text{rad}}(t)$ , omdat wij van de omgeving van de sterrand slechts een component van  $v_{\text{exp}}$  waarnemen, dus  $v_{\text{exp}}(t) = k \left[ \overline{v_{\text{rad}}} - v_{\text{rad}}(t) \right]$ , waarbij men vindt  $k \approx 1.4$ , rekening houdend met een plausibele randverzwakking. Nu is

$$R_{\text{max}} - R_{\text{min}} = \int_{t_{R_{\text{min}}}}^{t_{R_{\text{max}}}} v_{\text{exp}}(t) dt, \text{ en}$$

$$R(t) - R_{\text{min}} = \int_{t_{R_{\text{min}}}}^t v_{\text{exp}}(t) dt.$$

Je kunt ook  $R_{\text{max}}/R_{\text{min}}$  afleiden, aangezien uit  $M_{\text{bol}}(R_{\text{max}}) - M_{\text{bol}}(R_{\text{min}})$  volgt  $L(R_{\text{max}}) / L(R_{\text{min}})$ , en

$$\frac{L(R_{\text{max}})}{L(R_{\text{min}})} = \frac{R_{\text{max}}^2}{R_{\text{min}}^2} \cdot \frac{T_{\text{eff}}^4(R_{\text{max}})}{T_{\text{eff}}^4(R_{\text{min}})} \rightarrow R_{\text{max}} / R_{\text{min}}, \text{ omdat ook}$$

$T_{\text{eff}}(t)$  uit Sp. of kleurindex bekend is.

Vervolgens:  $(R_{\text{max}} - R_{\text{min}})$  en  $R_{\text{max}} / R_{\text{min}} \rightarrow R_{\text{max}}, R_{\text{min}}, R(t), \bar{R}$ .

Voor Cepheïden I vindt men  $(R_{\text{max}} - R_{\text{min}}) / \bar{R} \approx 0.1$  en

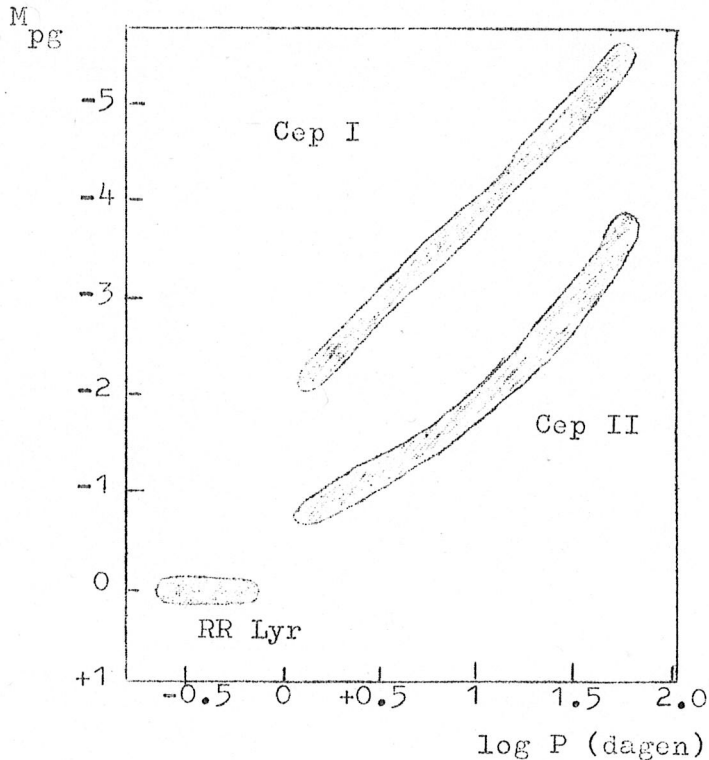
$\bar{R} = 8 \dots 150 R_{\odot}$ , afhankelijk van Sp. Voor Cepheïden II vindt men  $\Delta R / \bar{R} \lesssim 0.5$ .

Merk op dat men uit  $R(t)$  en  $T_{\text{eff}}(t)$  onmiddellijk  $M_{\text{bol}}(t)$  berekent; samen met  $m_{\text{bol}}(t)$  geeft dit, via (III,104), de parallax  $p$ . Behalve in een afgeleide vorm (periode-lichtsterkte relatie, discussie hieronder) heeft men van deze principiëel machtige methode nog maar weinig gebruik gemaakt, omdat voor gele superreuzen geen goede modelatmosferen zijn berekend, die nodig zijn om de betrekkingen tussen BC, kleurindex en  $T_{\text{eff}}$  voldoende nauwkeurig vast te leggen.

#### Over de oorzaak van de pulsaties:

De pulsaties kunnen niet ontstaan door een variabele energieproductie in het inwendige. Blijkbaar moduleert de "mantel" de doorgelaten energiestroom. Dit vereist dat de absorptiecoëfficiënt  $\kappa$  relatief groot is bij maximale compressie (maximale  $\rho$ ): de laag neemt dan energie op die nodig is voor de expansie; bij het expanderen neemt  $\kappa$  af, de flux ontsnapt en de ster contraheert weer, enz. Dit kappa-mechanisme kan werken in het geïoniseerde gas van een convectiezone, waar compressie recombinitie veroorzaakt, waardoor  $\kappa$  oploopt. Berekeningen hebben aangetoond dat regelmatige, niet-uitdempende pulsaties alleen kunnen ontstaan

wanneer de convectiezone èn voldoende dik is èn niet te diep ligt. Daarmee wordt begrijpelijk dat Cepheïden in een smalle (doch eindig brede) strook in het HRD liggen en tevens het bestaan van periode-lichtsterkte en periode-dichtheid relaties.



Massieve sterren gaan tenminste tweemaal door de instabiliteitsstrook (vaaker indien lussen optreden in evolutiesporen).

De periode-lichtsterkte relatie - zie figuur hiernaast -. Van groot belang voor het bepalen van afstanden binnen melkwegstelsel (bepaling middelpunt!) en tot naburige extragalactische stelsels. Verder reikende afstandsmetingen zijn direct of indirect op de Cepheïden geijkt.

(Historische opmerking: tot 1952 meende men dat Cepheïden I in M-P verband samenvielen met Cepheïden II. Sindsdien zijn alle afstanden tot extragalactische stelsels 2x zo groot geworden).

Andere typen pulserende sterren: Er zijn aan de "linkerzijde" van het HRD, boven de hoofdreeks nog pulserende sterren met zeer kleine perioden (enkele uren), (zeer) kleine amplituden en doorgaans met twee of meer perioden [dwergcepheïden of  $\delta$  Scuti-sterren;  $\beta$  Canis Majoris-sterren].

Rechts van de Cepheïdenstrook liggen in het HRD groepen reuzen en superreuzen die in helderheid, in spectraal type en in radiële snelheid variëren, hetgeen weer als radiële pulsatie wordt uitgelegd. Al deze groepen gedragen zich minder regelmatig dan de Cepheïden: meer perioden en soms sterke onregelmatigheden. De hoofdperiode loopt in het HRD van links naar rechts op (als bij de Cepheïden!).

Belangrijke typen: RV Tauri sterren F-G-K, I<sub>b</sub>-II, P = 30 ..... 150<sup>d</sup> lichtkrommen met "zwevingen";

Halfregelmatig veranderlijken: gele en rode reuzen en superreuzen, P = 30<sup>d</sup> ..... meer dan 1000<sup>d</sup>; worden soms in subgroepen onderverdeeld. Sommige onregelmatig, doch met aanwijsbare gemid-

delde periode; andere tonen reeksen regelmatige lichtwisselingen die door onregelmatige intervallen onderbroken worden.

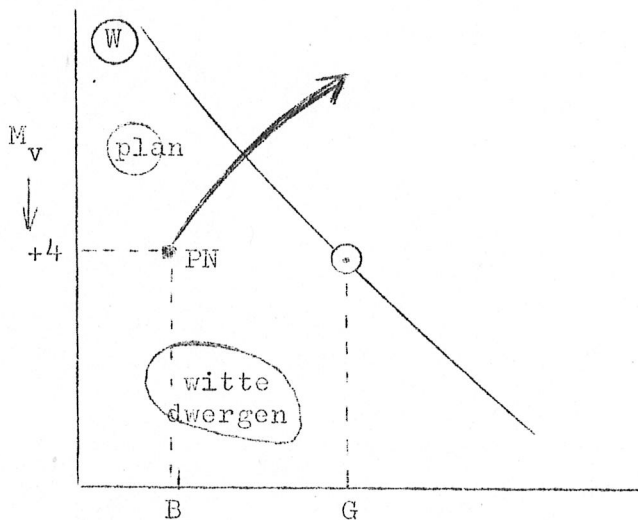
Langperiodieke veranderlijken (of Mira-sterren, naar Mira = O.Ceti), rode (super)-reuzen vaak met emissielijnen (Me) of andere afwijkingen (S,C), zeer grote amplituden  $2^m \dots 6^m$ ;  $P = 80^d \dots 1000^d$ , betrekkelijk regelmatig.

Onregelmatige veranderlijken: rode (super)-reuzen; zowel  $\Delta m$  als  $P$  veranderlijk. Beteldjoeza. Overgangen tussen groepen zijn vloeiend. Het lijkt er op dat alle rode reuzen min of meer veranderlijk zijn.

### III.3.2.2 Eruptieve sterren

Novae, recurrente novae, }  
Supernovae  $\rightarrow$  pulsars } grotendeels besproken in § II.10

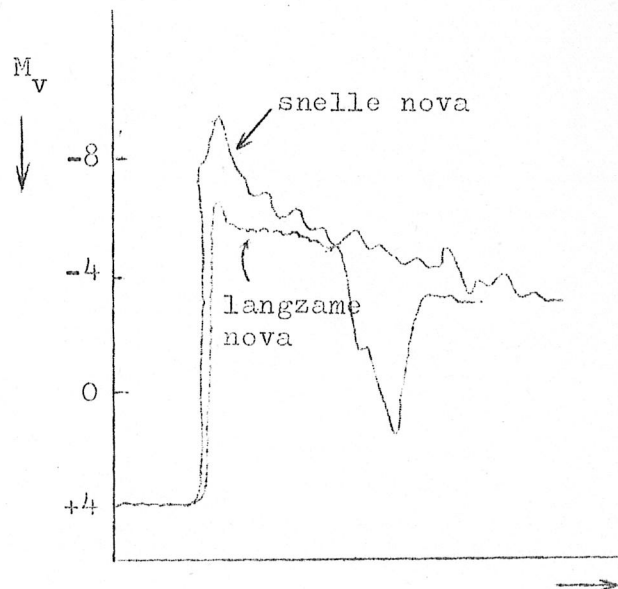
Wij bespreken hier alleen de spektrale verschijnselen bij een nova-uitbarsting en wij wijzen op de Wolf Rayet-sterren die een soort "langdurige novae" blijken te zijn.



PN : prae-novae  
W : Wolf Rayet sterren  
plan: kernen planetaire nevels

Vóór de uitbarsting: B-achtig sterretje, ver onder de hoofdreeks. Tijdens de uitbarsting verandert het spektrum gedurende de fase tot het maximum volgens de aangegeven pijl: ster vlamt op tot een A super-

reus, waarbij de absorptielijnen sterk naar het violet verschoven zijn. Blijkbaar stoot de ster een schil gas uit die ook in de continue straling ondoorzichtig is. De enorme toeneming in lichtsterkte is het gevolg van de enorme opzwellen van het "fotosferische oppervlak"  $\tau_c \approx \frac{2}{3}$ , die het effect van de door expansie verlaagde temperatuur (B  $\rightarrow$  A) sterk overtreft. Enige tijd na





verschijnsel blijkt dus een "oppervlakkige" gebeurtenis te zijn, die de ster na afloop vrijwel ongewijzigd achterlaat; dit in tegenstelling met supernova-uitbarstingen.

Er zijn enkele typen sterren die min of meer "permanent" spectra tonen die doen denken aan novae ná het maximum: zeer brede emissielijnen met (althans bij sommige lijnen) absorptielijnen aan violette kant. Belangrijk type: Wolf-Rayet sterren, apart spectraal type W [weer onderverdeeld]. Temperaturen als O en vroege B sterren, iets onder hoofdreeks? H lijnen verbazingwekkend zwak - evolutie-effect?

Niet alleen bij novae doch ook bij W-sterren: abnormaal hoog percentage geconstateerde dubbelsterren - vermoeden: zijn alle novae en W-sterren dubbelsterren waarvan één component in een laat ontwikkelingsstadium is gekomen?

Links - onder de hoofdreeks bevinden zich ook de kernen van planetaire nevels (Hoofdstuk IV) - zeer hete doch relatief lichtzwakke sterren waaruit materie uitstroomt die de aanschijn geeft van een min of meer symmetrische emissienevel.

Kortom: links-onder het bovenste deel van de hoofdreeks vinden wij objecten die blijkbaar op een late etappe zijn naar het eindstadium witte-dwerg of neutronenster.

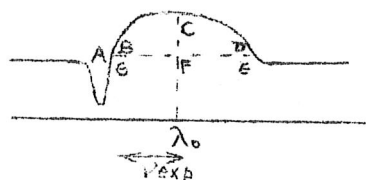
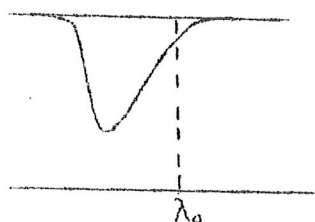
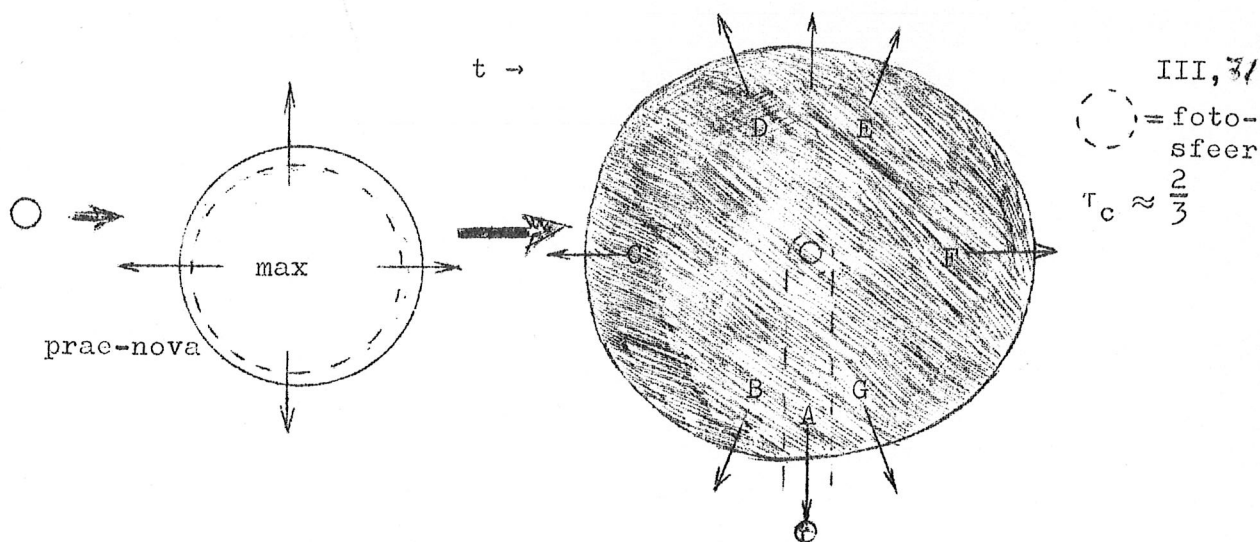
### III.3.2.3 Contraherende sterren, jonge dwergen

T-Tauri sterren: Sp. G ..... M, soms uitgesproken boven de hoofdreeks, in spectrum komen emissielijnen (of emissielijnkernen) voor. Volkomen onregelmatige lichtvariatiës, vaak met flinke amplitude ( $\Delta m = 1 \dots 4^m$ ). Deze sterren komen in (donkere of heldere) wolken interstellaire materie voor, meestal in associaties (vergel. II,5.2) (met of zonder O en B sterren).

Interpretatie: sterren die zich nog in het contractiestadium vóór de hoofdreeks bevinden. De helderheidswisselingen kunnen het gevolg zijn van instabiliteiten in de ster, van voorbijtrekkende donkere wolken of van beide. Voor de hypothese: contraherende sterren pleit bovendien:

- 1) rotatiesnelheden groter dan op hoofdreeks;
- 2) hoge Li-abundantie (Li wordt in kernen van hoofdreekssterren afgebroken).

[ T Tauri sterren worden soms als ondergroep van de RW Aurigae-sterren gezien. De RW Aur sterren strekken zich, met soortgelijke karakteristieken uit tot B-sterren toe. ]



het maximum ziet men nog steeds sterk naar het violet verschoven absorptielijnen, doch daarnaast sterk verbrede, niet verplaatste emissielijnen. De verklaring is dat de expanderende gasschil zo ijl is geworden dat deze schil optisch zeer dun is geworden in het continuüm zodat het fotosferische oppervlak weer inkrimpt en de helderheid in het continuüm weer afneemt. De schil is in de spectrale lijnen optisch veel minder dun dan in het continuüm zodat emissielijnen ontstaan; de figuur verklaart dat deze lijnen zeer breed doch niet verplaatst zijn.

Vraag: De emissielijnen zullen symmetrisch zijn wanneer de schil om de lijnstraling nog optisch dun is. Geef kwalitatief de asymmetrie van de emissielijnen aan wanneer  $\tau_L \gtrsim 1$  is in de gezichtslijn.

Er worden expansiesnelheden tussen  $1000$  en  $2000 \text{ km sec}^{-1}$  gemeten, hetgeen vele malen groter is dan de ontsnappingssnelheid.

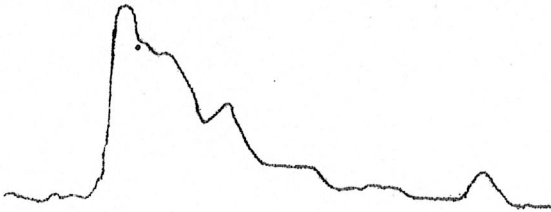
Bij niet te ver verwijderde novae neemt men geruime tijd na de uitbarsting inderdaad een voortdurend uitbreidend neveltje waar. Daaruit kan men de afstand tot de nova schatten en daaruit weer de absolute magnituden in minimum en maximum.

Voorbeeld: Nova Aql. 1918. Na zes maanden zag men het neveltje, dat in diameter aangroeide met  $2''$  per jaar. Uit het spectrum:

$v_{\text{rad}} = 1700 \text{ km sec}^{-1} \rightarrow$  afstand  $360 \text{ pc}$  (kunt U nagaan).

Uit het spectrum blijkt dat de uitgeworpen materie slechts een kleine fractie van de ster uitmaakt ( $\leq 10^{-5} M_{\odot}$ ). Het spectaculaire nova-

Vlam- en flitssterren [UV Ceti - sterren]: hoofdreekssterren (of daarboven) K .. M, vaak spectrale lijnen met emissiekernen. Lichten in aantal seconden zeer fel op ( $1^m$  .....  $6^m$ ), "relaxatie", met secundaire golvingen, in 10 - 100 minuten.



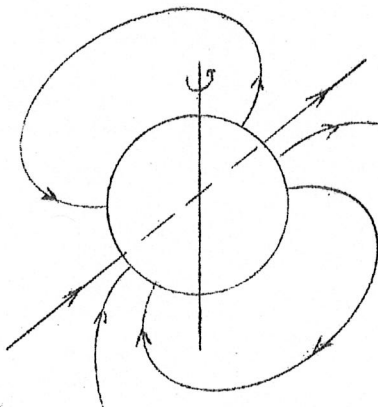
Interpretatie: nog contraherende sterren of zeer jonge hoofdreekssterren. Uitbarstingen: "sterrevlammen" (als zonnevlammen, zie § III.4.3, doch op veel grotere schaal). Bevestiging: radiostraling als bij zonnevlammen.

#### III.2.3.4 Magnetische sterren

Veel A sterren op de hoofdreeks tonen Zeemansplitsingen, dus magnetische velden (500 ..... vele duizenden gauss). Bij veel van deze magnetische sterren vindt men abnormaal sterke lijnen van sommige metalen (Si, Cr, Zr, zeldzame aarden). Meestal ook variaties met de tijd:

- 1) Magnetisch veld verandert periodiek, vaak omslag polariteit (extrem voorbeeld ster 53 Cam: + 3750 ↔ -5400 gauss).
- 2) Vaak varieert spectrum: groep onveranderlijke lijnen: groep in sterkte veranderlijke lijnen - meestal zijn dit de abnormaal sterke lijnen, die soms in twee groepen uiteenvalt die in tegenfase zijn (spectrum variabelen).
- 3) Soms waarneembare helderheidswisseling  $\Delta m < 0.1$  (gevolg van variabele lijnsterkten?). Alle variaties met zelfde periode;  
 $P = 1^d$  .....  $15^d$ .

Men denkt tegenwoordig vooral aan het model van een scheve rotator: als magnetisch veld valt niet samen met rotatieas (het magnetische veld



hoeft helemaal geen dipoolveld te zijn). De variaties in het spectrum verbindt men dan met "gebieden van abnormale lijnvorming" die door het magnetische veld in de fotosfeer van de ster worden vastgehouden (bijv. bij de polen). Is hier sprake van sterk afwijkende abundanties?

Merk op dat in de atmosfeer de magnetische drukken de gasdruk met orden van grootte overtreft. Daarom zal de atmosfeer wel afwijken van de atmosfeer van een sferisch symmetrische ster in hydrostatisch evenwicht:

### III.4 De Zon

#### III.4.1 Uiterlijk

G2 V ster .  $T_{\text{eff}} = 5780^{\circ}$  :  $R = 700\ 000\ \text{km}$  ,  $\bar{\rho} = 5.5\ \text{g cm}^{-3}$

In wit licht:

Schijf met randverzwakking (§ III.2.2.9) → fotosfeer. Rand bij  $\tau_t = 1 \rightarrow \tau = 0.01$  .

Opvallende structuren: zonnevlekken, fakkels (heldere vlokken, in wit licht alleen nabij rand goed zichtbaar, altijd om vlekken, doch treden ook zelfstandig op).

Differentiële rotatie: periode aan equator 24.7 dagen, op  $75^{\circ}$  breedte ruim  $33^{\text{d}}$ ; gevonden uit structuren en dopplereffekt.

Boven fotosfeer: chromosfeer,  $\lesssim 10\ 000\ \text{km}$  dik. Heel zwak continuüm (optisch heel dun!). Daarop emissielijnen gesuperponeerd - in lage chromosfeer:  $\approx$  spiegelbeeld Fraunhofer lijnen, hoger domineren de Balmerlijnen (vandaar purperrode kleur). Aan bovenkant: dynamische rafelige structuur met sprietjes (spicules) - juist in gebied waar temperatuur naar buiten weer sterk toeneemt (→ model blz. III.33).

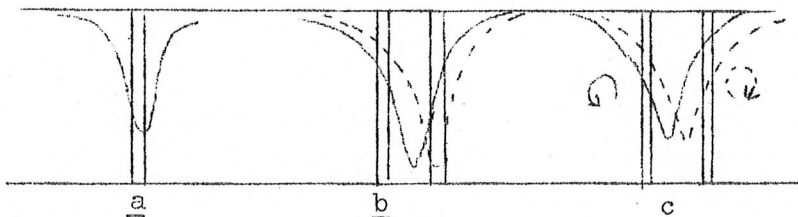
Om chromosfeer: corona: zilvergrijze stralenkrans, wisselend van vorm.  $T \gtrsim 1 \times 10^6\ \text{K}$  .

In zichtbaar gebied: zwak continuüm: electronenverstrooiing (binnen-corona) - stofjes (buiten); "verboden" emissielijnen van sterk geïoniseerde elementen (  $[\text{Fe X}] \dots \dots [\text{Fe XIV}]$  ,  $[\text{Ca XV}]$  ) .

Röntgengebied: emissielijnen hooggeïoniseerd elementen (veranderlijk).

Radiogebied  $\lambda > 1\ \text{cm}$  : constante, langzaam en snel veranderlijke componenten.

Monochromatische opnamen: met behulp van bijzondere filters (Lyot-filters = monochromatische polariserende filters) of met behulp van een zgn. spectroheliograaf kan men monochromatische beelden (eventueel met bandbreedte



van een fractie van  $1\ \text{\AA}$ ) maken.

Opnamen in kernen van sterke lijnen (a)

(vooral in H en K

lijnen van Ca II): de

fakkels die in wit licht alleen nabij de rand goed zichtbaar zijn, worden nu goed zichtbaar over gehele schijf. Bovendien chromosferisch netwerk: kleine heldere vlakjes in een net-achtige structuur gerangschikt (§ III.4.2.1) . Zeer gedetailleerde chromosferische structuren op schijf zichtbaar bijv. in  $H\alpha$  .

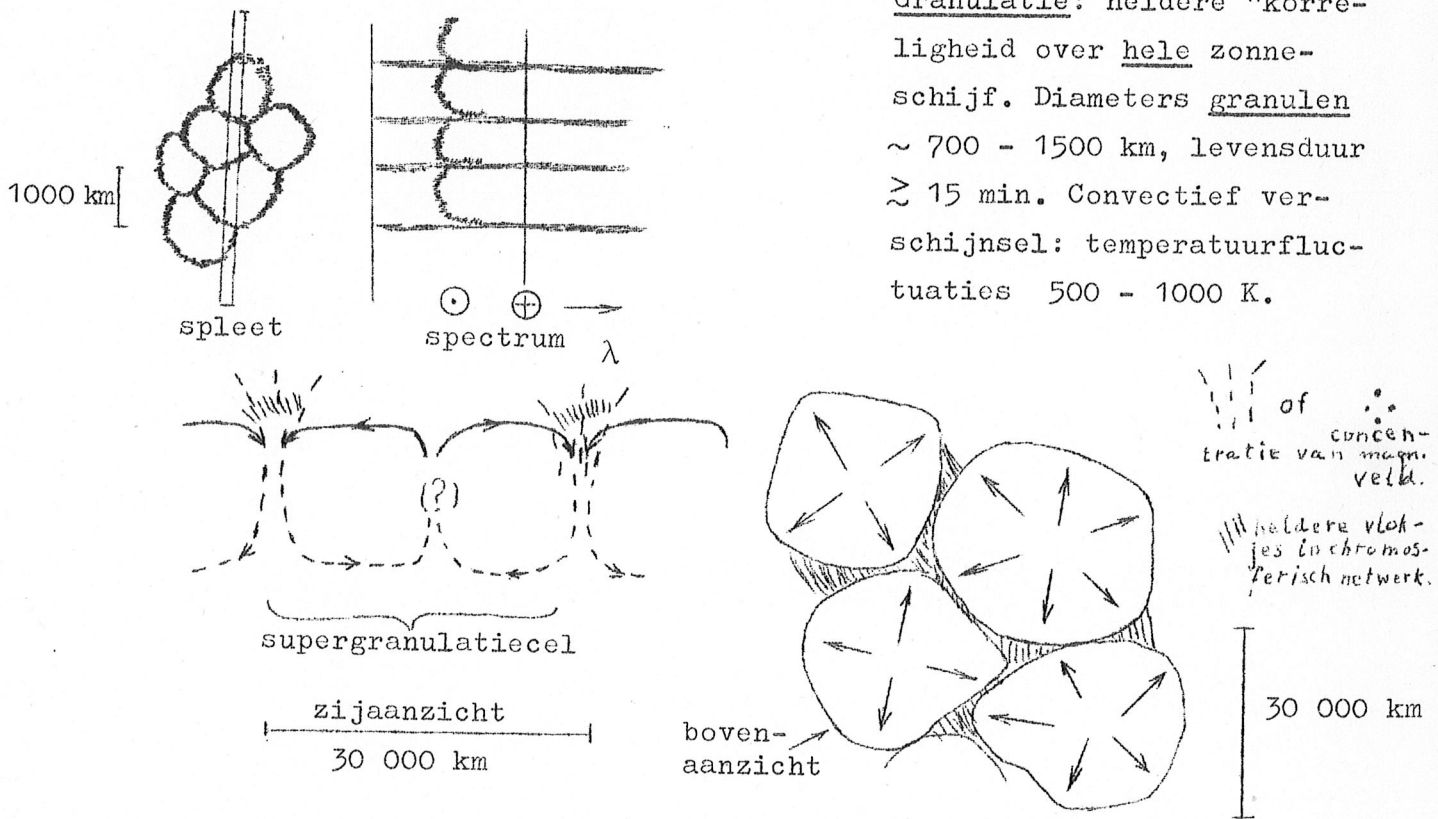
Opnamen in lijnflank (b): vaststelling snelheidsvelden (met twee spleten symmetrisch om positie niet verplaatste lijn kan men snelheden van intensiteitsfluctuaties scheiden).

Opnamen in lijnflank in twee tegengestelde polarisatierichtingen (c): meting magnetische veld. (Twee spleten; effecten door dopplerverschuivingen en door intensiteitsfluctuaties te scheiden).

Opnamen kunnen ook foto-electrisch gemaakt en met computer verwerkt worden. (C) → magnetograaf.

### III.4.2 Gevolgen van de convectiezone

#### III.4.2.1 Granulatie, supergranulatie, oscillaties



Granulatie: heldere "korreligheid" over hele zonnenschijf. Diameters granulen ~ 700 - 1500 km, levensduur  $\approx$  15 min. Convectief verschijnsel: temperatuurfluctuaties 500 - 1000 K.

In hete korrels: opstijgsnelheden  $1 - 2 \text{ km sec}^{-1}$ , in donkere "kanalen" daling met  $3 - 5 \text{ km sec}^{-1}$ .

Supergranulatie: nauwkeurige snelheidsmetingen brachten grote cellen ( $\varnothing \approx 30\,000 \text{ km}$ ) aan het licht, waarin horizontale uitstroming met  $v \approx$  paar honderd  $\text{m sec}^{-1}$ . magnetische velden geconcentreerd aan randen (tientallen - paar honderd gauss) - "naar de randen geveegd". Heldere vlokjes in chromosferisch netwerk vallen samen met magnetische concentraties. Levensduur individuele cellen ongeveer een etmaal (!). (Spicules als "spelden" op "kussens" van vlokjes?).

Oscillaties: Fotosferische gebieden met afmetingen van verscheidene duizenden km blijken een paar malen op en neer te gaan; de periode van

deze snel uitdempende trilling bedraagt ongeveer 5 minuten. Trillingen in fotosferische "vlics" aangeslagen door uit convectiezone doorschietende elementen (heldere granulen).

De hier besproken verschijnselen herleidt men op het doorschieten van convectieve elementen in de stabiele fotosfeer.

#### III.4.2.2 Verhitting hoge chromosfeer en corona; zonnewind

Door de turbulentie in de convectiezone worden geluidsgolven opgewekt, die een energiestroom door fotosfeer en chromosfeer sturen van de grootte

$$F_{\text{mech}} = \frac{1}{2} \rho \overline{v^2} \cdot c_g$$

waarin  $\rho$  de massadichtheid,  $v$  de snelheid van de deeltjes en  $c_g$  de geluidssnelheid is. Deze energiestroom doorloopt vrijwel zonder dissipatie de fotosfeer en lage chromosfeer. Doordat  $c_g$  weinig verandert doch  $\rho$  zeer sterk afvalt ( $10^{-7} \text{ g cm}^{-3}$  in hoge fotosfeer  $\rightarrow 10^{-16} \text{ g cm}^{-3}$  in corona) moet  $v^2$  sterk toenemen,  $\rightarrow$  geluidsgolven gaan over in z.g. schokgolven die energie dissiperen in hoge chromosfeer en corona  $\rightarrow$  steil oplopende temperatuur.

Corona verliest energie "moeizaam" door

- 1) warmtegeleiding door vrije electronen naar chromosfeer;
- 2) zonnewind (zie onder);
- 3) straling;

vandaar dat zeer hoge evenwichtstemperatuur  $\approx 1.5 \times 10^6 \text{ K}$  wordt bereikt ondanks feit dat akoestische energiestroom slechts  $10^{-4}$  à  $10^{-3}$  x stralingsflux bedraagt. Bedenk ook: wel hoge kinetische energie per deeltje doch lage energie-dichtheid.

Zonnewind: door de zeer hoge  $T$  expandeert de corona, waardoor voortdurend materie uitstroomt in interplanetaire ruimte. Bij aardbaan:  $m_H = 1 - 10 \text{ cm}^{-3}$ ,  $v=400 \text{ km sec}^{-1}$  (metingen met ruimtesondes).

Massaverlies zon klein:  $\approx 10^{14} \text{ g sec}^{-1} \rightarrow 1\%$  van  $m_{\odot}$  in  $5 \times 10^9$  jaar.

Hoge chromosfeer + corona danken bestaan aan convectiezone.

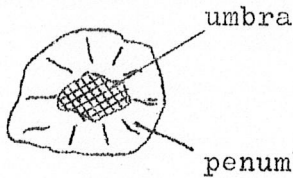
#### III.4.3 Magnetische velden en zonne-activiteit

##### III.4.3.1 Actief gebied: vlekken, fakkels, protuberansen

Actief gebied: = aantal verschijnselen over een beperkt deel van het zonne-oppervlak, gekenmerkt door sterke magnetische velden.

##### Zonnevlekken

● porie, diam.  $1000 - \leq 5000 \text{ km}$ , levensduur: uren ..... dag.



vlek, 5000  $\lesssim$  diam.  $\lesssim$  100 000 km; levensduur: dagen - weken (zelden: maanden).

umbra: spektrum  $\rightarrow T_{\text{eff}} = 3800 - 4200 \text{ }^\circ\text{K}$  (moleculen!)  
 (penumbra:  $T_{\text{eff}} \approx 5300 \text{ }^\circ\text{K}$ .)

Magnetisch veld: in umbra vrijwel verticaal 2500 - 3200 gauss; in penumbra bijna horizontaal.

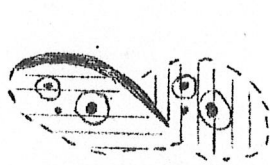
Fakkels: Helder, vooral nabij rand } gebiedjes die in hoge fotosfeer -  
 In kernen van lijnen } lage chromosfeer paar honderd graden heter zijn dan omgeving.

Magnetische velden: tientallen - honderden gauss. Fakkels en fakkelvelden zijn opgebouwd uit kleine elementen, diam.  $\approx$  1000 km. Altijd nabij zonnevlekken, doch er zijn fakkelvelden waarin zich geen vlekken ontwikkelen.

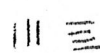
Protuberansen: heldere rode, draderige "wolken" in corona. Spectrum chromosfeerachtig:  $T \approx 10\ 000^\circ$ , dichtheid veel groter dan in corona; drukevenwicht. Op schijf: donkere linten (filamenten) in het licht van  $H\alpha$ . Kammen: lang  $\approx$  200 000 km, breed  $\approx$  7000 km, hoog  $\approx$  40 000 km. Levensduur: enkele maanden (vaak met onderbrekingen: plotseling verdwijnen en opnieuw verschijnen).

Opbouw en levensloop van flink actief gebied

Eerst verschijnt een compact helder fakkelveld in een plotseling versterkt magnetisch veld. Dit fakkelveld breidt zich uit, binnen één of twee dagen verschijnen de vlekken die zich binnen enkele dagen tot de grootste omvang ontwikkelen. Het actieve gebied heeft doorgaans een duidelijk bipolaire structuur:



rotatierichting zon



fakkels van tegengestelde magnetische polariteit



: protuberans = filament

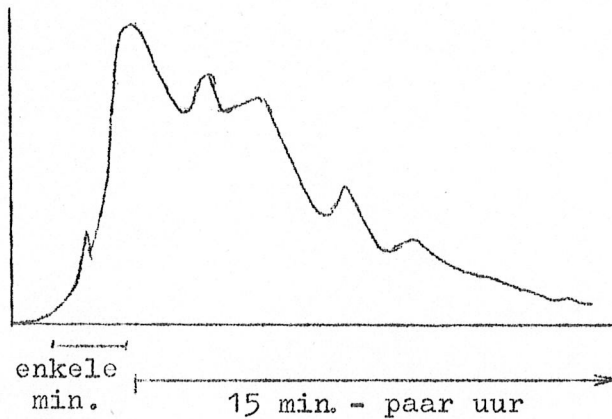
Protuberansen komen tot ontwikkeling, met een zeer duidelijke voorkeur op de grens van de polariteiten en aan de poolwaartse zijde. De vlekken verdwijnen binnen één tot enkele weken, het fakkelveld breidt zich uit, wordt brokkelig en minder helder. Protuberansen ontwikkelen zich nog geruime tijd. Het fakkelveld verliest zich geleidelijk in het chromosferisch netwerk; tenslotte brokkelen de protuberansen af.

De corona boven (of beter: in) het actieve gebied is abnormaal helder: de temperatuur is iets hoger, de dichtheid in de koepelvormige coronacondensatie is 5 tot 10 maal hoger dan in de normale corona. Verhoogde röntgen- en radiostraling.

### III.4.3.2 Eruptieve actieve verschijnselen

In vorige paragraaf: langzaam-veranderlijke actieve verschijnselen. Van de snelle verschijnselen worden de meest spectaculaire zonnevlammen (flares) genoemd.

- 1) Optisch: Plotseling oplichten van Balmerlijnen (bij sterke vlammen wordt H $\alpha$  volledige emissielijn) in delen van het fakkelveld. Zeer



fijne structuren. Indien nabij rand: oplichten van bijzondere coronalijnen ( $\rightarrow T \approx 4 \times 10^6$  K).

- 2) Sterk verhoogde UV straling  $\lambda < 2000 \text{ \AA}$ , bij sterke vlammen tot ver in röntgengebied (tot  $0.1 \text{ \AA}$ ) - dan sterke ionisatie in aardse ionisfeer  $\rightarrow$  uitvallen van

radioverkeer op korte golflengten.

- 3) Sterk verhoogde radiostraling op alle golflengten, verschijnselen zeer complex, grotendeels niet-thermische straling.
- 4) Uitstoting van wolken met  $v = 500$  - paar duizend  $\text{km sec}^{-1}$  - kunnen na ongeveer 1 dag bij de aarde aankomen  $\rightarrow$  onregelmatigheden aards magneetveld ("magnetische stormen") en poollicht (indirect).
- 5) Sporadisch, bij zeer sterke vlammen: "kosmische stralingsstoten": atoomkernen worden uitgestoten met sterk relativistische snelheden ( $10^9 - 10^{10}$  eV).

Men schat voor energie die totaal vrijkomt:  $10^{26}$  erg (kleine vlam) -  $10^{32}$  erg (zeer grote vlam). Ter vergelijking: H-bom  $10^{27}$  erg; straling zon in één seconde:  $4 \times 10^{33}$  erg.

Vlammen zijn niet zeldzaam. Bij een "onrustige" zon: per dag: 1 grote, 10 middelgrote en 100 kleine vlammen. Vlammen meest frequent omstreeks maximale ontwikkeling van actief gebied. A.G. met een complexe magnetische structuur vlammen frequenter en feller dan mooi-bipolaire gebieden.

Uit de waarnemingen blijkt wel dat vlammen plotseling optredende instabiliteiten zijn in de corona en hoge chromosfeer.

Plaatje: tijdens de ontwikkeling van een A.G. wordt het magnetische veld voortdurend vervormd door differentiële rotatie en convectie op grote schaal (dit uit zich o.a. in geleidelijke verplaatsingen van zonnevlekken e.d.). Blijkbaar kan dit leiden tot instabiliteiten in de corona, waarbij het magnetische veld plotseling een nieuwe evenwichtsconfiguratie aanneemt. Bij snelle veranderingen in het magnetische

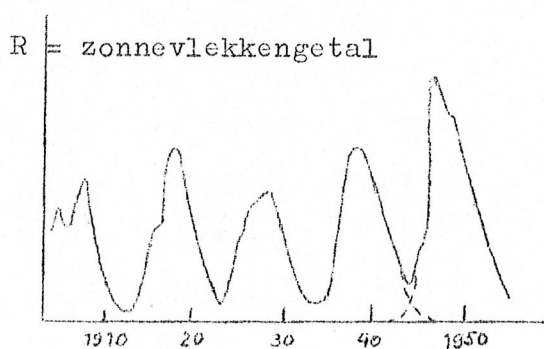


veld kunnen geladen deeltjes worden versneld en dit kan in principe de niet-thermische componenten in de röntgen- en radiouitbarstingen verklaren.

In A.G. treden een groot aantal andere snelle verschijnselen op: plotseling verdwijnende protuberansen, bijzondere typen kortstondige protuberansen, allerlei typen radiouitbarstingen.

### III.4.3.3 De activiteitscyclus

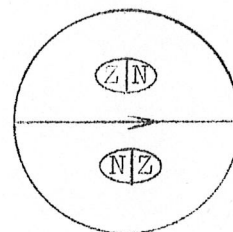
A.G. gebieden treden vrijwel uitsluitend in gordels aan weerszijde van de zonne-equator op, tot hoogstens  $40^\circ$  heliografische breedte.



Het aantal zonnevlekken (vlekken-groepen, A.G.) varieert sterk met een 11-jarige periode.

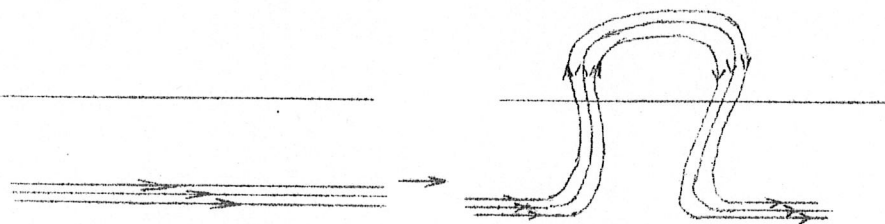
Wetmatigheden:

- 1) Aan begin van cyclus (na minimum) ontstaan vlekken gemiddeld op hoge breedte, de gemiddelde gordel van vlekvorming schuift geleidelijk naar de equator toe ( $\rightarrow$  vlinderdiagram, college).
- 2) Tijdens één cyclus hebben alle leidende vlekken (die voorop lopen bij de rotatie) op het ene halfrond de ene polariteit, op het andere halfrond juist de tegengestelde polariteit.
- 3) Het verband: polariteit leidende vlek - halfrond slaat bij de volgende cyclus om  $\rightarrow$  eigenlijke periode 22 jaar.



Alle met activiteit verbonden verschijnselen weerspiegelen de activiteitscyclus, bijv. ook de vorm van de corona.

Ter toelichting alleen dit: door de differentiële rotatie worden magnetische fluxbuizen in de convectiezone opgewonden totdat zij vrijwel evenwijdig aan parallelcirkels komen te liggen. Een A.G. ontstaat doordat een lus door de fotosfeer naar buiten breekt.



(dus  $dP_g = g_{\text{eff}} \rho |dz|$ ). Zou de stralingsdruk te groot worden, dan wordt  $g_{\text{eff}} = 0$  en dan kan de ster de atmosfeer niet vasthouden ("bovenrand" Hertzsprung-Russell diagram).

2. Ook extra termen noodzakelijk in vergelijkingen (III, 42) indien hoge snelheden optreden, bijv. snelle rotatie van de ster of sterke "turbulentie" in de atmosfeer.

#### III.2.2.4. Theoretische modelatmosferen; stralingsevenwicht

Wij zagen in § III.2.2.2. dat voor sterren de afleiding van empirische modelatmosferen niet goed mogelijk is. Wij moeten dus methoden uitdenken om het temperatuurverloop  $T(\tau_0)$  (of het verloop van de bronfunctie) uit theoretische gronden te berekenen. Daarna kunnen wij met de onderstelling van hydrostatisch evenwicht uit  $T(\tau_0)$  berekenen:  $P_g(\tau_0)$ ,  $P_e(\tau_0)$ , enz., waarmee het model vastligt. Uit zo'n model kunnen daarna spektrale karakteristieken (verloop  $F_\lambda(0)$ , profielen spektrale lijnen, enz.) worden berekend, die met waarnemingen vergeleken kunnen worden.

Wij vonden bij de empirische modelatmosfeer voor de zon en ook uit het optreden van absorptielijnen in sterspektra dat de temperatuur in steratmosferen naar buiten afneemt. Dat is wel begrijpelijk: de stroom thermische energie vloeit van hoge naar lage temperatuur. Hoe het temperatuurverloop zich precies instelt hangt af van de wijze(n) waarop de warmtestroom zich voortplant (door straling of convectie; geleiding of mechanische golfvoortplanting zullen blijken onbelangrijk te zijn, althans in de diepere delen van de atmosfeer).

Een stationnaire atmosfeer moet alle in het sterinwendige vrijgemaakte energie doorgeven en uitstralen in de wereldruimte. Op alle hoogten  $z$  in de atmosfeer loopt dus een constante energieflex. In beginsel kan deze energiestroom bestaan uit een stralingsflux, een convectieve energieflex, een mechanische flux (bijv. geluidsgolven), enz.

Dus:

$$\pi F(z) = \pi F_{\text{rad}}(z) + \pi F_{\text{conv}}(z) + F_{\text{mech}}(z) + \dots = \pi F = \text{constant.}$$

Wij nemen voorlopig aan dat de atmosfeer alle energie in de vorm van straling transporteert: de atmosfeer is in stralingsevenwicht (radiative equilibrium). Wij zullen deze stelling naderhand controleren en, waar nodig, corrigeren.

$$\pi F(z) = \pi F_{\text{rad}}(z) = \pi F = \text{constant, of} \quad (\text{III, 45a})$$

$$F(z) = \int_0^{\infty} F_{\nu}(z) d\nu = F$$

of:

$$\frac{dF(z)}{dz} = 0 \quad (\text{III, 45b})$$

De voorwaarde voor stralingsevenwicht is ook anders te schrijven:

$$\text{Herschrijf (III, 29): } \frac{1}{4} \frac{dF_{\nu}(z)}{dz} = k_{\nu} \rho S_{\nu}(z) - k_{\nu} \rho J_{\nu}(z),$$

integreer over  $\nu$ , dan volgt uit (III, 45b):

$$\int_0^{\infty} k_{\nu} \rho S_{\nu}(z) d\nu = \int_0^{\infty} k_{\nu} \rho J_{\nu}(z) d\nu; \quad (\text{III, 46})$$

deze uitdrukking is aanschouwelijk duidelijk: linkerlid: emissie per volume-eenheid, rechterlid: extinctie per volume eenheid. De dichtheid  $\rho$  kan nog worden uitgedeeld.

De totale flux  $\pi F$  is een fundamentele grootheid, die vaak wordt uitgedrukt in de effectieve temperatuur  $T_{\text{eff}}$  volgens

$$\sigma T_{\text{eff}}^4 \equiv \pi \int_0^{\infty} F_{\nu} d\nu \quad (\text{III, 47})$$

aanleunend tegen de Wet van Stefan en Boltzmann (III, 19). Alleen bij de zon is  $T_{\text{eff}}$  direkt te bepalen, vergelijk I.2.2.2. Deze maat onderstelt niet dat het stralingsveld op een Planck's stralingsveld lijkt; deze temperatuur is wel "ergens" in de atmosfeer gelijk aan de kinetische temperatuur - zie vorige paragraaf over zon.

De voorwaarden voor stralingsevenwicht (III, 45 of 46) leggen een voorwaarde op aan  $S_{\nu}(z)$  en dus aan  $T(z)$ , aangezien zowel  $F_{\nu}(z)$  als  $J_{\nu}(z)$  door  $S_{\nu}(z)$  "in de buurt" worden bepaald. De oplossing van  $S_{\nu}(z)$  wordt bemoeilijkt door het feit dat  $k_{\nu}(z) = k_{\nu} [T(z), P_e(z)]$  (denk aan de wetten van Saha en Boltzmann), en terwijl  $k_{\nu}(T, P_e)$  uit de natuurkunde bekend zal zijn, zijn de relaties  $T(z)$  en  $P_e(z)$  aanvankelijk onbekend - die zoeken wij juist. Daarom kunnen theoretische modelatmosferen in stralingsevenwicht alleen in achtereenvolgende benaderingen worden bepaald.

#### a. Grijze atmosfeer.

Wij beginnen met een sterk schematische onderstelling:

$$\text{materie grijs: } k_{\nu}(z) = k(z) \quad (\text{III, 48a})$$

voor alle  $\nu$ : geen spektrale lijnen, enz.. Gevolg: voor alle  $\nu$ :

$$\tau_{\nu}(z) \equiv \tau(z) = \int_z^{\infty} k(z) \rho(z) dz \quad (\text{III, 48b})$$

(bij niet-grijze atmosfeer zal in het algemeen  $\tau_{\nu_1}(z) \neq \tau_{\nu_2}(z)$  zijn!).

(Opmerking: maak niet de vergissing  $\tau = \int_0^{\infty} \tau_{\nu} d\nu$ , want de monochromatische  $\tau_{\nu}$  is een dimensieloze grootheid. Totale grootheden  $Q \equiv \int_0^{\infty} Q_{\nu} d\nu$  hebben alleen zin voor grootheden  $Q_{\nu}$  die per frequentie-eenheid gedefinieerd zijn, zoals  $I_{\nu}$ ,  $J_{\nu}$ , en  $F_{\nu}$ ).

Wij kunnen beide leden van de transportvergelijking over  $\nu$  integreren, nu mogen ten gevolge van (III,48) integratie over  $\nu$  en differentiatie naar  $\tau$  worden omgewisseld:

$$(\text{III, 28}) \rightarrow \mu \frac{dI}{d\tau} = I(\tau) - S(\tau); \quad (\text{III, 49})$$

analoog:

$$(\text{III, 29} + 42) \rightarrow (\text{III, 43}) \rightarrow S(\tau) = J(\tau) \quad (\text{III, 50})$$

(n.b. doch  $S_{\nu}(\tau) \neq J_{\nu}(\tau)$  !)

Eddington liet zien dat een goede benadering voor het verloop van  $S(\tau)$  in een grijze atmosfeer in stralingsevenwicht is:

$$S(\tau) \simeq \frac{3}{4} F \cdot \left( \tau + \frac{2}{3} \right) \quad (\text{III, 51})$$

Bewijs: (anders dan bij Eddington, doch komt fysisch op hetzelfde neer):

Wij bewijzen eerst:  $F(\tau) \simeq \frac{4}{3} \frac{dS(\tau)}{d\tau}$  :

Vermenigvuldig beide leden (III,49) met  $\mu$  en integreer over hele

ruimte  $\frac{1}{4\pi} \int \dots d\omega = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \dots d\mu$ , wissel differentiatie naar  $\tau$

en integratie over  $\mu$  om:

$$\frac{d}{d\tau} \left[ \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \mu^2 I d\mu \right] = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \mu I d\mu - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \mu S d\mu$$

$$\frac{d}{d\tau} \left[ \frac{1}{2} \langle I \rangle \int_{-1}^{+1} \mu^2 d\mu \right] = \frac{1}{4} F - 0 \quad (S \text{ onafh. van } \mu)$$

$\approx \frac{1}{2} J$  : zeker goede benadering voor grote  $\tau$ ; met (III,50)

$$S(\tau) = J(\tau) : \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{1}{3} S(\tau) \right] \approx \frac{1}{4} F(\tau)$$

dus  $F(\tau) = F \approx \frac{4}{3} \frac{dS(\tau)}{d\tau}$ . Aannemende dat deze benadering ook behoorlijk is voor kleine  $\tau$  vinden wij:

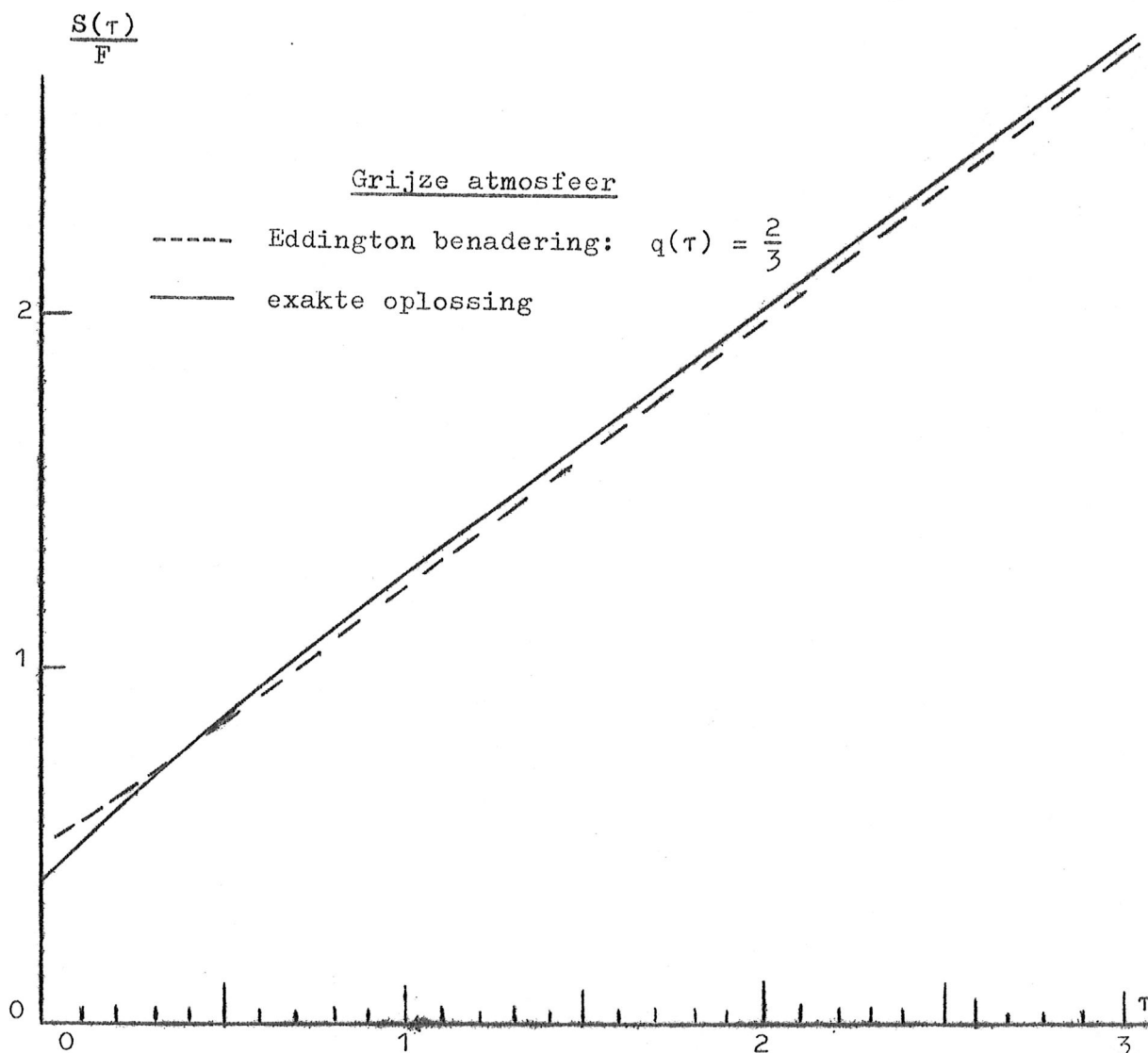
$S(\tau) \approx \frac{3}{4} F \cdot (\tau + c)$ , de integratieconstante vinden wij door toepassing van (III,35) :  $F = F(0) = S(\tau = \frac{2}{3}) \rightarrow$  (III,51)

De exakte oplossing voor grijze atmosfeer in stralingsevenwicht is:

$$S(\tau) = \frac{3}{4} F \cdot [\tau + q(\tau)] . \quad (\text{III,52})$$

De hulpfunctie  $q(\tau)$  kan numeriek met grote nauwkeurigheid worden berekend; daarbij blijkt dat  $q(\tau)$  weinig van  $\frac{2}{3}$  verschilt:

$\tau$	= 0	0.03	0.06	0.1	0.3	0.6	1.0	2.0	$\infty$
$q(\tau)$	= 0.5774	0.6012	0.6148	0.6279	0.6634	0.6858	0.6985	0.7079	0.7104



Uit de geïntegreerde bronfunctie  $S = \int_0^{\infty} S_{\nu} d\nu$  kunnen alleen alle geïntegreerde grootheden  $I(\tau, \mu)$ ,  $J(\tau)$  en  $F(\tau)$  worden berekend. Om de monochromatische grootheden te berekenen moet een extra onderstelling worden gemaakt: gebruikelijk:

$$\text{LTE} \rightarrow \text{via (III,19)} : S(\tau) \equiv B(\tau) = \frac{\sigma}{\pi} [T(\tau)]^4, \text{ dus,}$$

samen met (III,47) en (III,52), (ga na!):

$$T(\tau) = T_{\text{eff}} \sqrt[4]{\frac{3}{4} [\tau + q(\tau)]} \quad (\text{III,53})$$

waaruit de monochromatische bronfunctie direkt volgt:

$$S_{\nu}(\tau) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Planck}}}{B_{\nu}} \left\{ T_{\text{eff}} \sqrt[4]{\frac{3}{4} [\tau + q(\tau)]} \right\} \quad (\text{III,54})$$

- Opgave 9:
- Laat zien dat uittredende intensiteit  $I_{\nu}(\tau = 0, \mu)$  bij vaste  $\mu$  vrij precies een Planckse kromme oplevert bij Eddington benadering  $q(\tau) = \frac{2}{3}$  (zonder ingewikkeld gereken!)
  - Met welke temperaturen komen deze Planckse krommen overeen voor  $\mu = 1$  en  $\mu = \frac{2}{3}$ ?
  - Zelfde vraag als a. en b. voor uittredende flux  $F_{\nu}(\tau = 0)$ .
  - In hoeverre verandert antwoord op a. en c. wanneer men de exakte oplossing voor  $q(\tau)$  gebruikt?

Randtemperatuur: met  $q(\tau) = \frac{2}{3}$ : (III,51)  $\rightarrow T(0) = T_{\text{eff}} \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ , met  $q(0) = 0.5774 \rightarrow T(0) = 0.811 T_{\text{eff}}$ . Toepassing op zon:  $T_{\text{eff}} = 5800 \text{ K} \rightarrow T(0) = 4700 \text{ K}$ , dat is duidelijk hoger dan in de III.2.2.2. gevonden minimum temperatuur  $T_{\text{min}} = 4200 \text{ K}$ . Komt dat omdat het zonnegas niet grijs is? Of is de onderstelling stralings-evenwicht niet geheel juist?

b. Niet-grijze atmosferen.

Stermaterie is doorgaans verre van grijs: de continue extinctiecoëfficiënt  $k_{\nu}$  varieert met een paar orden van grootte en daar moeten dan de scherpe pieken van de lijnextinctie nog op worden gesuperponeerd. (zie § III.2.1.4). Het berekenen van een theoretische modelatmosfeer in stralingsevenwicht en met realistische extinctiecoëfficiënten vergt veel meer numeriek-wiskundig geweld dan in het geïdealiseerde grijze geval. Met model  $\{ T(\tau_0), P_g(\tau_0), \dots \}$  wordt nu in

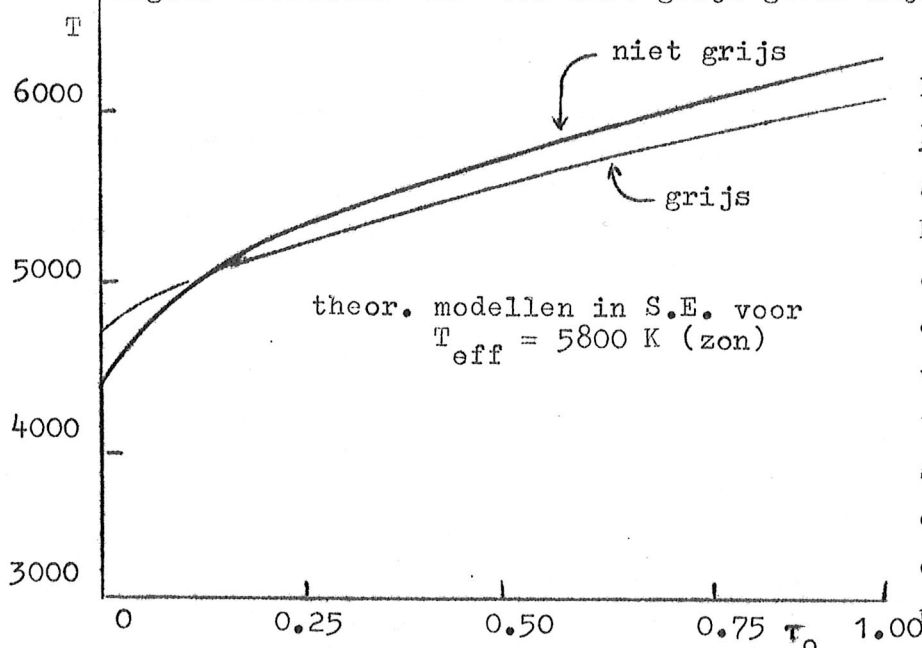
achtereenvolgende benaderingen (iteraties) berekend:

1. Neem een model als eerste benadering  $T^{(1)}(\tau_0), P_g^{(1)}(\tau_0), \dots$
2. Bereken hieruit:  $S_\nu^{(1)}(\tau_0)$  (bijv. in LTE:  $= B_\nu\{T^{(1)}(\tau_0)\}$ ) en  $k_\nu\{T^{(1)}(\tau_0), P_e^{(1)}(\tau_0)\}$  voor een groot aantal frequenties  $\nu$  en een aantal diepten  $\tau_0$ .
3. Bereken voor genoemde  $\nu$ 's en  $\tau_0$   $\int_0^{\infty} \pi F_\nu^{(1)}(\tau_0) d\nu$  en daaruit (door numerieke integratie)  $\pi F^{(1)}(\tau_0) = \int_0^{\infty} \pi F_\nu^{(1)}(\tau_0) d\nu$ .
4. Controleer, of  $\pi F^{(1)}(\tau_0)$  voldoende constant gelijk aan de gewenste flux  $\pi \tilde{F} = \sigma T_{\text{eff}}^4$  is.

Is dat niet het geval, corrigeer dan aan de hand van de verschillen  $\pi F^{(1)}(\tau_0) - \pi \tilde{F}$ , de temperatuurverdeling  $T^{(1)}(\tau_0) \rightarrow T^{(2)}(\tau_0)$ , herhaal nu de stappen 1 t/m 4 (alle indices (1)  $\rightarrow$  (2)).

Ga zo door totdat  $\{T^{(n)}(\tau_0), P_g^{(n)}(\tau_0), \dots\}$  de vereiste constante flux  $\pi \tilde{F}$  oplevert. Een dergelijke iteratieve berekening van modelatmosferen stelt tegenwoordig geen probleem meer (snelle computers).

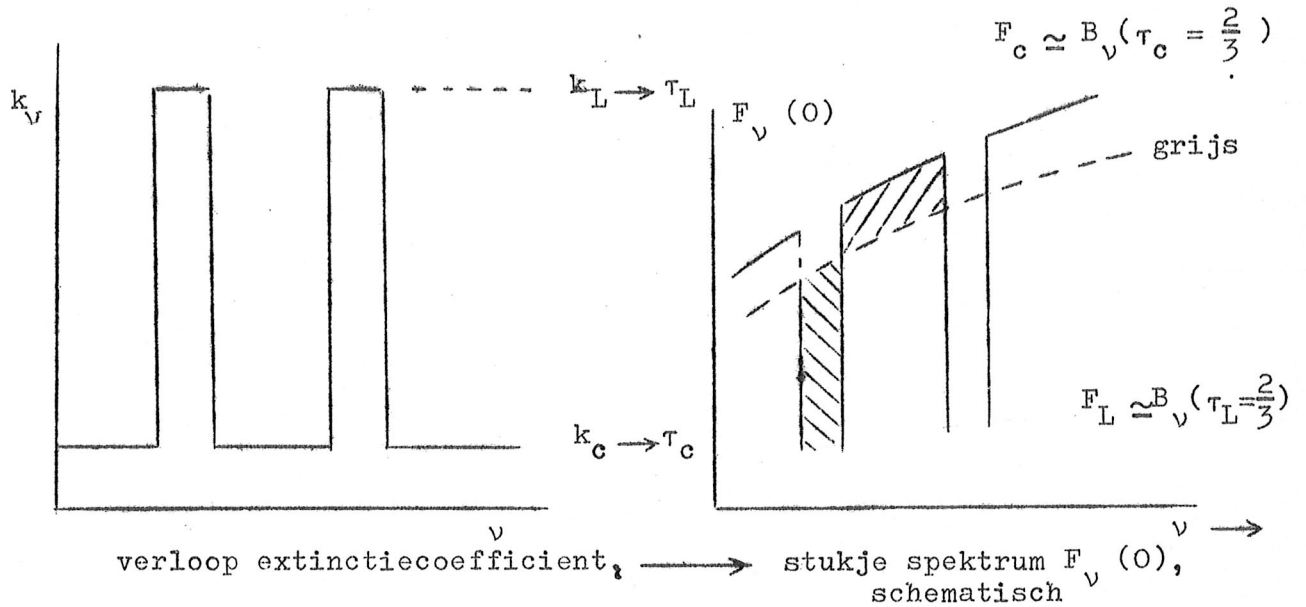
Wanneer wij de resultaten  $T(\tau_0)$  voor het grijs en een niet-grijze atmosfeer vergelijken (bij dezelfde  $\pi \tilde{F}$  of  $T_{\text{eff}}$ !) dan is altijd in een niet-grijs geval  $T(\tau_0)$  sterker dan in het grijs geval, zoals in de figuur hieronder: in een niet-grijs geval zijn op grote diepten



( $\tau_0 \gtrsim 1$ ) hogere, op kleine diepten ( $\tau_0 \ll 1$ ) lager dan in het grijs geval - het dekeneffect. Kwalitatief is dit deken-effect te begrijpen: op wat grotere diepte wordt de flux in de spectrale lijnen en/of sterke sectiegrenscontinua sterk onderdrukt. De flux die daar niet lopen kan moet

nu extra door delen van het continue spectrum lopen waarvoor de materie het meest doorzichtig is - zie onderstaande fig. Dit maakt een wat hogere en wat steilere oplopende bronfunctie (temperatuur) nodig.

schematisch: deken-effect door lijnen gesuperponeerd op grijs continuum:



De flux die in de lijnen verdwenen is, moet in het continuüm teruggevonden worden.

Middelbare extinctiecoëfficiënt: De Noor Rosseland heeft een methode aangegeven om een middelbare extinctiecoëfficiënt  $k_m(T, P_e)$  te berekenen uit  $k_\nu(T, P_e)$ . Baseert men daarop de bijpassende optische diepteschaal  $d\tau_m = -k_m \rho dz$ , dan blijkt voor alle grijs en niet grijs atmosferen in stralingsevenwicht te gelden voor voldoende grote  $\tau_m$  ( $\tau_m > 2$ , bijv.)

$$\frac{dT^4(\tau_m)}{d\tau_m} \approx \frac{3}{4} T_{\text{eff}}^4 \rightarrow \frac{dT}{dz} \approx -\frac{3}{16} \frac{T_{\text{eff}}^4 k_m \rho}{T^3} \quad (\text{III,55})$$

Opgave 10: Laat zien dat voor grijs atmosferen (III,55) volgt uit (III,53), waarbij natuurlijk  $k_m = k$ .

Op grote diepten wordt de temperatuurgradiënt  $dT/d\tau_m$  voor sterren met dezelfde  $T_{\text{eff}}$  gelijk, onafhankelijk van de aard en mate van niet-grijsheid.

Gevolg: op zeer grote diepten zijn voor dezelfde  $T_{\text{eff}}$  ook de temperatuurverlopen  $T(\tau_m)$  vrijwel gelijk: je kunt daar, door gebruik te maken van  $k_m$  rekenen alsof de materie grijs is. Daarvan maakt men bij het stralingstransport in sterinwendigen dankbaar gebruik - zie hoofdstuk II, vergelijk (II,13) met (III,55) !

Wij bespreken niet de wijze waarop  $k_m$  uit  $k_\nu$  berekend wordt; het komt er op neer dat men er voor zorgt dat de middelbare weglengte van de fotonen (gemiddeld over alle voorhanden  $h\nu$  !)  $\bar{\lambda}$  juist gelijk is aan  $(k_m \rho)^{-1}$  (vergel. blz. III,10 bovenaan).



Met (III,55) kunnen modellen van steratmosferen vloeiend op modellen voor sterinwendigen worden aangesloten.

Voor kleine  $\tau_m < 1$  en vooral voor  $\tau_m \ll 1$  hangt  $T(\tau_m)$  wel duidelijk van de mate en de aard van de niet-grijsheid af - voor de buitenste delen moet gedetailleerd met  $k_\nu$  worden gerekend. Hier kunnen afwijkingen van LTE ook een rol spelen.

c. Welke parameters bepalen het model voor een atmosfeer in stralings-evenwicht?

In de behandeling van theoretische modelatmosferen zijn wij tegengekomen:

- 1)  $\pi F = \sigma T_{\text{eff}}^4$  - de (constante) stralingsflux, voor berekening  $T(\tau_m)$
- 2)  $g$  : de versnelling van de zwaartekracht, in de vergelijking voor hydrostatisch evenwicht. Reuzen hebben een iets grotere massa en een veel grotere straal, dus een veel kleinere  $g = GM/R^2$  dan dwergen:
 

G2 dwerg (zon):	$\log g = 4.4$	$[ \text{cm s}^{-2} ]$
G2 reus	:	$\log g = 3.1$
G2 superreus	:	$\log g = 1.4$
- 3) abundantie van helium en eventueel abundanties van "metalen" indien deze merkbaar bijdragen tot de produktie van vrije elektronen (voor T-P<sub>g</sub>-P<sub>e</sub>-verband) en indien zij merkbare serie grens continua en sterke lijnen veroorzaken ("metalen" dus van belang bij koelere sterren, F → M) .

Hoe werken deze parameters op de modelatmosfeer uit?

1. Het temperatuurverloop  $T(\tau_m)$  hangt sterk af van  $T_{\text{eff}}$  doch vrijwel niet van  $g$  :  $T(\tau_m)$  voor reuzen en dwergen van zelfde  $T_{\text{eff}}$  vrijwel gelijk.

Sterke afhankelijkheid van  $T_{\text{eff}}$  hoeft geen betoog, zie bijv. (III,53 en 55).

De invloed van  $g$  is echter heel klein: de verandering in druk (zie hieronder) veroorzaakt een kleine verandering in de niet-grijsheid van de materie, hetgeen heel weinig aan  $T(\tau_m)$  verandert.

2. De drukverlopen  $P_g(\tau_m)$  en  $P_e(\tau_m)$  hangen zeer sterk van  $g$  af:

bij reuzen zijn de drukken veel lager dan bij dwergen (bij gelijke  $T_{\text{eff}}$  en  $\tau_m$ ) :

$$(III,42b) \rightarrow P_g(\tau_m) = g \int_0^{\tau_m} \frac{dt}{k_m} \quad (III,56)$$

Middelbare extinctiecoëfficiënt  $k_m$  (per massaeenheid!) ongeveer even groot bij gelijke  $T$  doch verschillende  $g \rightarrow P_g$  (bij vaste  $\tau_m$ ) ruwweg evenredig met  $g$ . Gevolg: bij reuzen is ook massadichtheid  $\rho$  veel lager dan bij dwergen. Toch is het totale aantal zware deeltjes (met atoomkernen) en dus de massa boven een oppervlakte-eenheid in een vlak van gelijke  $\tau_m$  ( $= \frac{2}{3}$ , bijv.) vrijwel onafhankelijk van  $g$ :

$$d\tau_m \equiv - N \alpha_m dz \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right) \tau_m = \int_{z(\tau_m = \frac{2}{3})}^{\infty} N(z) \alpha_m dz \quad (\text{III,57})$$

aantal zware deeltjes  $\nearrow$   $N$   
 middelbare extinctiecoëfficiënt per zwaar deeltje  $\nearrow$   $\alpha_m$

Aangezien  $\alpha_m$  heel weinig van  $g$  afhangt, is ook  $\int_{z(\tau_m = \frac{2}{3})}^{\infty} N(z) dz$  heel ongevoelig voor  $g$ .

3. Invloed van verschillen in abundanties is zeer klein op  $T(\tau_m)$  en klein op  $P_g(\tau_m)$ , tenzij men zeer afwijkende abundanties kiest (zuivere heliumster bijv.).

### III.2.2.5 Convectie in steratmosferen

#### a. Criterium voor convectie

Tot dusverre hebben wij stralingsevenwicht aangenomen; m.a.w. wij onderstelden dat alle energie door straling wordt getransporteerd. Nu moet deze onderstelling achteraf worden getoetst aan de gevonden modellen. Het daarvoor geschikte criterium van Schwarzschild is al besproken in hoofdstuk II, hier kort herhaald:

Noem de met stralingsevenwicht berekende temperatuurgradiënt  $|dT/dz|_{S.E.}$ . Volgens Schwarzschild zal het model in stralingsevenwicht goed zijn, m.a.w. er zal géén convectie optreden indien:

$$|dT/dz|_{S.E.} \leq |dT/dz|_{ad} \quad (\text{II,16} = \text{III,58})$$

waarin de adiabatische temperatuurgradiënt

$$|dT/dz|_{ad} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \cdot \frac{T}{P} \cdot \left|\frac{dP}{dz}\right| \quad (\text{II,17} = \text{III,59})$$

met  $\gamma = c_p/c_v$ .

De gradiënt  $|dT/dz|_{S.E.}$  volgt uit gedetailleerde modelberekeningen (§ III.2.2.4); voor  $\tau_m \gg 1$  geldt

$$(\text{III,55}) : \quad (dT/dz)_{S.E.} = - \frac{3}{16} \frac{k_m \rho T_{eff}^4}{T^3}$$

Toepassing van criterium (III,58) leert dat de atmosferen van zeer hete sterren (O, B, vroege A) inderdaad op alle diepten in stralings-evenwicht zijn.

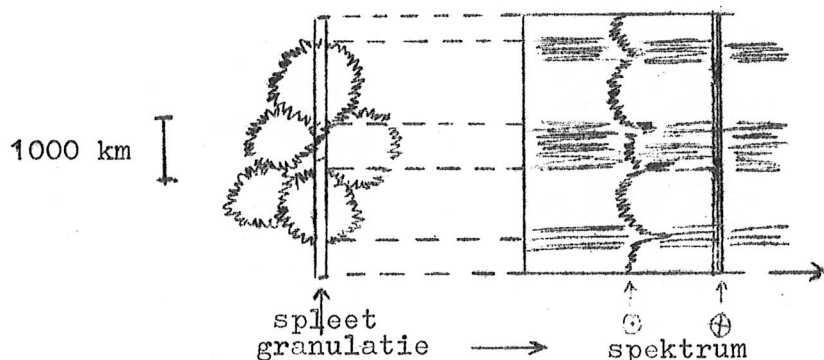
Dat geldt ook voor de buitenste lagen van koelere sterren, doch voor  $\tau_m > 1$  is bij F, G, K en M sterren stralingsevenwicht niet langer mogelijk - daar treedt convectie op. In de z.g. convectiezone neemt de gradiënt  $|d\bar{T}/dz|$  ( $\bar{T}(z)$ : een over het horizontale X,Y-vlak gemiddelde temperatuur) waarden aan die tussen  $|dT/dz|_{S.E.}$  en  $|dT/dz|_{ad}$  zullen liggen. Men kan de temperatuurgradiënt in de convectiezone benaderd berekenen en zodoende het  $T(z)$  verloop in de in stralingsevenwicht verkerende buitendelen van de atmosfeer naar beneden verlängen met  $\bar{T}(z)$  in de convectiezone.

Uitweiding:

1. Al na de eerste paar honderd km nadert de temperatuurgradiënt  $|d\bar{T}/dz|$  de adiabatische temperatuurgradiënt zeer dicht. Bij de berekening van modellen voor sterinwendigen rekent men in convectiezones dan ook meestal met de adiabatische temperatuurgradiënt.
2. Convectiezones treden daar op waar waterstof gedeeltelijk geïoniseerd is. Bij de daar heersende temperaturen verkeert een relatief groot deel van de nog neutrale H in de niveaus  $n = 2, 3, \dots \rightarrow$  gas voor alle golflengten erg ondoorzichtig, middelbare extinctiecoëfficiënt  $k_m$  zeer hoog  $\rightarrow |dT/dz|_{S.E.}$  zeer groot, veel groter dan adiabatische gradiënt. Bijkomstig is dat adiabatische gradiënt in gedeeltelijk geïoniseerd gas wat kleiner is dan in neutraal of volledig geïoniseerd gas (bij expansie van stijgende bel treedt afkoeling op - dus ook recombinitie, hetgeen een deel van de voor expansie benodigde energie levert). De ondergrens van de convectiezone treedt daar op waar H en He zeer volledig geïoniseerd zijn: gas wordt daar weer doorzichtig (hoofdzakelijk verstrooiing door vrije elektronen), met het gevolg dat  $|dT/dz|_{S.E.}$  weer kleiner wordt dan de adiabatische gradiënt  $\rightarrow S.E.$
3. Dat alle atmosferen voor  $\tau_m < 1$  in stralingsevenwicht zijn is eenvoudig in te zien: voor diepten  $\tau_m < 1$  is een groot deel van de fotonen "met één sprong buiten" (gevolg van definitie  $k_m \rightarrow \tau_m$ ); daar is dus geen convectie meer nodig om de energiestroom gaande te houden.

b. Zonneverschijnselen die met convectie samenhangen

De convectiezone begint bij  $\tau_m \approx \tau_{5000 \text{ \AA}} \approx 1$ , vrij diep in de fotosfeer. Sommige convectieve elementen "schieten door" in de hogere fotosfeer.



Granulatie: heldere "korreligheid" over hele zonneschijf. Diameters granulen  $\sim 700 - 1500$  km, levensduur  $\approx 15$  min. Convectief verschijnsel: temperatuurf fluctuaties  $500 - 1000$  K; in hete korrels opstijgsnelheden  $\approx 1 \text{ km s}^{-1}$ ; in donkere kanalen da-

ling met  $\approx 3 \text{ km s}^{-1}$ .

Supergranulatie: nauwkeurige snelheidsmetingen brachten grote cellen ( $\varnothing \approx 30\,000$  km) aan het licht, waarin horizontale uitstroming met  $v \approx$  paar honderd  $\text{m sec}^{-1}$ . Magnetische velden geconcentreerd aan randen (tientallen - paar honderd gauss) - "naar de randen geveegd".

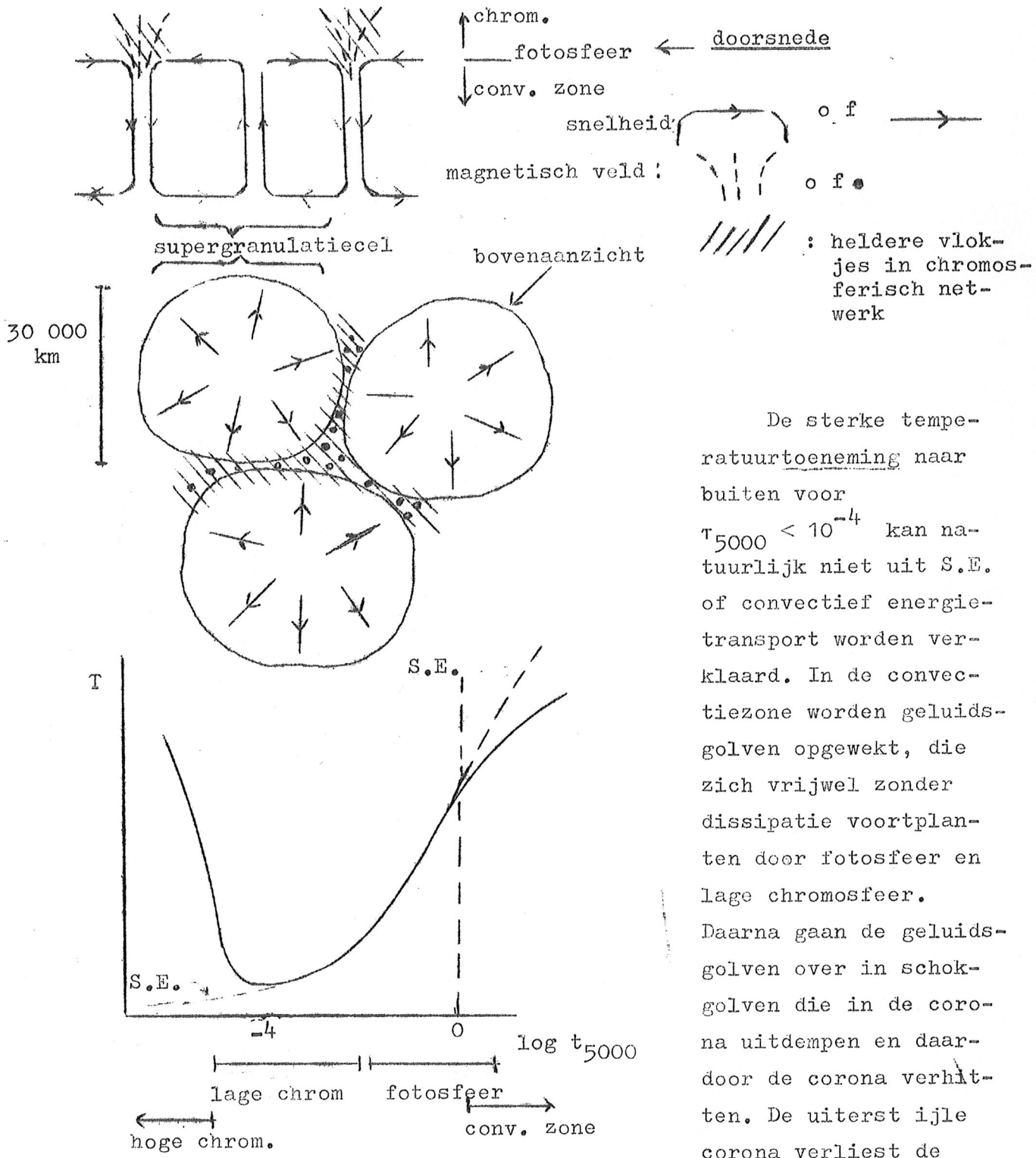
Heldere vlokjes in chromosferisch netwerk vallen samen met magnetische concentraties. Levensduur individuele cellen ongeveer een etmaal (!). (Spicules als "spelden" op "kussens" van vlokjes?).

(Zie figuur volgende bladzijde).

Oscillaties: Fotosferische gebieden met afmetingen van verscheidene duizenden km blijken een paar malen op en neer te gaan; de periode van deze snel uitdempende trilling bedraagt 5 minuten. De oorzaak moet in de convectiezone worden gezocht, maar de verklaring is nog niet zeker. Zijn het z.g. oppervlaktegolven in fotosfeer en lage chromosfeer die aangeslagen worden door convectieve elementen?

c. Interpretatie van het empirisch zonnemodel; de oorzaak van de corona.

Het in § III.2.2.2 afgeleide empirische zonnemodel kunnen wij nu als volgt begrijpen: het  $T(\tau)$  verloop volgt in het gebied  $-4 < \log \tau_{5000} < 0$  het theoretische model volgens stralingsevenwicht, waarbij rekening moet worden gehouden met het niet-grijze karakter van  $k_\nu$  (ook met de spektrale lijnen!). Voor  $\tau_{5000} > 1$  wordt de invloed van convectie merkbaar: de temperatuur neemt daar minder steil met de diepte toe dan uit S.E. zou volgen (waarom minder steil?)



De sterke temperatuurtoeneming naar buiten voor  $\tau_{5000} < 10^{-4}$  kan natuurlijk niet uit S.E. of convectief energietransport worden verklaard. In de convectiezone worden geluidsgolven opgewekt, die zich vrijwel zonder dissipatie voortplanten door fotosfeer en lage chromosfeer. Daarna gaan de geluidsgolven over in schokgolven die in de corona uitdempen en daardoor de corona verhitten. De uiterst ijle corona verliest de toegevoerde energie heel moeilijk (door de zonnewind, straling en

geleiding naar beneden), en daarom neemt de corona een zeer hoge evenwichtstemperatuur van 1 tot  $2 \times 10^6$  K aan, ondanks het feit dat de energieflex in geluids/schokgolven relatief zeer klein is:  $10^{-4}$  à  $10^{-3}$  van de totale energieflex die de zon verlaat. De corona kan dus als een indirect gevolg van de convectiezone worden opgevat. (Hoofdstuk IV gaat wat dieper in op de verhitting van de corona.)

De complexe en wisselende vorm van de corona is het gevolg van het wisselende magnetische veld (zie III, 4).

De hoge chromosfeer, die de grenslaag vormt tussen de "koude" lage chromosfeer en de hete corona is eveneens sterk inhomogeen; de z.g. spicules ("grassprietjes") hangen waarschijnlijk samen met de aan de randen van supergranulatiecellen geconcentreerde magnetische velden. De hoge chromosfeer en de corona wordt intensief onderzocht aan de hand van UV en röntgenopnamen in 1973 verkregen met Skylab.

### III.2.2.6. Enkele samenvattende conclusies.

De structuur van steratmosferen kan theoretisch worden begrepen met: - onderstelling van stralingsevenwicht, voor koelere sterren voor  $\tau_m > 1$  aangevuld met een (benaderde) theorie voor convectie; - hydrostatisch evenwicht.

De parameters zijn: 1)  $\pi F = \sigma T_{\text{eff}}^4$  2)  $g$  3) abundanties van enkele elementen.

Voor verschillende parametercombinaties kunnen theoretische modelatmosferen iteratief worden berekend; beschikbaar zijn:

goede modellen voor late B - A - vroege F-type sterren

redelijke modellen voor  $\begin{cases} O - \text{vroege B type sterren (NLTE effecten)} \\ F - \text{vroege G} \end{cases}$

benaderde modellen voor late G  $\rightarrow$  M : probleem is hier het sterke dekenefect door de enorme aantallen spektrale lijnen.

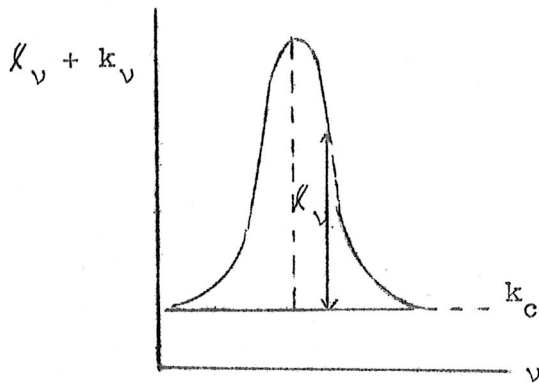
Deze modelatmosferen kunnen met modellen voor het sterinwendige verbonden worden.

Voor de zon kan uit  $I_\nu(0, \mu) = f(\nu, \mu)$  en met H.E. een semi-empirische modelatmosfeer worden geconstrueerd, die achteraf theoretisch kwantitatief te begrijpen is.

### III.2.3. Vorming van spektrale lijnen

#### III.2.3.1. Oplossing transportvergelijking; LTE en verstrooiing

De onderstaande formules volgen onmiddellijk uit het in § III.2.1.3. en § III.2.2.1. behandelde; daarom in telegramstijl:  
In spektrale lijn: continue extinctiecoëfficiënt  $k_c$ , over bereik lijn als onafhankelijk van  $\nu$  te beschouwen; continue emissiecoëfficiënt  $j_c$   
lijnextinctiecoëfficiënt  $\kappa_\nu$ , lijnemissiecoëfficiënt  $j_L$  of  $j_{L, \nu}$ .  
Vlakke lagen :  $ds = \frac{dz}{\mu}$  ;



$$\begin{aligned}
 d\tau_c &= -k_c \rho dz && \text{(in cont.)} \\
 d\tau_v &= -(k_c + \ell_v) \rho dz = (1 + \eta_v) d\tau_c && \text{(in cont. + lijn)}
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} d\tau_c \\ d\tau_v \end{aligned}} \right\} \text{(III,60)}$$

met  $\eta_v \equiv \ell_v/k_c$

$$\begin{aligned}
 \text{Bronfuncties } S_c &\equiv j_c/k_c ; S_L \equiv S_{L,v} \equiv j_{L,v}/\ell_v \\
 \text{totale bronfunctie: } S_v &\equiv \frac{j_c + j_{L,v}}{k_c + \ell_v} = \frac{S_c + \eta_v S_L}{1 + \eta_v}
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} S_c \\ S_L \\ S_v \end{aligned}} \right\} \text{(III,61)}$$

$$\text{(III,28)} \rightarrow \mu \frac{dI_v(\tau_c, \mu)}{(1 + \eta_v) d\tau_c} = I_v(\tau_c, \mu) - \frac{S_c + \eta_v S_L}{1 + \eta_v} \quad \text{(III,62)}$$

hierin hangen  $\eta_v$ ,  $S_c$  en  $S_L$  wel van  $\tau_c$  doch niet van  $\mu$  af.

Transportvergelijking kan analoog aan § III.2.2.1. worden opgelost, bijv.:

$$\text{(III,30b)} \rightarrow I_v(0, \mu) = \int_0^\infty \frac{S_c + \eta_v S_L}{1 + \eta_v} \cdot e^{-\int_0^{\tau_c} (1 + \eta_v) dt_c / \mu} \cdot (1 + \eta_v) \frac{d\tau_c}{\mu} \quad \text{(III,63)}$$

Kernen zeer sterke lijnen:

$$\eta_v \gg 1 \rightarrow I_v(0, \mu) \approx \int_0^\infty S_L e^{-\int_0^{\tau_c} \eta_v \frac{d\tau_c}{\mu}} \eta_v \frac{d\tau_c}{\mu} \quad \text{(III,63b)}$$

De bekende benaderingen blijven geldig:

$$I_v(0, \mu) \approx S_v(\tau_v = \mu) \quad \text{en} \quad F_v(0) \approx S_v(\tau_v = \frac{2}{3})$$

De verhouding  $\eta_v = \ell_v/k_c$  kan worden geschreven (niet precies onthouden!):

$$\eta_v = \frac{\ell_v/\rho}{k_c/\rho} = \frac{n_{r,s} \cdot \frac{\pi e^2}{mc} f \xi(v)}{n_H \alpha_c (T, P_e)} \quad \text{(III,64)}$$

waarin  $\alpha_{\nu} = \frac{\pi e^2}{mc} f \bar{\phi}(\nu)$  de lijnextinctiecoëfficiënt per deeltje in de onderste energietoestand (r,s) is.  $\bar{\phi}(\nu)$  is de vormfunctie, met  $\int_0^{\infty} \bar{\phi}(\nu) d\nu = 1$ ; zie verder § III.2.3.3.;  $f$  is de zgn. oscillatorsterkte ( $\approx 1$  voor zeer sterke lijnen), die quantummechanisch berekend moet worden of uit metingen afgeleid. Verder is  $n_{r,s}$  de deeltjesdichtheid van de deeltjes in de toestand (r,s). In de noemer stelt  $\alpha_c(T, P_e)$  de continue extinctiecoëfficiënt per H deeltje (atoom of ion) voor,  $n_H$  = deeltjesdichtheid waterstof (als kernen!) (dit is praktisch omdat de belangrijkste continue extincties door waterstof worden veroorzaakt, of gemakkelijk met  $n_H$  in verband kunnen worden gebracht). Verder

$$\frac{n_{r,s}}{n_H} = \frac{n_{r,s}}{\sum_r \sum_s n_{r,s}} \cdot \frac{\sum_r \sum_s n_{r,s}}{n_H} = \frac{n_{r,s}}{n_E} \cdot \frac{n_E}{n_H} \quad (\text{III, 65})$$

waarin  $n_E/n_H = A_E$  de abundantie voorstelt van het element E dat de spektrale lijn veroorzaakt.

Bijzonder geval: LTE :

- Dan is 1)  $S_L = S_c = S_{\nu} = B_{\nu}(T)$  - Planckfunctie  
 2) bezettingen energieniveaus en ionisatietoestanden geheel door wetten van Saha en van Boltzmann bepaald:

$$\frac{n_{r,s}}{\sum_r \sum_s n_{r,s}} = g_{r,s} \zeta(T, P_e) \quad (\text{III, 66})$$

waarbij in de functie  $\zeta(T, P_e)$  de vergelijkingen van Saha en Boltzmann geschakeld zijn; daarbij treden dan nog één ionisatie-energie ( $E_r$  of  $E_{r+1}$ ) en de excitatie-energie  $E_{r,s}$  op.

Wij kunnen nu het lijnprofiel  $I_{\nu}(\mu) = f(\nu)$  of  $F_{\nu}$  geheel doorrekenen, wanneer gegeven is: model  $T(\tau_c)$ ,  $P_e(\tau_c)$ .

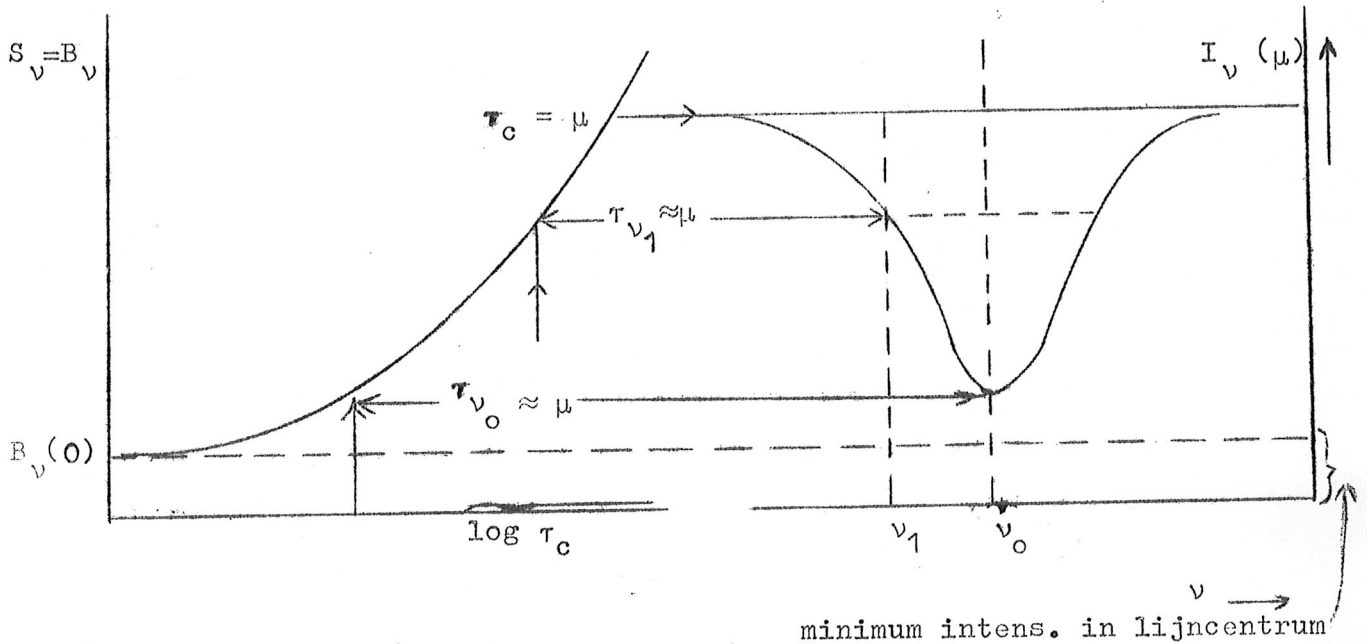
abundantie x oscillatorsterkte:  $f \times A_E$ .  
 vormfunctie (eventueel afhankelijk van  $\tau_c$ )  $\bar{\phi}(\nu)$   
 (zie § III.2.3.3.)

Het lijnprofiel "tekent de bronfunctie uit" ;

het is zo in te zien dat in atmosferen met een naar buiten afnemende T absorptielijnen moeten ontstaan. Merk op dat deze absorptielijnen nooit verder kunnen inzakken dan  $B_{\nu}(0)$ , met als consequentie dat de lijnen aan de uiterste rand van de ster verdwijnen, want

$$I_c(\mu = 0) = B_{\nu}(0) = I_{\nu_0}(\mu = 0).$$





Geval: continuum in LTE, lijnen: (coherente, isotrope) verstrooiing:

$$S_c = B_\nu ; S_L = J_\nu \text{ (uit III,20) .}$$

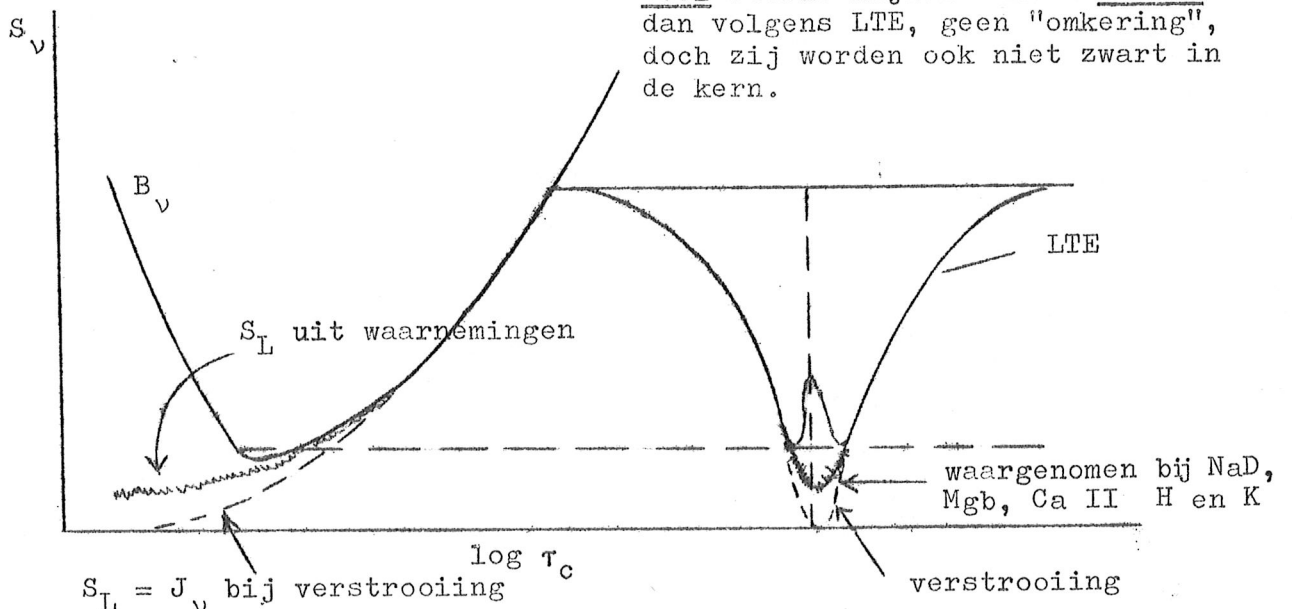
Zeer sterke lijnen:

$$I_\nu(0, \mu) \approx S_\nu (\tau_\nu = \mu) \approx J_\nu (\tau_\nu = \mu) .$$

Berekeningen tonen aan dat voor  $\eta_\nu \gg 1 \quad \lim_{\tau_c \rightarrow 0} J_\nu(\tau_c) = 0 .$

Gevolg: lijnkernen verstrooiingslijnen zijn vrijwel zwart, ook nabij de rand van de ster. Dit is als volgt in te zien: op alle diepten  $\tau_\nu \gg 1$  wordt de helft van de "naar buiten" snellende lijnfotonen "naar beneden" teruggestuurd, met de flinke waarschijnlijkheid daar echt geabsorbeerd te worden (via  $k_c$ ). Bij gevolg neemt de op- en de neergaande stroom fotonen met  $\nu \approx \nu_0$  voortdurend af, bij  $\tau_\nu \approx 1$  is de situatie ontstaan:  $0 \approx J_\nu (\tau_\nu = 1) \ll B_\nu (\tau_\nu = 1) .$

Vergelijking met profielen zeer sterke lijnen in zonnenspectrum:



Veel-sterke lijnen zakten verder in dan volgens LTE, geen "omkering", doch zij worden ook niet zwart in de kern.

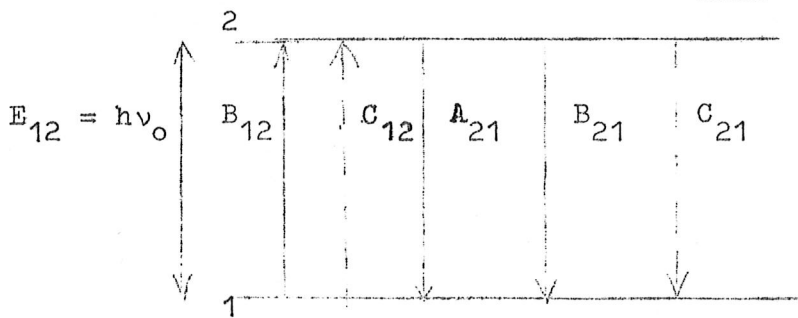
De sterkste Fraunhoferlijnen liggen in gedrag tussen zuivere absorptie- en zuivere verstrooiingslijnen in. Blijkbaar treden afwijkingen van LTE op die de bronfunctie in de lijn  $S_L$  kleiner maken dan de Planck functie.

Herinnering: In opdracht 7 op blz. III,28 is besproken dat het optreden van emissielijnen in het zonnespektrum voor  $\lambda < 1600 \text{ \AA}$  begrepen kan worden door het weer toenemen van de (Planckschtige) bronfunctie naar buiten toe in de hoge chromosfeer.

III.2.3.2. Statistisch evenwicht; het twee-niveau atoom.

Om de lijnvorming precies te bekijken (zonder de hypothese LTE) moeten wij alle microscopische processen bekijken die de energieniveau's bevolken en ontvolken. Wanneer de atmosfeer zich in een stationaire toestand bevindt, dan moet in elk volume-element:

aantal overgangen per tijdseenheid naar energieniveau



$i$  = aantal overgangen per tijdseenheid uit energieniveau  $i$ , opdat de bezetting van energieniveau  $i$  niet verandert, ofwel  $\frac{d N_i}{dt} = 0$  : statistisch evenwicht.

Om het principe van behandeling te illustreren bekijken wij een sterk geschematiseerd atoom, dat slechts twee energieniveau's heeft (benadering voor resonantielijnen Ly  $\alpha$ , Na D, .....

Statistisch evenwicht, dus een aantal processen  $1 \rightarrow 2$  = aantal processen  $2 \rightarrow 1$  dus:

$$B_{12} \cdot N_1 \cdot 4\pi \int_0^\infty J_{\nu} \delta_{\nu} d\nu + C_{12} N_1 = A_{21} N_2 + B_{21} \cdot N_2 \cdot 4\pi \int_0^\infty J_{\nu} \delta_{\nu} d\nu + C_{21} N_2 \quad (\text{III,67})$$

↑ foto-excitatie      ↑ botsings-excitatie      ↑ spontane emissie      ↑ botsings-deëxcitatie

h $\nu$       atoom

h $\nu$

h $\nu$

← gestimuleerde of geïnduceerde } emissie

(zie *Struktuur der Materie* § 2J ; de coëfficiënten vallen daar iets anders uit omdat zij daar op de stralingsdichtheid  $u_{\nu} = 4\pi J_{\nu}/c$  en niet op  $J_{\nu}$  betrokken zijn).

De zogenaamde Einsteincoëfficiënten  $B_{12}$ ,  $B_{21}$  en  $A_{21}$  zijn atomaire constanten die door eenvoudige betrekkingen met elkaar en met de in (III,64) gebruikte oscillatorsterkte  $f$  verbonden zijn. Daarom zijn alle vier coëfficiënten bekend, zodra er één quantummechanisch berekend of experimenteel bepaald is. Ook de twee coëfficiënten  $C_{12}$  en  $C_{21}$  hangen samen. Meestal zijn de belangrijkste botsingsprocessen die met elektronen zodat  $C_{12}$  en  $C_{21}$  beide evenredig zijn met de elektronendichtheid  $N_e$ . Ter illustratie leiden wij de betrekking tussen  $C_{12}$  en  $C_{21}$  hieronder af:

Aangezien  $C_{12}$  en  $C_{21}$  atoomconstanten zijn die dus niet afhangen van het soort evenwicht tussen medium en stralingsveld, leiden wij de relatie af bij TE. Dan heerst gedetailleerd evenwicht (blz. III,13) m.a.w.  $C_{12}N_1^* = C_{21}N_2^*$  (\*: bij TE), dus:

$$\frac{C_{12}}{C_{21}} = \frac{N_2^*}{N_1^*} = \frac{g_2}{g_1} e^{-h\nu_0/(kT_e)}, \quad (\text{III,68})$$

Boltzmann (III,24a)

waarin (nu ook voor situaties algemener dan TE)  $T_e$  de elektronentemperatuur voorstelt.

Uit de relatie tussen de Einsteincoëfficiënten en (III,67 en 68) kan men afleiden:

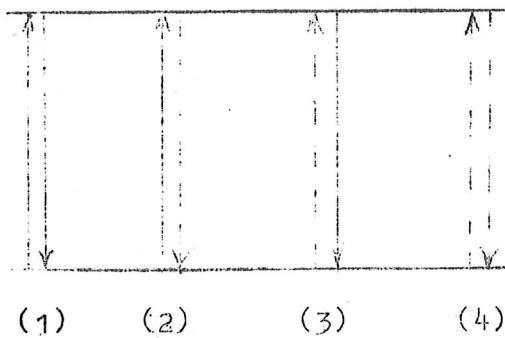
$$S_L = \frac{1}{1 + \epsilon} \int_0^\infty J_\nu \xi_\nu d\nu + \frac{\epsilon}{1 + \epsilon} B_\nu(T_e) \quad (\text{III,69a})$$

waarin

$$\epsilon = \frac{C_{21}}{A_{21}} (1 - e^{-h\nu_0/(kT_e)}) \approx C_{21}/A_{21} \quad (\text{III,69b})$$

Vergelijk (III,69a) met (III,21a): de eerste term in het rechterlid stelt de verstrooiing voor, gewogen met de waarschijnlijkheid dat het aangeslagen atoom stralend terugkeert naar de grondtoestand  $((1 + \epsilon)^{-1} \approx A_{21}/(A_{21} + C_{21}))$ . De tweede term stelt de thermische emissie voor: de Planck functie gewogen met de waarschijnlijkheid dat het aangeslagen atoom door een botsing terugkeert naar de grondtoestand. Dat de bronfunctie zo netjes in een verstrooiingsbestanddeel en een Planck's bestanddeel (bij  $T = T_e$ ) uiteenvalt, wordt duidelijk wanneer men let op de paren processen die zich bij een twee niveau atoom kunnen afspelen: (tekening zie volgende pagina)

- (1) foto excitatie + spontane emissie  $\rightarrow$  verstrooiing
- (2) botsingsexcitatie + spontane emissie  $\rightarrow$  thermische emissie
- (3) foto excitatie + botsingsdeëxcitatie  $\rightarrow$  zuivere absorptie
- (4) botsingsexcitatie + botsingsdeëxcitatie: niet van direct belang



voor de wisselwerking straling-materie doch wel voor de bezettingsverhouding  $N_2/N_1$ , en daarmee voor de bronfunctie  $S_L$  (zie hieronder).

Is voor alle relevante diepten:

a)  $\epsilon \ll 1$  dan gedraagt de lijn zich als een verstrooiingslijn: de kern wordt zwart (zie blz. III,46).

b)  $\epsilon \gg 1$  dan geldt LTE.

Veel resonantielijnen liggen tussen deze uitersten in, hetgeen kwalitatief het profiel van sterke lijnen uit het zonnespektrum verklaart (zie figuur aan het eind van § III,2.3.2.) .

Waar botsingsprocessen overheersen (dus o.a.  $\epsilon \gg 1$ ) komt  $N_2/N_1$  overeen met Boltzmann bij  $T = T_e$ , want (III,67)  $\rightarrow C_{12}N_1 \approx C_{21}N_2$ , met (III,68) blijkt juistheid van bewering. Aanschouwelijk duidelijk: bezetting energieniveau's in evenwicht met Maxwellse energieverdeling der vrije elektronen. (III,69a)  $\rightarrow S_L = B_V(T_e)$ . Kortom: waar botsingen overheersen geldt LTE. Aangezien  $C_{21}(\cdot) N_e$  neemt  $\epsilon$  snel met de diepte in de steratmosfeer toe  $\rightarrow$  op voldoende diepte heerst LTE.

Waar stralingsprocessen overheersen kan zich alleen LTE instellen wanneer  $\int J_V \bar{q}_V d\nu = \int B_V \bar{q}_V d\nu$ . Ook aan deze voorwaarde is op grotere diepte in de atmosfeer voldaan.

Bij afwijkingen van LTE moeten voor het berekenen van een lijnprofiel de vergelijking voor stralingstransport en de vergelijking voor statistisch evenwicht (III,67) simultaan worden opgelost. De reden is dat in (III,67) de gemiddelde monochromatische intensiteiten in de spektrale lijn  $J_V$  optreden die uit de vergelijking voor stralingstransport moeten worden gevonden. Omgekeerd heeft men voor de vergelijkingen van stralingstransport voor de monochromatische optische diepte  $\tau_V$  de extinctiecoëfficiënt  $\kappa_V$  nodig, waarin de bezetting van het onderniveau  $N_1$  optreedt (zie vergel. III,64) en die moet weer uit (III,67) komen. Ook  $S_L$  hangt van  $N_2/N_1$  af, al blijkt dat niet uit III.69a. Aanschouwelijk is dit wel duidelijk: de emissiecoëfficiënt  $j_L$  hangt van  $N_2$  af.

In beginsel kan men meer dan twee energieniveaus (en eventueel ook het continuum) meenemen; men krijgt dan (i.p.v. III,67) een aantal vergelijkingen voor statistisch evenwicht: voor elk niveau in i één, met links alle overgangen uit niveau i en rechts alle overgangen naar niveau i.

Opgave 10: Stel zo'n vergelijking voor niveau i op (niet moeilijk!).

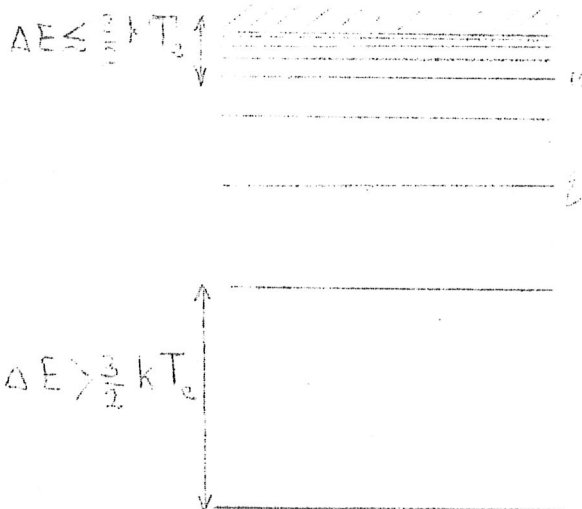
Nu moeten alle vergelijkingen voor statistisch evenwicht en de transport-vergelijkingen voor alle optredende spektrale lijnen en continua simultaan worden opgelost. Voor de bezettingsverhouding  $N_u/N_\ell$  van twee niveaus u en ℓ zijn nu niet alleen alle direkte overgangen tussen u en ℓ van belang, maar ook de indirecte, via andere niveaus. Gedurende de laatste jaren zijn voor grote computers programma's ontwikkeld, waarmee de vergelijkingen voor stralingstransport en voor statistisch evenwicht simultaan worden opgelost voor atomen (ionen) tot ongeveer 10 discrete energieniveaus + continuum toe.

Analoog aan het twee-niveau probleem kan de bezettingsverhouding  $N_u/N_\ell$  en de bronfunctie  $S_{L(u,\ell)}$  volgens LTE berekend worden indien:

1. de dominante direkte en/of indirekte processen tussen ℓ en u botsingsprocessen zijn; en/of:
2. voor de belangrijkste stralingsprocessen geldt

$$\int J_\nu \Phi_\nu d\nu = \int B_\nu(T_e) \Phi_\nu d\nu .$$

In de diepste delen van de atmosfeer is aan beide voorwaarden voldaan.



In de hogere delen van de atmosfeer wijken de bezettingen van de laagste energieniveaus het sterkste van LTE af, onder meer omdat de energie-afstanden  $\Delta E$  tussen die niveaus onderling en van elk van die niveaus naar het continuum aanzienlijk groter zijn dan de middelbare energie van de electronen  $\frac{3}{2} kT_e$ . Daardoor zijn de botsingsprocessen tussen de meeste van de niveaus relatief onbelangrijk. Daarentegen zijn de niveaus

vlak bij de ionisatiegrens sterk gekoppeld door botsingsprocessen, zowel onderling als met het continuum, onder meer omdat de energie-afstanden  $\Delta E \lesssim \frac{3}{2} kT_e$ . De bezettingen van deze niveaus zullen daarom onderling en met het continuum in LTE zijn. Bekijk tegen deze achtergrond opnieuw de tabel op blz. III, 18.

Een belangrijk gevolg is dat de concentratie van het  $H^-$  ion, dat een kleine "ionisatie"-energie ( $E = 0.75$  eV) heeft, zelfs in relatief ijle delen van de atmosfeer, nog in LTE is met de concentratie van de H atomen. Volgens het bovenstaande zullen ook de bf-continua uitgaande van hoge energieniveaus in LTE zijn. Uit de aard der zaak mogen de ff-continua met LTE berekend worden. Gevolg: het continue spectrum van de zon mag in het zichtbare spektrale gebied en in het IR met LTE doorgerekend worden (gebruikt in § III.2.2.2.).

Twee belangrijke klassen problemen kunnen nu worden aangepakt:

1. Gegeven een model  $\{ T_e, P_g, P_e, \dots \}$  als functie van de diepte in de atmosfeer. Men kan dan een aantal lijnprofielen en bf-continua voor een bepaald atoom of ion berekenen en met waarnemingen vergelijken.
2. Men kan in principe zelfs een NLTE modelatmosfeer in stralings-evenwicht berekenen door simultane oplossing van de vergelijkingen voor stralingstransport, voor stralingsevenwicht, voor hydrostatisch evenwicht en voor statistisch evenwicht. Met succes zijn modellen berekend voor sterren van de spektrale typen late B, vroege A, vroege F, waarbij men de bezettingen van de onderste drie of vier niveau's van H in principe niet, doch de hogere niveau's wel in LTE laat zijn, zowel onderling als met geïoniseerd H. Indien nodig kan men ook vorming van  $H^-$  meerekenen (in LTE met grondtoestand H).

Bij al deze berekeningen dienen de atoomconstanten voor de stralende en de botsingsovergangen bekend te zijn (maar dat laat nog wel wat te wensen over).

### III.2.3.3. Lijnverbreding

De energieniveau's zijn niet onbegrensd scherp. Aangezien een atoom door spontane emissieprocessen gedurende een beperkte tijd  $\tau$  in een aangeslagen toestand verblijft, heeft zo'n niveau een onscherpte  $\Delta E$  volgens de onzekerheidsrelatie van Heisenberg  $\Delta E \cdot \tau \approx h$ :

natuurlijke lijnbreedte of stralingsdemping.

In astrofysica meestal belangrijker: druk- of botsingsverbreding: de energieniveau's worden verschoven door botsingen met of stoorvelden van naburige deeltjes (electronen, ionen, neutrale atomen).

Stralingsdemping en drukverbreding (bij elementen zwaarder dan helium) geven voor een gemiddeld, als stilstaand gedacht, atoom aanleiding tot een dempings- of Lorentzprofiel:

$$\xi(\nu) = \frac{(\gamma/4\pi)^2}{(\nu - \nu_0)^2 + (\gamma/4\pi)^2} \quad (\text{III,70})$$

waarin de totale dempingsconstante  $\gamma$  verkregen wordt door de dempingsconstanten voor de individuele verbredingsmechanismen op te tellen. Bij botsingsverbredingen is  $\gamma$  evenredig met de dichtheid van de storende deeltjes; verder is  $\gamma$  zwak afhankelijk van T en sterk afhankelijk van de betreffende lijn.

Een Lorentzprofiel heeft een smalle kern en wijde vleugels. De benadering (III,70) voldoet goed voor de meeste lijnen, doch bij de H en He lijnen, die zeer gevoelig zijn voor stoorvelden van geladen deeltjes (Stark effect) zijn de profielfuncties anders. Doppler-verbreding: atomen zullen in de gezichtslijn verschillende snelheden  $\xi$  hebben, die doorgaans Gaussisch verdeeld zullen zijn: fractie atomen  $dN/N$  met snelheid tussen  $\xi$  en  $\xi + d\xi$  :

$$\frac{dN}{N} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2/\xi_0^2} d\xi/\xi_0 \quad (\text{III,71})$$

waarin  $\xi_0$  de middelbare snelheid in de gezichtslijn is. De dopplerverschuiving bedraagt  $\frac{\Delta v}{v_0} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = \frac{\xi}{c}$  ; de dopplerbreedten worden als volgt gedefinieerd:

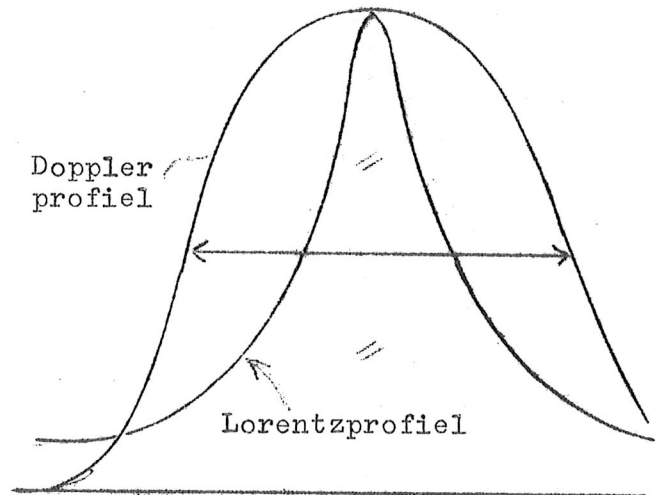
$$\frac{\Delta v_D}{v_0} = \frac{\Delta \lambda_D}{\lambda_0} = \frac{\xi_0}{c}, \quad (\text{III,72})$$

Wanneer de spectrale lijn bij stilstaande atomen volledig scherp zou zijn, dan zou de profielfunctie zijn:

$$\Phi(\Delta v) d(\Delta v) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta v_D} e^{-[\Delta v/\Delta v_0]^2} d(\Delta v) \quad (\text{III,73})$$

In astrofysische omstandigheden heeft een Doppler profiel een brede kern en vrijwel geen vleugels; een Lorentzprofiel heeft een scherpe kern en lage doch uitgebreide vleugels.

Opgave 12: Druk hele halfwaardebreedte van zuiver Dopplerprofiel uit in  $\Delta v_D$  en van zuiver Lorentzprofiel in  $\gamma$  .



Bij realistische niet-scherpe spectrale lijnen moet men de profielfunctie voor stilstaande

schematisch, pijlen geven hele halfwaardebreedte aan.

atomen "versmeren" met de gaussische verdeling van dopplerverschuivingen. (figuur tijdens college). Men krijgt, na enig herleiden en na invoering van dimensieloze frequentie (of golflengte grootheden):

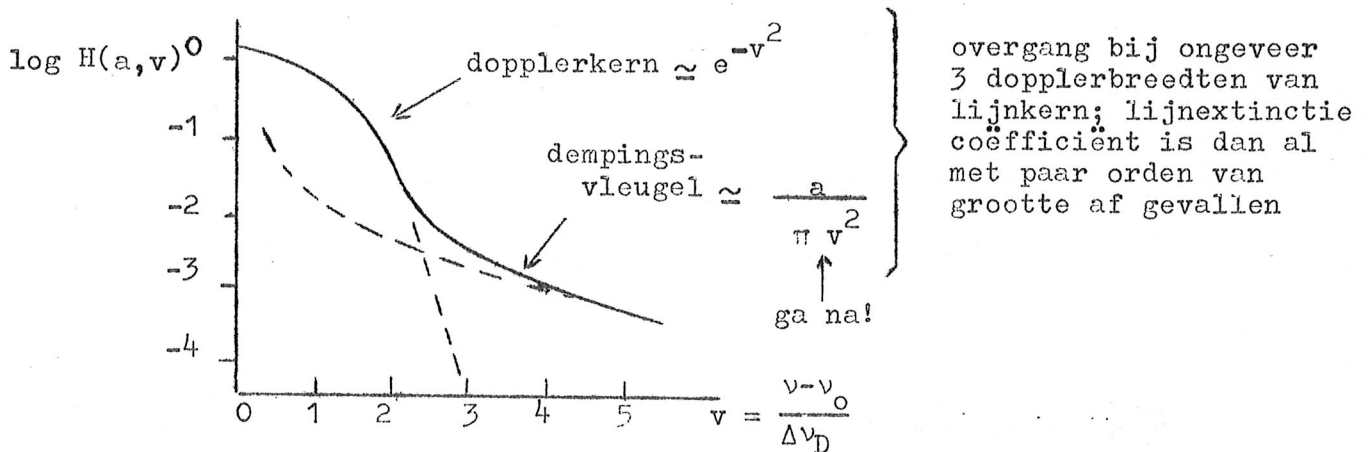
$y \equiv \Delta v/\Delta v_D$  (integratie variabele)  $v \equiv (v-v_0) / \Delta v_D$  (afstand tot lijncentrum) en  $a \equiv \gamma / (4\pi \Delta v_D)$  :

$$\Phi(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2} dy}{(v-y)^2 + a^2} \quad (\text{III,74})$$

$H(a,v)$ , de z.g. Voigt functie, numeriek te berekenen

(formule III,74 niet onthouden, afleiding hoeft niet gekend te worden;  $\Phi(v)$  is als volgt genormeerd  $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(v) dv = 1$ , bij gevolg is  $\Phi(v) = \Phi(v) / \Delta v_D$ ).

In astrofysische gevallen blijkt  $a = \gamma / (4\pi \Delta v_D) < 1$ , doorgaans zelfs  $a \ll 1$ . Gevolg: kern van Voigtprofiel is een Dopplerprofiel, terwijl de vleugels de vleugels van het Lorentzprofiel volgen (ga dit na aan de hand van bovenstaande figuren en opgave 12!) Bovendien geldt dan  $H(a, v) \approx 1$  voor  $v \approx 0$ .



Conclusie: bij zwakke lijnen kan men het profiel door een dopplerprofiel benaderen (geldt meestal niet voor H en de meeste He lijnen). Van vleugels begint men pas iets te merken bij sterke lijnen, met

$$\eta_0 = \ell_0 / k_0 \gtrsim 10^3 \quad (\text{in lijncentrum}).$$

Wat moet men voor  $\xi_0$  invullen?

Bij zuiver thermische verbreding:  $\xi_0 = \sqrt{\frac{2RT}{A}}$  (III,75a)

volgens de kinetische gastheorie  $R = 8 \cdot 31 \times 10^7 \text{ erg k}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ ,  $A = \text{atoomgewicht}$ .

Bij toepassing bleek dat de waargenomen dopplerkernen in spektrale lijnen van zon en van vele sterren breder zijn dan door (III,73, 74 en 75a) wordt voorspeld. Men heeft daarom turbulentie ingevoerd: onregelmatige wervelingen in het gas waar de lijn wordt gevormd. De z.g. microturbulentie is een snelheidsveld van kleine, optisch dunne elementjes. Indien de turbulente snelheden weer gaussisch verdeeld zijn dan geven thermische snelheden + microturbulentie samen weer een dopplerkern in de profielfunctie, nu met

$$\xi_0 = \sqrt{\frac{2RT}{A} + \xi_{mt}^2} \quad (\text{III,75b})$$

waarin  $\xi_{mt}$  de middelbare snelheidscomponent van de microturbulentie in de gezichtslijn is.



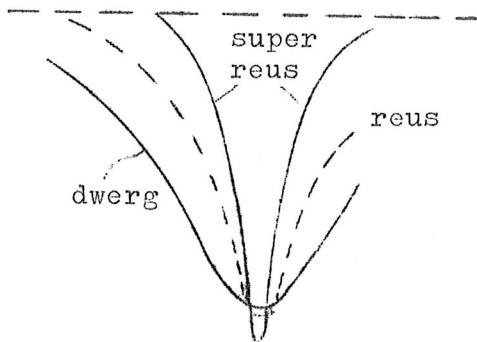
Opgave 13: Bereken  $\xi_0$  voor  $T = 5000 \text{ K}$ , voor  $H$  ( $A = 1$ ),  
 $Na$  ( $A = 23$ ) en  $Ba$  ( $A = 137$ )  
 en wel a) voor  $\xi_{mt} = 0$  en  
 b) voor  $\xi_{mt} = 1 \text{ km sec}^{-1}$ .

Opgave 14: Geef aan hoe men uit spectra thermische en turbulente ver-  
 breiding empirisch kan scheiden.

Toepassing: Lijnverbreiding als criterium over lichtsterkte  $L$  (of gra-  
 vitatieversnelling  $g$ ).

De breedte van Balmerlijnen van waterstof (géén Voigtprofielen!) zijn  
 door het Starkeffect zeer gevoelig voor de druk. Dit maakt het moge-  
 lijk om uit het spectrum dwergen (hoge  $g$ , dus hoge druk) van reuzen  
 (lagere  $g$ , dus lagere druk, zie blz. III,38) te onderscheiden:

lijnprefiel  $H \gamma$  (schematisch)

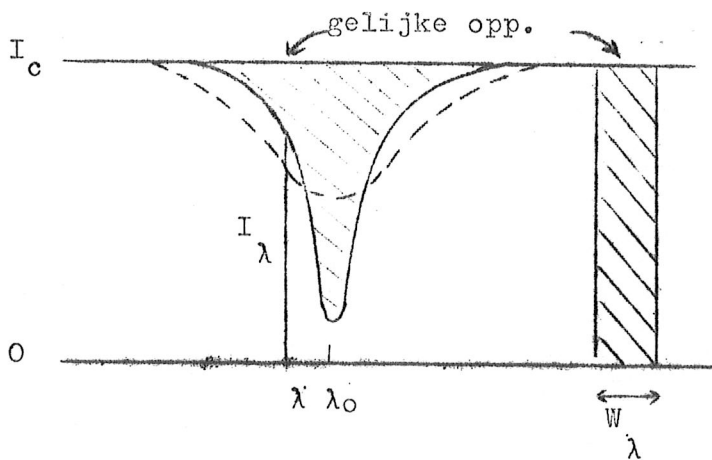


de Balmerlijnen zijn in de dwerg het  
 breedste.

Vraag: Waarom kan men alleen sterren  
 van dezelfde  $T_{eff}$  (spectrale  
 klasse) direct vergelijken?

Gevolg: men moet het lichtsterkte kri-  
 terium (bijv.: breedte van  $H \gamma$ ) voor de  
 verschillende spectrale klassen afzon-  
 derlijk ijken.

III.2.3.4. Equivalente breedten, groeikrommen, abundanties



Het intensiteitsprofiel in  
 een spectrale lijn wordt  
 "versmeerd" door de spec-  
 trograaf, zoals het waar-  
 genomen profiel (---) bre-  
 der en ondieper wordt dan  
 het ware profiel (—).  
 Wanneer het spectrale  
 scheidende vermogen klein  
 is, kan men het ware pro-  
 fiel niet meer reconstrue-  
 ren, doch de totale in de

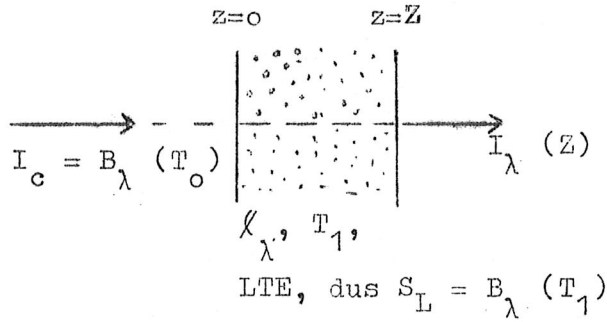
lijn verdwenen energie = gearceerd oppervlak blijft behouden. Maat:  
 equivalente breedte  $W_\lambda$  (Minnaert), of

$$W_\lambda(\mu) \equiv \int_{\lambda_0 - \infty}^{\lambda_0 + \infty} d_\lambda(\mu) d\lambda \equiv \int_{\lambda_0 - \infty}^{\lambda_0 + \infty} \frac{I_c(\mu) - I_\lambda(\mu)}{I_c(\mu)} d\lambda \quad (\text{zon}) \quad (\text{III,76a})$$

of

$$W_\lambda = \int_{\lambda_0^{-\infty}}^{\lambda_0^{+\infty}} D_\lambda d\lambda \equiv \int_{\lambda_0^{-\infty}}^{\lambda_0^{+\infty}} \frac{F_c - F_\lambda}{F_c} d\lambda \quad (\text{sterren}) \quad (\text{III,76b})$$

Wij willen nu de equivalente breedte  $W_\lambda(\mu)$  berekenen voor een vereenvoudigd model.



Een lichtbundel met een continue spectrum  $I_c = B_\lambda(T_0)$  valt door een homogene laag met een temperatuur  $T_1 < T_0$ , waarin uitsluitend selectieve (= lijn-) extinctie en -emissie optreedt; in deze laag wordt LTE aangenomen.

Voorbeelden: 1. in laboratorium: lichtbundel door absorptievat;

2. astrofysisch: Schuster-Schwarzschild model: boven een



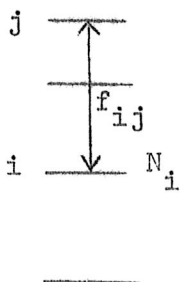
laag waarin alleen continue processen optreden ligt een z.g. "omkerende laag", waarin uitsluitend selectieve processen voorkomen. De intensiteit van uittredende straling  $I_\lambda(Z)$  volgt direkt van blz. III,9 en 10 :

$$I_\lambda(Z) = B_\lambda(T_0) e^{-\tau_{L,\lambda}} + B_\lambda(T_1) (1 - e^{-\tau_{L,\lambda}}) \quad (\text{III,77a})$$

extinctiecoëff. per deeltje in niveau i

$$\text{met } \tau_{L,\lambda} = \kappa_\lambda \rho Z = N_i Z f_{ij} \frac{\pi e^2}{mc} \underbrace{\frac{\lambda_0^2}{\sqrt{\pi} \Delta\lambda_D c} \cdot H(a,v)}_{\phi(\lambda)} \quad (\text{III,77b})$$

(vergelijk III,64 en 74).



$$= \kappa_{\lambda_0} \rho Z \cdot H(a,v) = \tau_{L,\lambda_0} H(a,v), \quad (\text{III,77c})$$

waarin de lijn optreedt tussen de niveau's i en j,  $f_{ij}$  de oscillatiesterkte, en  $\kappa_{\lambda_0}$  en  $\tau_{L,\lambda_0}$  zijn resp. de lijnextinctiecoëfficiënt en de optische dikte van de laag bij de centrale golflengte  $\lambda_0$  want

$$H(a,v) \approx 1 \quad \text{voor } v = \frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_D} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\Delta\lambda_D} = 0 \quad (\text{voor kleine } a).$$

Voor de relatieve lijninzakking volgt uit (III,77a) :

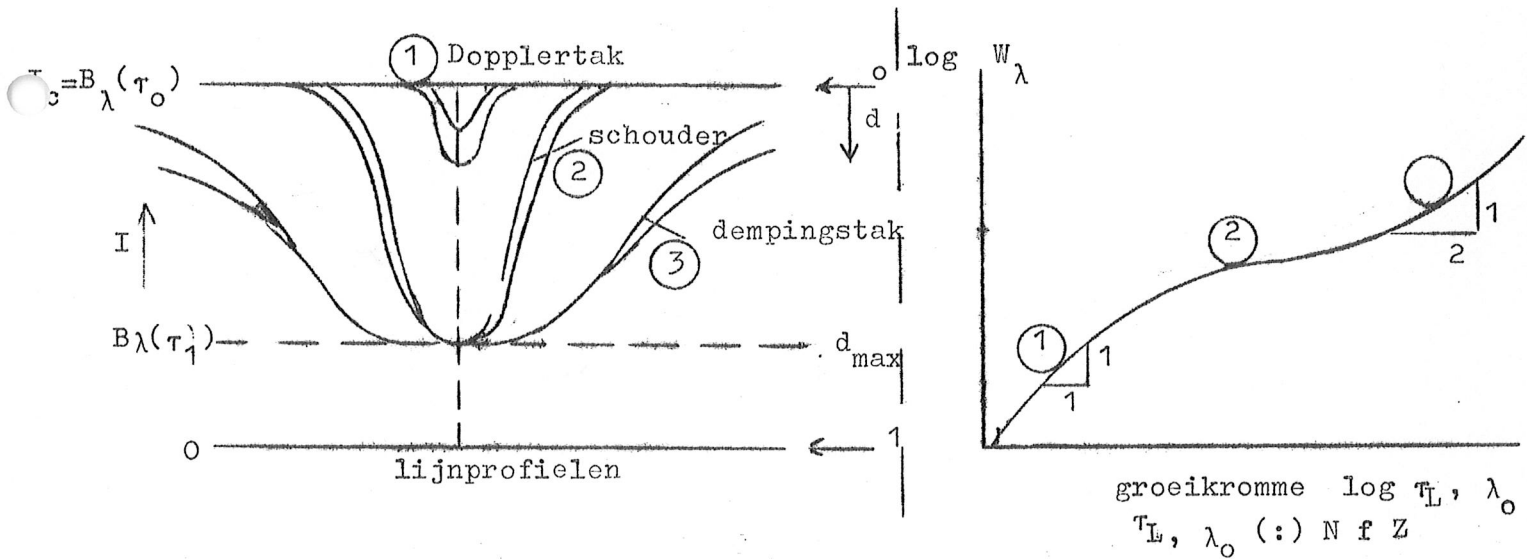
$$d_\lambda \equiv \frac{I_c(Z) - I_\lambda(Z)}{I_c(Z)} = \frac{B_\lambda(T_0) - B_\lambda(T_1)}{B_\lambda(T_0)} \cdot (1 - e^{-\tau_{L,\lambda}}) \quad (\text{III,78})$$

$d_{\max}$  : de maximale diepte waartoe de lijn kan inzakken.

Samen met (III,76) geeft dit voor de equivalente breedte:

$$W_\lambda = d_{\max} \int_{\text{"0"}}^{\text{"\infty"}} (1 - e^{-\tau_{L,\lambda}}) d\lambda \quad (\text{III,79})$$

Wij gaan nu na hoe het lijnprofiel en de equivalente breedte veranderen wanneer het effectieve aantal absorberende deeltjes  $N_i Z f_{ij}$  toeneemt.



Het lijnprofiel en de grootte van  $W_\lambda$  hangt af van  $\tau_{L, \lambda_0}$   
 (1) zeer zwakke lijnen:  $\tau_{L, \lambda_0} \ll$  dus  $\tau_{L, \lambda} \ll$  voor alle  $\lambda_0$  (III,78)  $\rightarrow$

$$d_\lambda \approx d_{\max} \cdot \tau_{L, \lambda} \quad \text{of:} \quad -\left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_D}\right)^2$$

$$d_\lambda = d_{\max} \cdot \tau_{L, \lambda_0} e^{-\dots} \quad (\text{III,80})$$

want volgens § III.2.3:3.3 mag  $\lambda_\lambda$  hier met een dopplerprofiel worden benaderd. Bij deze zwakke lijnen neemt de uitzakking  $d_\lambda$  overall evenredig met  $\tau_{L, \lambda_0}$  toe, dit geldt dus ook voor de equivalente breedte:

$$\begin{aligned} (\text{III,79}) \rightarrow W_\lambda &= d_{\max} \int \tau_{L, \lambda} d\lambda = d_{\max} \cdot \tau_{L, \lambda_0} \cdot \pi \cdot \Delta\lambda_D \\ &= d_{\max} \cdot N_i Z f_{ij} \cdot \lambda_0^2 \cdot \frac{\pi e^2}{mc^2} \end{aligned} \quad (\text{III,81})$$

$W_\lambda$  groeit dus evenredig aan met  $\tau_{L, \lambda_0}$ , dus met  $N_i \cdot Z \cdot f_{ij}$ , het effectieve aantal absorberende atomen.

Vraag: welke vorm hebben de absorptielijnprofielen zelf?

Dopplertak: helling 1:1 in groeikromme:  $\log W_\lambda$  tegen  $\log \tau_{L,\lambda_0}$ .  
 Zodra de optische dikte in de lijnkern  $\tau_{L,\lambda_0}$  in de buurt van 1 komt, groeit de lijninzakking minder snel dan evenredig met  $\tau_{L,\lambda_0}$  aan. Vervolgens komen wij in het gebied van:

- (2) verzadigde lijnen, met  $\tau_{L,\lambda_0} \gtrsim 10$ . De lijnkern wordt nu "platgedrukt tegen de bronfunctie  $B_\lambda(T_1)$ "; de equivalente breedte groeit nu slechts heel langzaam aan voor toenemende  $\tau_{L,\lambda_0}$ , uit bovenstaande figuur blijkt wel dat hier

$$W_\lambda \approx d_{\max} \cdot \Delta\lambda_D \cdot \underbrace{\quad \quad \quad}_{\text{afhankelijk van } \tau_{L,\lambda_0}} \quad \quad \quad \text{(III,82)}$$

Schouder in de groeikromme.

Vraag: welke vorm hebben absorptielijnprofielen in dit geval?

Deze toestand duurt zó lang totdat  $\tau_{L,\lambda_0}$  zó groot is geworden dat ontstaan:

- (3) lijnen met dempingsvleugels,  $\tau_{L,\lambda_0} \gg 1$  ( $\gtrsim 1000$  bijv., zie fig. op blz. III,53). Terwijl er in de lijnkern niets verandert, groeit de inzakking in de vleugels aan met toenemende  $\tau_{L,\lambda_0}$  (of: toenemend aantal effectieve deeltjes  $N_i f_{ij} Z$ ). Voor  $\lambda$  ver in de vleugel, waar  $\tau_{L,\lambda} \ll 1$  is, groeit de inzakking  $d_\lambda$  weer evenredig met  $N_i f_{ij} Z$  aan (zie opnieuw (III,78)).

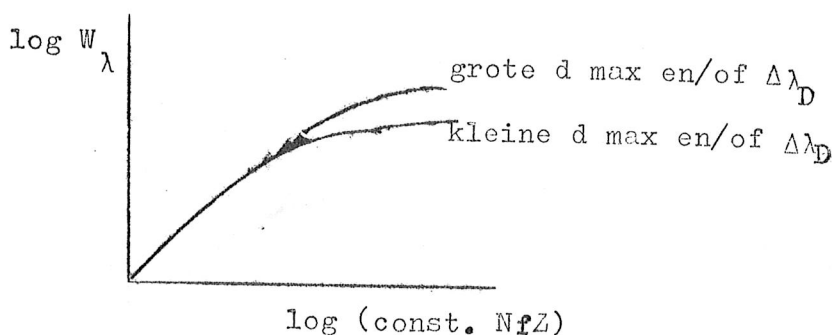
Bepaalt men door integratie  $W_\lambda$ , dan vindt men (niet nagaan):

$$W_\lambda = d_{\max} \cdot \Delta\lambda_D \cdot \sqrt{\sqrt{\pi} \cdot \tau_{L,\lambda_0} \cdot a} \quad (:) \quad d_{\max} \sqrt{N_i f_{ij} Z \gamma} \quad \text{(III,83)}$$

( $a = \gamma / (4\pi \Delta \nu_D)$ ), zie bij formule III,74).

Dempingstak van de groeikromme:  $W_\lambda$  neemt evenredig met de wortel uit het effectieve aantal absorberende deeltjes toe (helling 1:2).

Wanneer wij een groeikromme construeren door  $\log W_\lambda$  uit te zetten tegen  $\log (N_i f_{ij} Z)$ , dan zien wij dat de schouder omhoog gaat wanneer  $d_{\max}$  en/of  $\Delta\lambda_D$  groter wordt gemaakt (zie formule (III,82) en daarachter liggend principe.



Opgave 15: Leg dit kwalitatief en aanschouwelijk uit, gebruik makend van een figuur als op blz. 56, links.

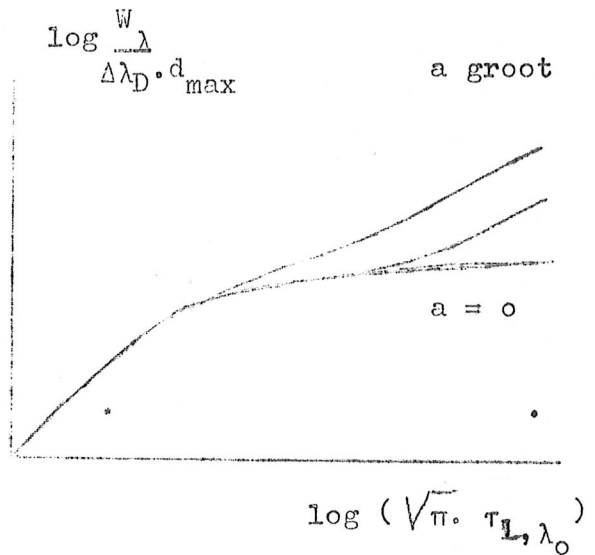
Dopplertak en schouder vallen voor verschillende  $d_{max}$  en  $\Delta\lambda_D$  toch precies samen wanneer

$$\text{men } \log \left( \frac{W_\lambda}{\Delta\lambda_D \cdot d_{max}} \right)$$

uitzet tegen

$$\log \left( \pi \cdot \tau_{L, \lambda_0} \right) =$$

$$= \log \left( NfZ \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda_0} \cdot \frac{\pi e^2}{mc^2} \right),$$



zoals uit de vergelijkingen (III,81 en 82) direkt blijkt.

Dan blijft echter de dempingstak eerder inzetten naarmate  $a$  (of  $\gamma$ ) groter is. - Zie formule (III,83).

Opgave 16: Leg dit ook kwalitatief uit.

In de praktijk kent men  $d_{max}$  en  $\Delta\lambda_D$  niet wanneer men met een groeikromme-analyse begint. Men schrijft  $\Delta\lambda_D = \frac{g_0}{c} \lambda_0$ ; voor zeer zwakke lijnen volgt uit (III,81):

$$W_\lambda / \lambda_0 = d_{max} \cdot \frac{\pi e^2}{mc^2} \cdot Z \cdot \lambda_0 \cdot f_{ij} \cdot N_i \equiv X \quad \text{(III,84a)}$$

Men krijgt nu een empirische groeikromme door de uit de waarnemingen bepaalde  $\log \left( \frac{W_\lambda}{\lambda_0} \right)$  uit te zetten tegen  $\log X = \log (d_{max} \dots N_i)$ , deze abscis bevat fysische parameters ( $f_{ij}$ ) en parameters over de lijnvormende laag ( $d_{max} \rightarrow T_1, Z, N_i$ ) die nog moeten worden aangepast. Daartoe drukken wij eerst de concentratie van de deeltjes in het niveau  $i$  uit in de totale concentratie van deeltjes van element  $E$ :

$$N_i = \frac{N_{k,i}}{\sum_i N_{k,i}} \cdot \frac{i \sum_k N_{k,i}}{N_E} \cdot N_E$$

Boltzmann: met Saha (k = ionisatietrap)

$$(\cdot) g_i 10^{-\chi_i \frac{5040}{T_1}}$$

(Vergel. blz. III,16 en 19,  $\chi_i$  is de excitatie-energie van niveau  $i$  in eV). Hergroepering en logaritmeneming geeft:

$$\log X = \log C + \log (g_i f_{ij} \lambda_0) - \chi_i \frac{5040}{T_1} \quad \text{(III,84b)}$$

Vergelijking van bovenstaande formules leert:  $C$  is evenredig met  $d_{max}$ , met  $Z$ , met  $\sum_i N_{k,i} / N_E$  en met  $N_E$ :  $C$  hangt dus af van de

de toestand en de dikte van de lijnvormende laag en is bovendien evenredig met  $N_E$ . De tweede term hangt alleen van de lijnconstanten  $g_i$ ,  $f_{ij}$  en  $\lambda_o$  af, de derde term uitsluitend van de excitatiepotentiaal van het onderste energieniveau en de temperatuur van de laag.

Bij de constructie van een empirische groeikromme zet men eerst voor lijnen één element in één ionisatietrap  $\log (W_\lambda/\lambda)$  uit tegen  $\log X - \log C = \log (gf\lambda) - \chi_i \frac{5040}{T}$  en men past  $T$  zódanig aan dat de punten zo min mogelijk spreiden om een gemiddelde vloeiende kromme (een praktische methode: zie uitweiding aan eind van deze paragraaf). De eis dat  $\log (W_\lambda/\lambda) = \log C$  voor zeer zwakke lijnen levert  $C$ , en daarmee de concentratie  $N_E$ .

Opmerking:

Wanneer wij groeikrommen uit sterspektra willen afleiden, moeten wij het hierboven gebruikte model van de "omkerende" lijnvormende laag verfijnen. Dan moet rekening worden gehouden met:

1. De lagen waarin de lijnen en de laag waarin het continue spektrum gevormd worden overlappen elkaar. Het gevolg is dat de rol die  $\ell_\lambda$  in bovenstaande afleiding speelt overgenomen wordt door de verhouding

$$\eta_\lambda = \ell_\lambda / k_c \quad \text{en de rol, van } N_E \text{ door } A_E = N_E / N_H .$$

(mededelingen)

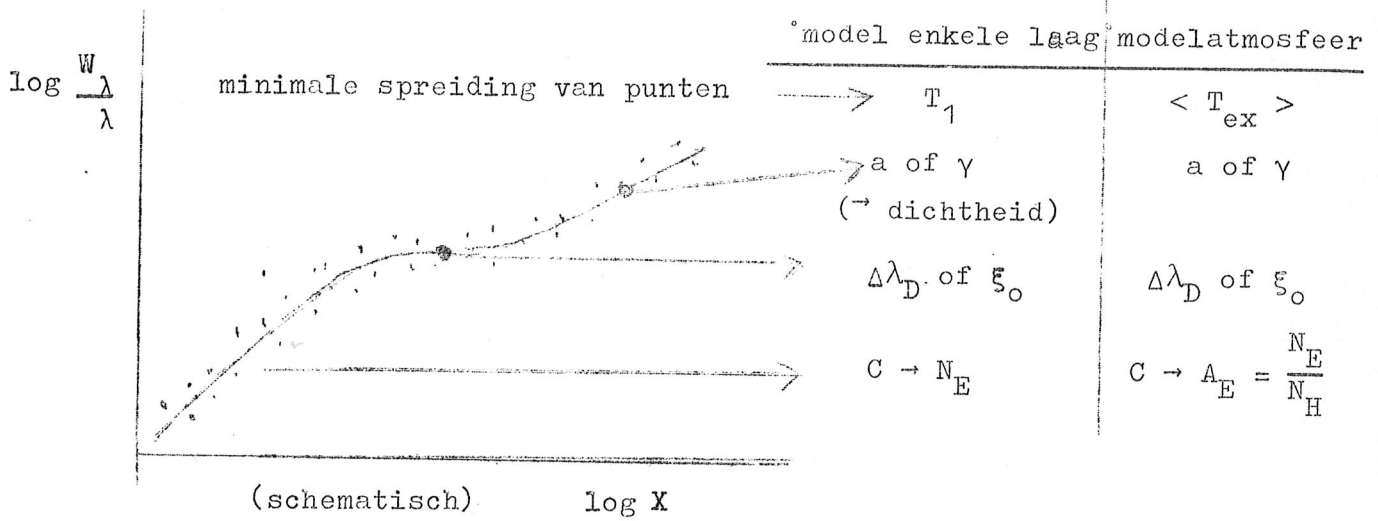
2. In plaats van twee waarden voor de bronfunctie  $B_\lambda (T_o)$  en  $B_\lambda (T_1)$  hebben wij in een atmosfeer met een geleidelijk met de diepte toenemende bronfunctie te maken. Gevolg:  $d_{\max}$ , volgens (III,78) het relatieve verschil van de bronfunctie in de lijnvormende laag met de bronfunctie in de continuüm-vormende laag, moet worden vervangen door de relatieve toeneming van de bronfunctie met de diepte.

Wanneer de lijnen van één element in niet al te verschillende diepten van de atmosfeer worden gevormd heeft het zin een gemiddelde excitatie-temperatuur  $T_{ex}$  in te voeren, zodat de uitdrukking voor de abscis van de groeikromme wordt

$$\log X = \log C + \log (g_i f_{ij} \lambda_o) - \chi_i \cdot \frac{5040}{T_{ex}} \quad (\text{III,84c})$$

Hierin is  $C$  rechtevenredig met  $A_E = N_E / N_A$ .  $C / A_E$  moet uit het model worden berekend (hangt vooral af van gemiddelde waarden  $\langle T \rangle$  en  $\langle P \rangle$  en van de temperatuursgradiënt;  $C$  varieert maar heel langzaam met  $\lambda_o$ ).

Overzicht:



Resultaten te verkrijgen uit groeikromme-analyse:

Vergelijking van de hoogte van de schouder van de empirische groeikromme met die van een theoretische groeikromme levert de middelbare snelheid van de atomen in de gezichtslijn  $\xi_0$ . Wanneer men gelijk stelt  $T_{kin} = T_{ex}$  dan blijkt  $\xi_0$  vrijwel steeds duidelijk groter te zijn dan men op grond van zuiver thermische snelheden zou verwachten. Dit gaf aanleiding tot het invoeren van microturbulentie, zie eind § III.2.3.3. Men vindt  $\xi_{mt} \approx 1 \text{ km s}^{-1}$  bij de zon, bij sommige sterren zelfs vele  $\text{km s}^{-1}$ .

Uit de ligging van de dempingstak volgt via de vergelijking met een theoretische groeikromme een waarde voor  $a = \gamma / (4\pi \Delta v_D)$ , en met  $\Delta v_D = v_0 \xi_0 / c : \gamma$ . Voor de zon en een aantal sterren vond men dempingsconstanten die in goede overeenstemming met de verwachte drukverbreding (ongeveer 10x stralingsdemping). Uit  $\gamma$  kan de concentratie  $N$  van de storende deeltjes worden afgeleid.

Abundanties

Hoewel men uiteindelijk streeft naar gedetailleerde interpretatie van lijnprofielen (met NLTE effecten enz.) zijn de meeste astrofysische abundanties tot dusverre bepaald uit groeikromme-analyses met een LTE-theorie. Daarbij is gebleken dat de zon en de overgrote meerderheid van de sterren dezelfde chemische samenstelling hebben:

grotendeels H,

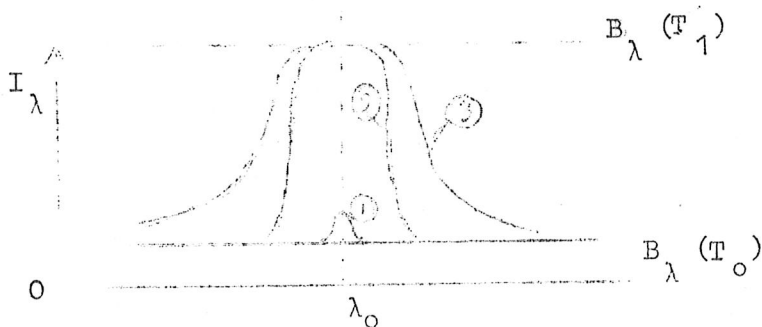
vrij veel He :  $A_{He} = N_{He} / N_{H^4} \approx 0.1$ ,

iets C, N en O :  $A_C \approx 5 \times 10^{-4}$ ,  $A_N \approx 1 \times 10^{-4}$ ,  $A_O \approx 1 \times 10^{-3}$

overige elementen zeer schaars: totaal ongeveer  $1 \times 10^{-4}$  (belangrijkst zijn Si, Mg, Fe, Xe).

Slechts bij enkele typen sterren vindt men opvallende afwijkingen: zo blijken zeer oude sterren (z.g. populatie II sterren) "metaalarm" te zijn: zware elementen zijn 10 tot 100 maal schaarser dan in de zon. Deze gegevens zijn van groot belang voor een beter inzicht in de ontwikkeling van de sterren en van het melkwegstelsel.

Groeikrommen van bronnen met emissielijnen: in laboratoria: vlammen, bogen, schokbuizen; in de astrofysica: emissienevels (hoofdstuk IV), flitsspektrum van chromosfeer (blz. III,28). Theorie en analyse verloopt analoog aan die van absorptielijnen, het enige verschil is dat



$T_1 > T_0$ , waardoor lijnkernen nu verzadigen tegen  $B_\lambda(T_1) > B_\lambda(T_0)$ . Vergelijk nevenstaande figuur met de corresponderende figuur op blz. III, 56.

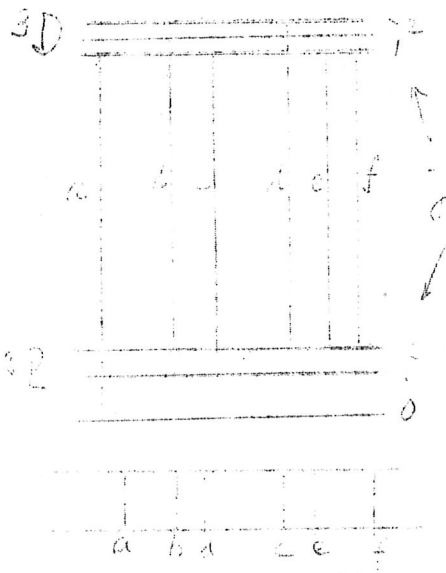
Uitweiding: Een praktische aanpak voor de constructie van empirische groeikrommen (door te lezen en te gebruiken bij practicumproef).

Het effectieve aantal deeltjes verantwoordelijk voor de vorming van de verschillende spektrale lijnen van één element in één ionisatietoestand loopt sterk uiteen: (:)

$N_E g_i f_{ij} \times 10^{-\chi_i \theta_{ex}}$ , met  $\theta_{ex} \equiv 5040 / T_{ex}$ . Wanneer er sprake is van één gemiddelde excitatietemperatuur kunnen wij voor alle beschikbare lijnen van één ionisatietoestand van één element één (al dan niet volledige) groeikromme construeren. Aan de natuurkunde ontleen

wij de grootheden  $\lambda_0, g_i, \chi_i, f_{ij}$

en in het sterspektrum meten wij  $W_\lambda$



De energietermen zijn gesplitst in fijnstruktuurniveau's - de verzameling spektrale lijnen die tussen alle niveau's van twee termen mogelijk zijn, heet een multiplet

(Struktur der Materie § 3G, I).

Spreiding in golflengte van enkele

$\text{\AA}$  (simpele atomen, bijv. Na) tot

meer dan 100  $\text{\AA}$  (complexe atomen,

Fe). De excitatie-energieën  $\chi_i$  van

de niveau's in de laagste term ver-

schillen heel weinig (paar honderd-

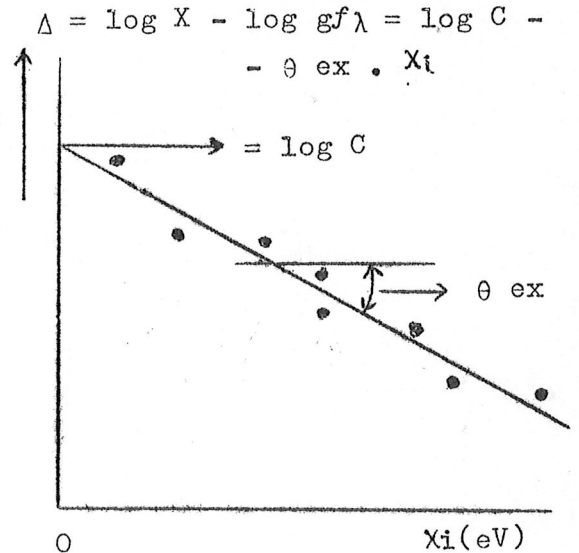
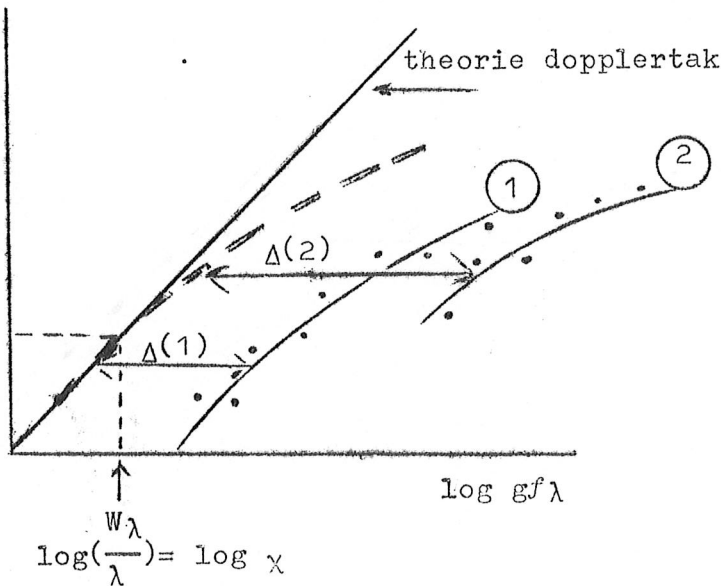
sten van 1 eV) - zij mogen door één

gemiddelde waarde worden benaderd.



De constructie van de empirische groeikromme verloopt nu als volgt. Zet in één figuur  $\log (W_\lambda/\lambda)$  uit tegen  $\log (g f \lambda)$ ; alle lijnen van één multiplet leveren één stukje groeikromme, zie figuur stukjes (1), (2), enz. Spreiding van de punten t.g.v. onnauwkeurigheden in  $W_\lambda$  en in  $f$ .

$\log \frac{W_\lambda}{\lambda}$



Schuif alle stukken van de verschillende multipletten aaneen tot één vloeiende kromme  $\rightarrow$  (gedeelte van) groeikromme. De noodzakelijke verschuiving  $\Delta$  t.o.v. de rechte  $\log (W_\lambda/\lambda) = \log X$  voor zeer zwakke lijnen geeft voor elk multiplet, volgens (III, 84c)

$$\Delta = \log X - \log (g f \lambda) = \log C - \chi_i \theta_{ex} .$$

Zet voor alle multipletten de gevonden verschuivingen  $\Delta$  uit tegen  $\chi_i$ ; pas een rechte aan: helling  $\rightarrow \theta_{ex} = 5040 / T_{ex} \rightarrow$  de excitatietemperatuur. Snijpunt van rechte met  $\chi_i = 0 \rightarrow \log C$ . Uit een model kan men  $\log (C/A_E)$  berekenen; samen geeft dit: relatieve abundantie  $A_E = N_E / N_H$  van het element.

### III.2.3.5. Snelheidsvelden en magnetische velden.

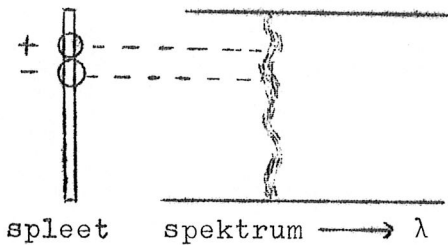
De component van het snelheidsveld in de gezichtslijn wordt zichtbaar door het Doppler effect:

$$\frac{v - v_o}{v_o} = \frac{\lambda_o - \lambda}{\lambda} = \frac{v_r}{c}$$

Voor radiële snelheden van sterren als geheel verwijzen wij naar hoofdstuk V. Hier bekijken wij alleen de snelheidsvelden in de individuele sterren zelf.

Macroturbulentie: Wanneer men het spektrum van de zon opneemt bij een goede kwaliteit van het zonsbeeld, dan ziet men "kronkellijnen".

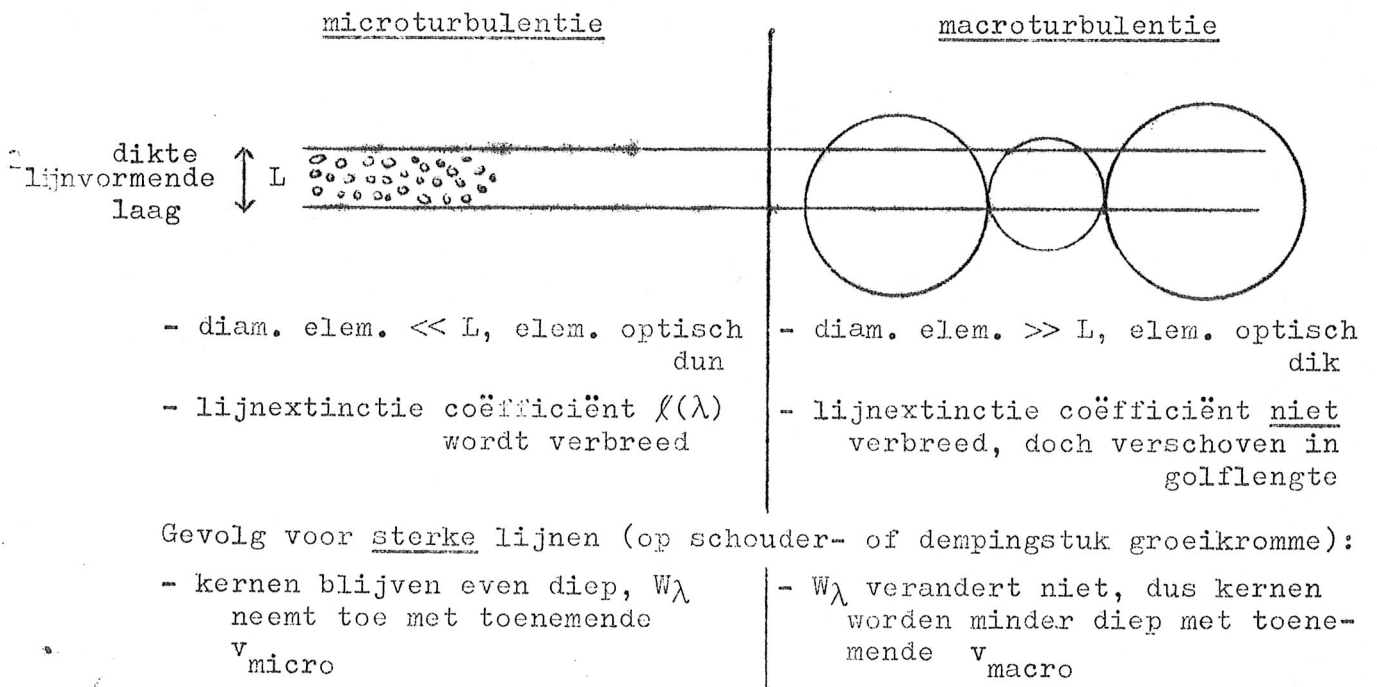
Blijkbaar correspondeert een bocht naar lange golflengten met een gebied op de zon waar de lijn-vormende laag naar beneden beweegt (+).



De snelheden variëren van enkele tienden tot enkele  $\text{km s}^{-1}$ ; de grootte van de gebieden van een half tot een paar duizend km. Het patroon wisselt met de tijd. Gevolg van oscillaties, granulatie en supergranulatie (§ III.2.2.5b).

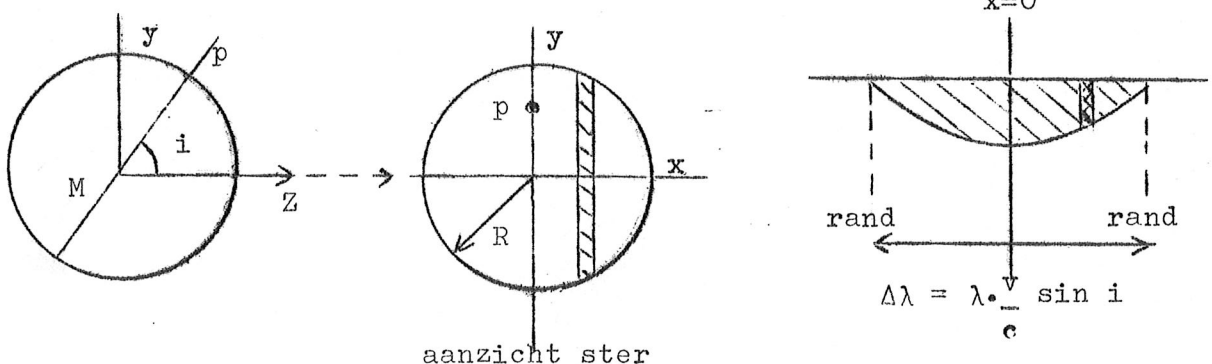
Men spreekt van macroturbulentie indien de elementen in het snelheidsveld aanzienlijk groter zijn dan de dikte van de lijnvormende laag.

Wordt macroturbulentie slechts gedeeltelijk opgelost (zon) of in het geheel niet (sterren), dan ontstaan verbrede spektrale lijnen. Vergelijking tussen micro- en macroturbulentie:



Rotatie van sterren.

Rotatieas PM in vlak yz, z naar waarnemer gericht, hellingshoek i,



snelheid aan equator  $v$ . Men kan aantonen dat strookjes op de ster-schijf // y-as (gearceerd) dezelfde snelheid  $\frac{x}{R} \cdot v \sin i$  t.o.v. de waarnemer hebben.

Wanneer de snelheid  $v \sin i$  de thermische + turbulente snelheden flink overtreft, ontstaan <sup>on</sup> diepe komvormige lijnen, met een totale breedte  $\Delta\lambda = \lambda \cdot (v/c) \cdot \sin i$ . Door vergelijking van waargenomen profielen met profielen berekend voor verschillende waarden van  $v \sin i$  kan men  $v \sin i$  bepalen, met een nauwkeurigheid van ongeveer  $25 \text{ km s}^{-1}$ . Door aan te nemen dat de hellingshoeken  $i$  toeval-  
lig verdeeld zijn, kan men het materiaal statistisch bewerken. Men vindt dan een opvallend verband tussen  $v$  en het spektrale type:

B :	$v = 200 - 250 \text{ km s}^{-1}$	} langs hoofdreks in HRD .
A :	150 - 200 "	
F :	25 - 100 "	
G, K, M :	< 25 "	

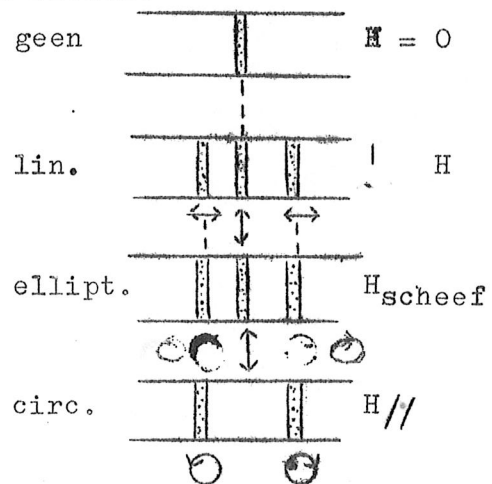
Interpretatie: dat jonge sterren gemiddeld snel roteren is te begrijpen: sterren vormen zich uit samentrekkende wolken in een turbulent medium. Het feit dat oudere sterren met een convectiezone langzaam roteren, suggereert de volgende hypothese: deze sterren hebben corona's, de sterrewind sleept magnetische velden mee, die echter ook met de ster verbonden blijven, en door de rotatie van de ster worden meegenomen. Via deze magnetische velden vindt overdracht plaats van impuls-moment van de ster op de materie die de ster omringt. De volgende gegevens stemmen goed met deze hypothese overeen:

Stopt men het impulsmoment van het gehele planetenstelsel in zon, dan zou deze een rotatiesnelheid van 300 in plaats van  $2 \text{ km sec}^{-1}$  hebben! Bovendien: contraherende sterren die vlak bij de hoofdreks zijn gekomen (T Tauristerren, § II.7.6) hebben inderdaad hogere rotatiesnelheden dan de hoofdrekssterren.

Het dopplereffekt is ook van groot belang bij het onderzoek van veranderlijke sterren (§ III.3.2). <sup>polarisatie:</sup>

Lin. lijnen

Magnetische velden kunnen worden gemeten met het Zeeman-effekt: wanneer de lichtbron zich in een magnetisch veld bevindt splitsen de meeste spektrale lijnen in een aantal componenten (zie Structuur der Materie § 3D en 3E en § I.2.3.2). De lijnen die in drie componenten



splitsen zijn het meest geschikt voor meting. Wanneer  $\vec{H} \perp$  gezichtslijn, dan zijn er twee symmetrisch verschoven componenten ( $\sigma$ ) en een convergeschoven component ( $\pi$ ). Wanneer  $\vec{H} //$  gezichtslijn, dan zijn er alleen de twee symmetrisch verschoven componenten.

De verschuivingen zijn evenredig met  $H$ ; de evenredigheidsconstante hangt van de lijn af en die is bekend uit de natuurkunde. De oriëntatie van  $\vec{H}$  t.o.v. de waarnemer kan worden gevonden uit de intensiteitsverhoudingen en de polarisatie van de componenten (korte toelichting op het college).

Toepassingen: zon (§ III.4), magnetische sterren (§ III.3).

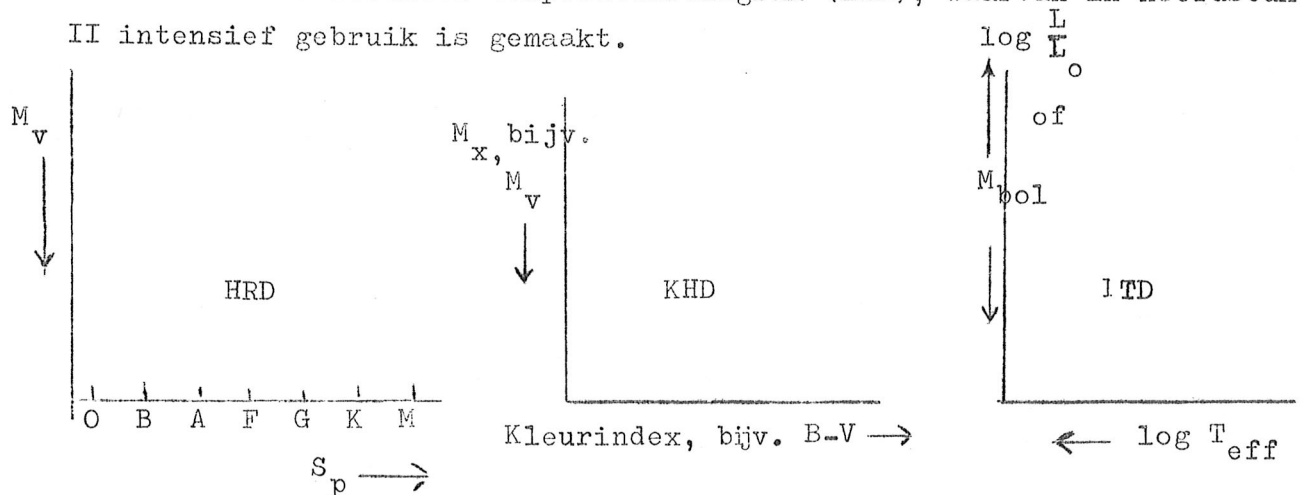
### III.3. Sterren

#### III.3.1. Klassificatie van sterren; het lichtsterkte-temperatuur

diagram

In deze paragraaf vatten wij een aantal inzichten en begrippen uit delen I en II van het college Algemene Sterrekunde samen en ronden die af met in dit hoofdstuk III verworven inzichten.

In § I.2.2.3 is het Hertzsprung-Russell diagram (HRD) en het kleur-helderheidsdiagram (KHD) ingevoerd om sterren twee-dimensionaal te ordenen. Deze diagrammen kunnen in verband worden gebracht met het lichtsterkte-effectieve temperatuurdiagram (LTD), waarvan in hoofdstuk II intensief gebruik is gemaakt.



De lichtsterkte  $L$  is de totale energie door de ster per tijdseenheid uitgestraald (geproduceerd); de effectieve temperatuur  $T_{eff}$  is een maat voor de energieflex door het steroppervlak per oppervlakte-eenheid. De straal  $R$  van de ster levert het verband tussen  $L$  en  $T_{eff}$  volgens

$$L = 4 \pi R^2 \cdot \underbrace{\sigma T_{eff}^4}_{\pi F(0)} \tag{III,85}$$

Uit Hoofdstuk II weten wij dat  $L$ ,  $R$  en  $T_{eff}$  volledig zijn bepaald wan-

neer van de ster bekend zijn: de massa en de chemische samenstelling als functie van de afstand tot het middelpunt van de ster.

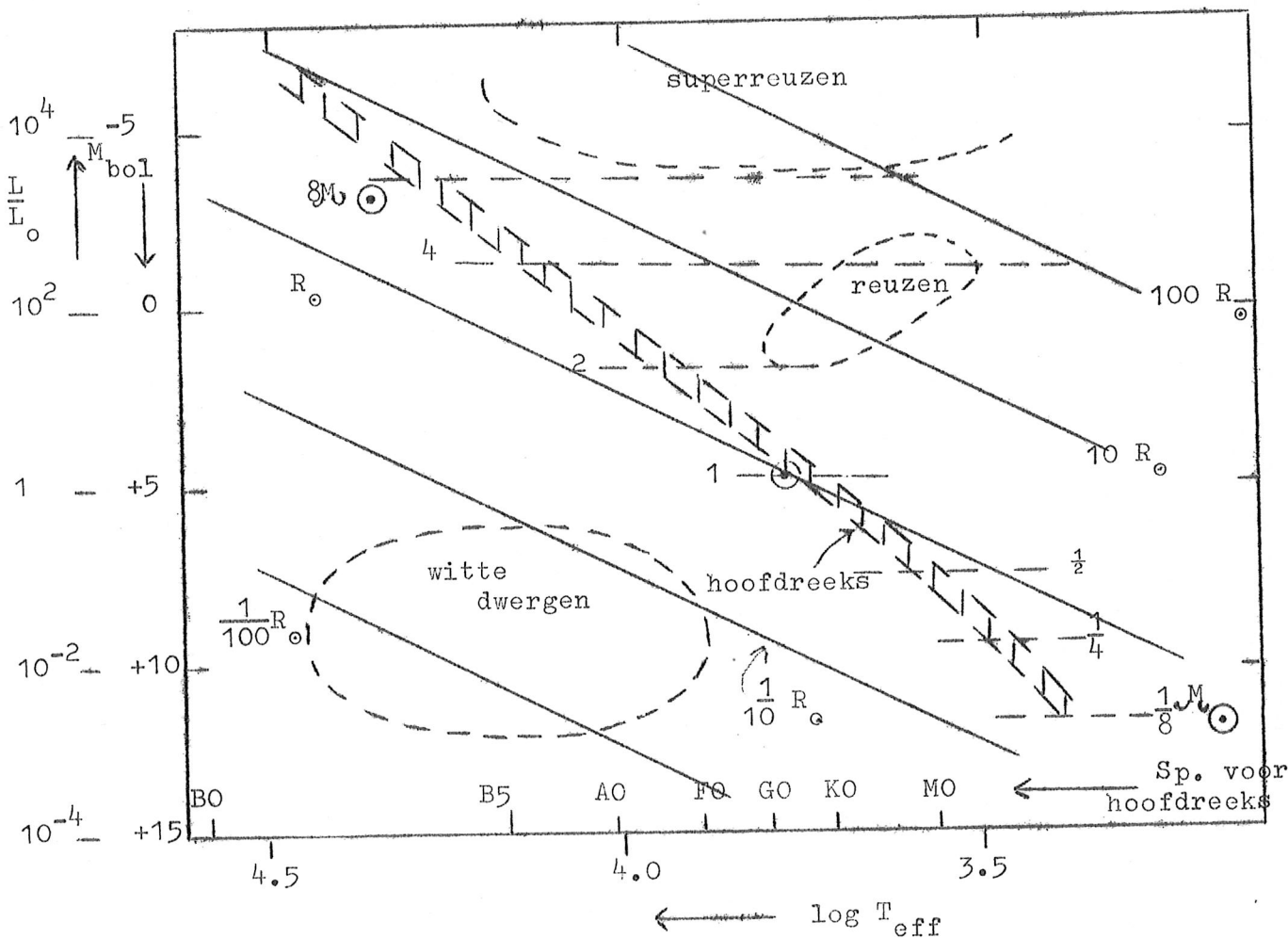
Uit (III,85) volgt

$$\log \frac{L}{L_{\odot}} = \underbrace{-4 \log T_{\text{eff}}^{\odot} + 4 \log T_{\text{eff}}}_{-15.05} + 2 \log \frac{R}{R_{\odot}} \quad (\text{III,86})$$

of, met de absolute bolometrische magnitude  $M_{\text{bol}} = 4.72 - 2.5 \log \frac{L}{L_{\odot}}$  (vergel. III,91) :

$$M_{\text{bol}} = \underbrace{M_{\text{bol}}^{\odot}}_{+4.72} + 10 \log T_{\text{eff}}^{\odot} \underbrace{- 5 \log \frac{R}{R_{\odot}}}_{+37.62} - 10 \log T_{\text{eff}} \quad (\text{III,86b})$$

In het LTD ontstaat een schaar evenwijdige rechten met  $R/R_{\odot}$  als parameter - zie dunne getrokken lijnen in onderstaande figuur. Transformatie van lijnen van gelijke  $R/R_{\odot}$  naar HRD of KHD levert een schaar wat verbogen krommen op. Het is belangrijk de theoretische waarden voor  $R/R_{\odot}$  te vergelijken met empirisch bepaalde diameters (interferometrisch, uit bedekkingsveranderlijken (hoofdstuk V) of uit sterbedekkingen door maan).



Massa's. Uit waarnemingen van een aantal dubbelsterren kan men de massa van de componenten bepalen (§ V.1.2.4); uit de resultaten komt een massa-lichtsterkte relatie te voorschijn (§ II.3.1) :  $\mathcal{M}(M_{\text{bol}})$ , die voor de hoofdreeks en voor reuzen geldt, doch bijv. niet voor witte dwergen. In de figuur op de vorige bladzijde zijn lijnen van gelijke massa, uitgedrukt in  $M_{\odot}$ , als dunne streeplijnen aangegeven. Met de theorie van sterrevolutie kunnen wij deze min of meer horizontale lijnstukjes begrijpen voor  $\mathcal{M} > \mathcal{M}_{\odot}$ : het zijn stukken van evolutiesporen (§ II.8.2). Ook is het duidelijk dat de witte dwergen sterk afwijken van het  $\mathcal{M}(M_{\text{bol}})$  verband van de hoofdreeks.

Gravitatieversnelling  $g = GM/R^2$ : ten gevolge van kleine variatie van  $\mathcal{M}$  met  $L/L_{\odot}$  lopen de lijnen van gelijke  $g$  vrijwel evenwijdig met lijnen van gelijke  $R$  in het LTD (slechts iets steiler, ga na!). Globaal:  $g$  neemt in LTD toe van rechter bovenhoek naar linker benedenhoek van LTD (kwalitatief omvat dit ook de witte dwergen, ga na!).

Samengevat: Beschrijving van ster volgens  $\{T_{\text{eff}}, L\}$  kan worden omgezet in  $\{T_{\text{eff}}, g\}$  en omgekeerd.

Alle waargenomen karakteristieken van een ster, vervat in het verloop van de uitredende flux met de golflengte,  $F_{\lambda}(0)$ , met inbegrip van de profielen van spektrale lijnen, kunnen in principe uit een modelatmosfeer worden berekend. Wij zagen in § III.2.2.4 (III.2.2.5) dat een modelatmosfeer volledig is bepaald door

- 1)  $T_{\text{eff}}$ ,
- 2) versnelling zwaartekracht  $g = GM/R^2$ ,
- 3) abundantie van He en eventueel de abundanties van die "metalen", die merkbaar bijdragen tot de produktie van vrije elektronen.

Voor de berekening van lijnprofielen is bovendien de abundantie van het betreffende element nodig. In § III.2.3.4 vermeldden wij al dat de chemische samenstellingen van de atmosferen van verreweg de meeste sterren binnen de nauwkeurigheid van de analyse aan elkaar gelijk zijn. Wij nemen voorlopig aan: chemische samenstelling van alle steratmosferen gelijk.

Wij zagen in § III.2.2.4c dat:

1.  $T(\tau_m)$  hangt sterk van  $T_{\text{eff}}$ , doch vrijwel niet van  $g$  af.
2.  $P_g(\tau_m)$  en  $P_e(\tau_m)$  hangen sterk van  $g$  doch in veel mindere mate van  $T_{\text{eff}}$  af,  $P_g(\tau_m \approx 2/3)$  ruwweg evenredig met  $g$ . Dus: criterium voor  $g \leftrightarrow$  criterium voor  $P_g$  of  $P_e$ .

De continue extinctiecoëfficiënt  $k_{\lambda}$  en de lijnextinctiecoëfficiënten hangen sterk af van  $T$  (via Boltzmann en Saha) en in veel mindere mate van de druk (via zwakkere  $P_e$  afhankelijkheid, alleen in Saha).

Gevolgen: 1) het globale verloop van  $F_\lambda(0)$ , zowel in het continuum als in het lijnenspectrum, hangt sterk van  $T_{\text{eff}}$  en weinig van  $g$  af ( $F_\lambda(0) \sim$  "een door  $(k_\lambda + \ell_\lambda)$  gemodificeerde Planckkromme").

2) Voor druk- of  $g$  criteria moeten wij letten op geschikte details in het spectrum.

Tegen deze achtergrond geven wij nu een overzicht van  $T$ - en van  $g$ -criteria.

III.3.1.1. Temperatuurcriteria.

a. Direkte bepaling van  $T_{\text{eff}}$  lukt alléén voor zón en zeer beperkt aantal sterren. Uit betrouwbare metingen moet kunnen worden afgeleid:

1. de totale flux  $\pi F = \pi F \cdot R^2/r^2 = L/(4\pi r^2)$  (formule III.9 en 85) ofwel de schijnbare  $m_{\text{bol}}$  (vergel. III,87c), gemeten buiten, of goed gecorrigeerd voor extinctie door, aardse dampkring;
2. de afstand  $r$  (trigonometrische parallax).
3. de straal  $R$  (interferometrisch, uit bedekkingsveranderlijken). (Haal formules III,85, 86 en 87c bij elkaar).

Voor alle overige sterren kan men  $T_{\text{eff}}$  alléén vaststellen door óf in kwantitatief onderzoek een deel van het spectrum  $F_\lambda(0)$  te vergelijken met  $F_\lambda(0)$  berekend uit theoretische modellen, óf door het meten of schatten van bepaalde criteria die dan uiteindelijk toch weer met fundamenteel bepaalde of theoretische  $T_{\text{eff}}$  geijkt moeten worden.

b.  $T_{\text{eff}}$  uit kleurindices

Verband tussen een schijnbare magnitude  $m_x$  en  $F_\lambda$ ,  $R$  (straal) en  $r$  (afstand) van de ster:

$$m_x = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{afpraak}}}{\text{const}_1} - 2.5 \log \int_{\substack{\text{"co"} \\ \text{"O"}}} \frac{\pi R^2}{r^2} \cdot F_\lambda \cdot G_{x,\lambda} \cdot d\lambda \quad (\text{III,87a})$$

buiten aardatmosfeer ontvangen monochromatische flux  $\pi F_\lambda$ , vergelijk (III,9)

door detector op aarde geregistreeerde flux.

c of:

$$m_x = \text{const}_2 - 5 \log R + 5 \log r - 2.5 \log \int F_\lambda \cdot G_{x,\lambda} \cdot d\lambda \quad (\text{III,87b})$$

$G_{x,\lambda}$  is de gevoeligheidskromme voor de combinatie  $x$  van detector (fotografische plaat of fotocel), filters en aardse dampkring.

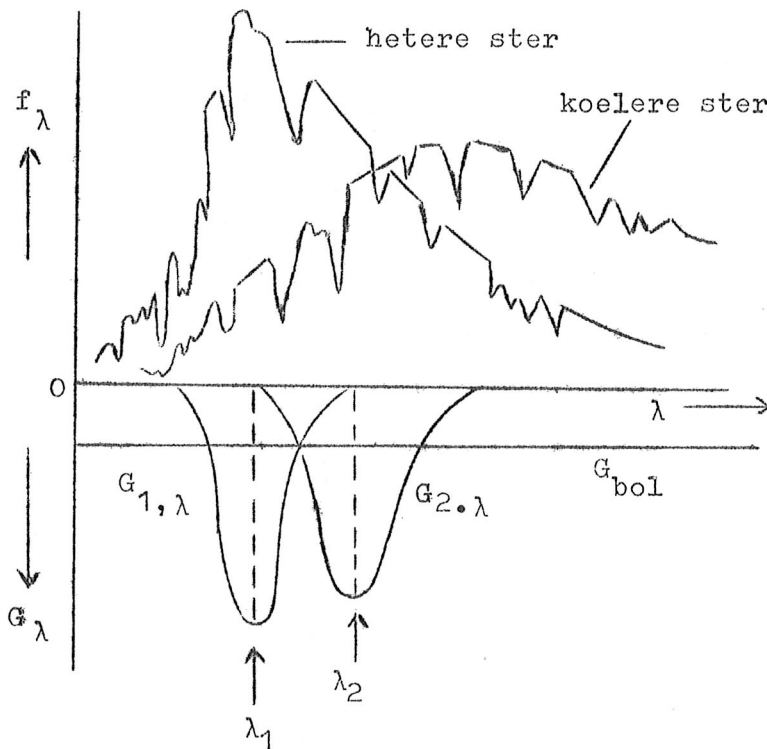
Definitie kleurindex  $\Delta m_{\lambda_1, \lambda_2}$  :

$$\Delta m_{\lambda_1, \lambda_2} \equiv m_{\lambda_1} - m_{\lambda_2} , \tag{III,88a}$$

met piekgolflengten  $\lambda_1 < \lambda_2$  (tekenafspraak).

Uit (III,87b) volgt:

$$\Delta m_{\lambda_1, \lambda_2} = \text{const.} 5 - 2.5 \log \frac{\int F_{\lambda} G_{1, \lambda} d\lambda}{\int F_{\lambda} G_{2, \lambda} d\lambda} \tag{III,88b}$$



Uit de kleurindex zijn R en r weggevallen: temperatuurcriterium dat heel weinig van g afhangt. Goede oefening: beredeneer dat uit tekenafspraak in (III,88a) volgt dat alle kleurindices  $\Delta m_{\lambda_1, \lambda_2}$  toenemen met afnemende  $T_{\text{eff}}$ .

Voorbeelden: veel gebruikte fotometrische systemen.

1. veel gebruikt fotografisch systeem:

fotografische magnitude  $m_{\text{fot}}$  :  $\lambda_{\text{max}} = 4300 \text{ \AA}$  (blauwviolet gevoelige platen)

foto-visuele magnitude  $m_{\text{vis}}$  :  $\lambda_{\text{max}} = 5400 \text{ \AA}$  (op platen ook gevoelig in geel, + kleurfilter)

→ kleurindex  $CI = m_{\text{fot}} - m_{\text{vis}}$  (CI van colour index)

2. veel gebruikt foto-elektrisch systeem:  $\begin{cases} U & \lambda_{\text{max}} = 3500 \text{ \AA} \text{ (UV)} \\ B & \lambda_{\text{max}} = 4350 \text{ \AA} \text{ (blue)} \\ V & \lambda_{\text{max}} = 5550 \text{ \AA} \text{ (visual!)} \end{cases}$

→ kleurindices B-V en U-B (U-V wordt vrijwel niet gebruikt)

Opmerking:  $m_{\text{vis}}$  en V zijn vrijwel aan elkaar gelijk. De constanten in (III,88) worden vastgelegd door een aantal standaardsterren, waarvoor men zo goed mogelijk samenhangende visuele magnituden heeft afgesproken. De overige magnitudeschalen worden daarmee verbonden door de (willekeurige) eis dat alle magnituden aan elkaar gelijk zijn zijn voor A0-sterren. Dus:  $\Delta m_{\lambda_1, \lambda_2} = 0$  voor A<sub>0</sub> sterren.



De bolometrische magnitude  $m_{bol}$  wordt gedefinieerd voor een detector met een gelijke gevoeligheid voor alle golflengten, buiten de dampkring van de aarde, dus met  $G_{bol,\lambda} = \text{constant}$ . Uit III,85 en 87b volgt

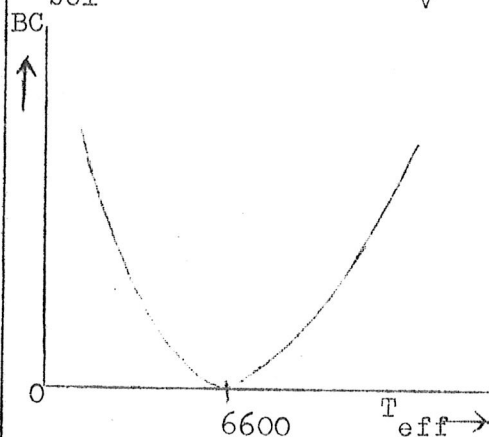
$$\begin{aligned} m_{bol} &= (\text{const.})_3 + 5 \log r - 2.5 \log L = \\ &= (\text{const.})_4 + 5 \log r - 5 \log R - 10 \log T_{eff} \quad (\text{III,87c}) \end{aligned}$$

Voor sterren waarbij het belangrijkste deel van de fluxkromme  $F_\lambda$  in het optische venster van de aardatmosfeer valt (zichtbaar, nabij IR) kan men  $m_{bol}$  redelijk betrouwbaar bepalen uit fluxmetingen op aarde door correctie voor de extinctie in de aardatmosfeer (voor  $4000 \lesssim T_{eff} \lesssim 6000$  K : sterren als zon of wat koeler).

De bolometrische correctie BC is een wat bijzondere "kleur"index:

$$BC \equiv m_{vis} - m_{bol} \quad (\text{III,89})$$

De tegenafpraak bij (III,88) faalt hier, zodat sommigen de BC tegengesteld definiëren. Ga na, dat  $BC(T_{eff})$  een minimum zal vertonen. Men definieert nu de constante in de  $m_{bol}$  schaal door te eisen:  $BC \geq 0$ . (Daar komt uit:  $BC = 0$  voor  $T_{eff} \approx 6600$  K, een F5 ster). De bolometrische correctie verbindt de ordinaat van het LTD diagram  $M_{bol}$  met de ordinaat  $M_v$  voor het HRD.



Herinnering: onder een absolute magnitude  $M_x$  verstaan wij de magnitude die de ster kan hebben op een afstand van 10 parsec (dus met parallax  $p = 0.1$ ).

(III,86b)  $\rightarrow$

$$\begin{aligned} M_x - m_x &= 5 - 5 \log r \text{ (in parsec)} = \\ &= 5 + 5 \log p \text{ (in boogsec.)} \end{aligned} \quad (\text{III,90})$$

Uit de definitie en schaalconstante van  $m_{bol}$  volgt:

$$M_{bol} = 4,72 - 2.5 \log (L/L_\odot) \quad (\text{III,91})$$

met  $L_\odot = 3.9 \times 10^{33} \text{ erg} \cdot \text{s}^{-1}$ . Daarmee is de relatie tussen de voor LTD gebruikte ordinaten vastgelegd.

Lastige complicatie bij (veelkleuren) fotometrie: extinctie en roodverkleuring door interstellair stof.

Uitweiding: dit treedt vooral op bij ver verwijderde sterren die dicht bij het melkwegvlak staan; meer hierover in hoofdstuk IV.

Men definieert kleurexcessen als volgt:

kleurexces = gemeten kleurindex - echte kleurindex, bijv.:

$$E_{B-V} = (B-V)_{\text{gemeten}} - (B-V)_{\text{intrinsiek}} \quad (\text{III,92})$$

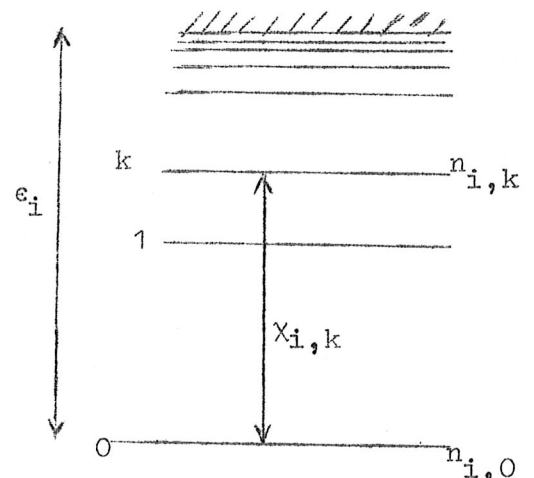
De intrinsieke kleurindex kan men alleen schatten uit een extra criterium, bijv. de spektrale klasse. Reden om een meer-dan-twee kleuren fotometrie op te zetten: aangezien men de relaties tussen de verschillende kleurindices voor niet-verkleurde sterren kent, vallen verkleurde (dus ook verzwakte) sterren direkt op. Door eenzelfde golflengte-afhankelijkheid in de verzwakking aan te nemen, kan men trachten de gemeten helderheden en kleurindices te corrigeren.

### c. $T_{\text{eff}}$ uit spektrale klassificatie

De van fotografische spektra geschatte spektrale klassen vormen in de eerste plaats een temperatuurreeks: door de reeks O, B, A, F, G, K, M (eventueel met decimale onderverdeling) neemt  $T_{\text{eff}}$  monotoon af. Wij lichten dit met enkele voorbeelden toe: wij bekijken de atoom- en ionspektra van een element E, totale deeltjesdichtheid

$N_E$ , deeltjesdichtheid ionen trap i in  $k^{\text{de}}$  aangeslagen toestand  $n_{i,k}$ , totale dichtheid ionen in trap i:

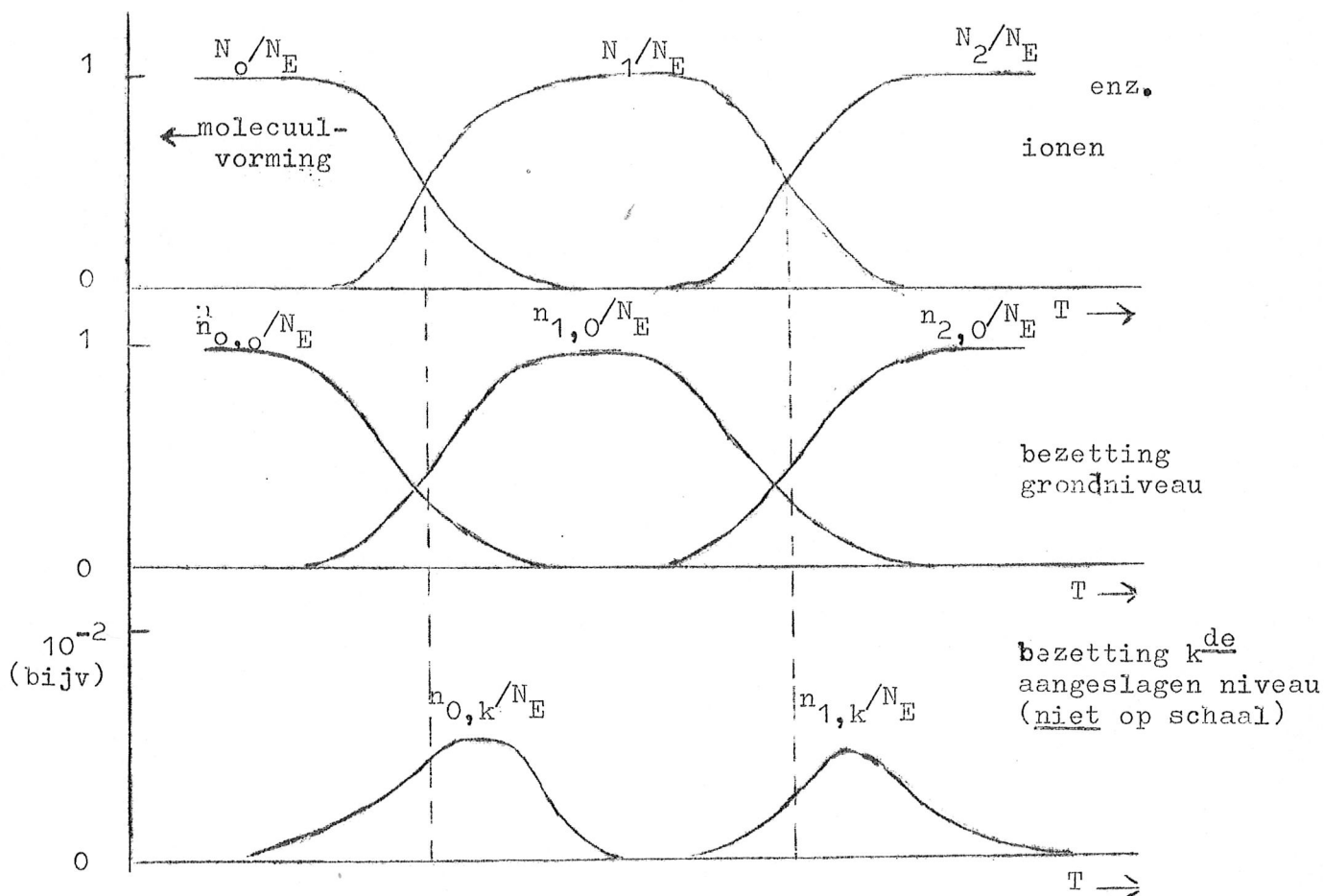
$N_i = \sum_k n_{i,k}$ . In de hierna volgende figuur stelt de eerstvolgende strook de met Saha (III,26) berekende relatieve concentraties van de ionen  $N_i/N_E$  voor. Merk op dat bij een combinatie  $(T, P_e)$  hoogstens twee opeenvolgende ionisatietrappen gelijktijdig optreden



De ligging van  $N_i/N_E$  als  $f(T)$  wordt bepaald door de ionisatiepotentialen  $\epsilon_{i-1}$  en  $\epsilon_i$  (bij  $N_0/N_E$ : alleen door  $\epsilon_0$ ), en ook door  $P_e$ . Het aantal ionen in de grondtoestand  $n_{i,0}$  is vrijwel gelijk aan het totale aantal ionen, totdat de volgende ionisatie inzet, want dan neemt de bezetting van de aangeslagen niveaus toe. De top van de bezetting van een aangeslagen niveau  $n_{i,k}/N_E$  ligt bij een temperatuur waarbij het element zich al voor een belangrijk deel in de volgende ionisatietoestand  $(i+1)$  bevindt. De vorm van  $n_{i,k}/N_E$  hangt, via de wet van Boltzmann vooral af van de excitatiepotentiaal  $X_{i,k}$ .

Voorbeelden: Ca ( $\epsilon_0 = 6.11$  eV,  $\epsilon_1 = 11.87$  eV):

Ca II, H en K lijnen (3934 en 3968 Å) (uit het grondniveau van  $\text{Ca}^+$ ): worden zichtbaar bij  $A_0$ , nemen toe in sterkte door typen F en G, nemen weer af van  $K \rightarrow M$ . Verklaring: vóór  $A_0$  is Ca tweevoudig geïoniseerd. Bij M is Ca neutraal.

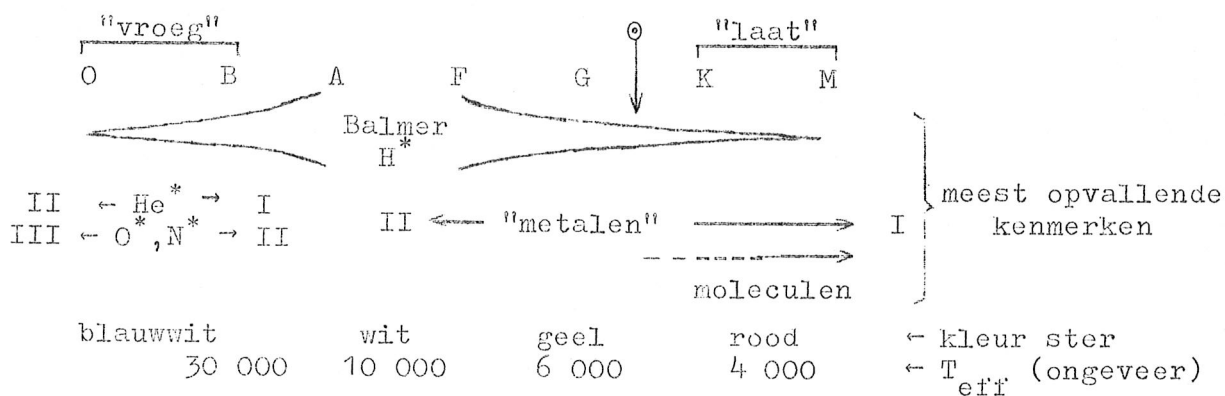


Ca I 4226 Å (uit grondniveau neutraal Ca): verschijnt zwak bij spectrale type F, neemt zeer sterk toe door K → M .

Balmerlijnen H ( $X_{0,1} = 10.15 \text{ eV}$  ,  $\epsilon_0 = 13,60 \text{ eV}$ ) : max. bij A3, nemen af door B → O omdat H zeer sterk geïoniseerd wordt, nemen af door F → G → K → M omdat de bezetting van het aangeslagen niveau sterk afneemt.

Wanneer een element geheel neutraal is neemt bij afnemende temperatuur de molecuulvorming met abundante elementen (H, O vooral) toe.

Schematisch overzicht: (\* betekent: lijnen tussen aangeslagen niveaux)



Opgaven:

17. Waarom zijn Ca II , H en K lijnen in B-sterren verdwenen, terwijl de Balmerlijnen van H nog steeds goed zichtbaar zijn? (twee redenen!)
18. Waarom is He I 4471 Å ( $\chi_{o,k} = 20.87 \text{ eV}$   $\epsilon_o = 24.58$ ) in A sterren verdwenen, terwijl de Balmerlijnen daar juist zeer sterk zijn?
19. Een lijn treedt op in G sterren, neemt voortdurend in sterkte toe tot K5 en neemt daarna weer af. Wat voor een soort lijn zou dat kunnen zijn?

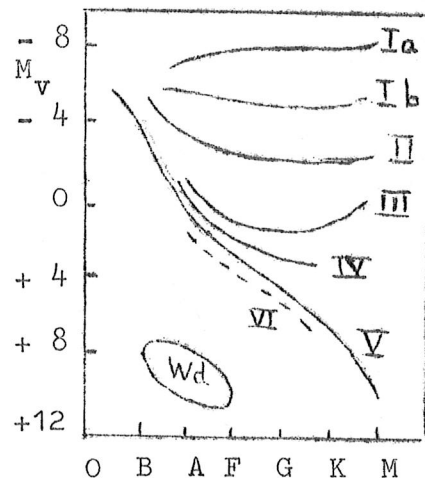
III.3.1.2. Druk-, of g-, of lichtsterkteklassificatie (LC = luminosity class)

- a. Uit de breedte (of: sterkte) van Balmerlijnen -  $H\gamma$  , zie § III.2.3.3. Doorgaans schatting op oog van fotografische spektra, maar objectieve meting van equivalente breedte  $W_\lambda$  is mogelijk. Goed criterium voor B, A, F sterren (waarom niet voor andere?) .
- b. Voor de overige spektrale typen gebruikt men de sterkteverhouding van twee lijnen van verschillende ionisatietrappen, liefst van hetzelfde, anders van soortgelijke elementen; meestal schatting op oog. Daarbij gebruikt men dat in de Wet van Saha de elektronendruk  $P_e$  optreedt.

Voor verschillende spektrale typen zijn verschillende drukcriteria nodig, omdat deze criteria ook sterk van  $T$  afhangen. Spektrale classificatie dient dus aan lichtsterkteklassificatie vooraf te gaan.

Aan de hand van een aantal criteria (standaardsterren) onderscheidt men:

LC	(luminosity class):
Ia	Extreme superreuzen
Ib	Superreuzen
II	Heldere reuzen
III	Reuzen
IV	Subreuzen
V	Dwergen-hoofdrekssterren
VI	Subdwergen
Wd	Witte dwergen



De ijking  $LC \rightarrow M_v$  dient te geschieden aan de hand van sterren met bekende afstanden: laat veel te wensen over, vooral voor de superreuzen (waarom?) .

Belangrijke mogelijkheid om "spektroskopische paralaxen" te bepalen:

$$\left. \begin{array}{l} \text{spektrum} \rightarrow LC \rightarrow M_v \\ \text{fotometrie} \rightarrow m_v \end{array} \right\} \rightarrow p \text{ met (III.105); vergelijk ook I.2.2.2.}$$

Toepasbaar op groot aantal sterren van zeer uiteenlopend type. De nauwkeurigheid wordt begrensd door de ijking van de LC criteria. Bovendien kan interstellair extinctie systematisch fouten geven.

### III.3.1.3. T- en g-klassificatie, abundanties

Opgave 20: Weeg vóór- en nadelen van spektrale klassificatie en meting van kleurindices tegen elkaar af.

De betrekkingen tussen Sp en de kleurindices, bijv. het verband Sp  $\leftrightarrow$  B-V kan men natuurlijk geheel empirisch vaststellen, met LC als parameter. (Mooie figuur: Unsöld: Der neue Kosmos p. 125). In de onderstaande tabel is het verloop van Sp, B-V, U-B als functie van  $T_{\text{eff}}$  weergegeven voor hoofdreekssterren (V) en voor reuzen (III).

$T_{\text{eff}} =$		5500	5000	4500	4000	3500
Sp	V	G4	G8	K2	K6	M0
	III	F9	G3	G7	K1	K5
B-V	V	0.68	0.80	0.95	1.11	1.30
	III	0.63	0.76	0.92	1.11	1.40
U-B	V	0.17	0.36	0.57	1.06	1.23
	III	0.27	0.44	0.61	1.00	(1.6)

Het spektrale type hangt dus niet alleen van  $T_{\text{eff}}$  doch ook nog van LC (dus g) af, want de lijnsterkten hangen ook van  $P_e$  af, Sp en LC zijn dus niet onafhankelijk. Anderzijds hangen de kleurindices B-V en U-B heel weinig van LC af, omdat het continue spectrum vrijwel niet van  $P_e$  afhangt.

Opgave 21: Uit bovenstaande tabel blijkt dat een reus wat "vroeger" in de spektrale reeks wordt geplaatst dan een dwerg met dezelfde  $T_{\text{eff}}$ . Maak dit kwalitatief aannemelijk (daarbij te bedenken dat bij G en K sterren de spektrale klassificatie voornamelijk geschiedt door vergelijking van atoom- en ionlijnen van "metalen").

Tot dusverre hebben wij aangenomen dat de sterren vrijwel dezelfde chemische samenstelling hebben. Er zijn echter sterren met duidelijk afwijkende abundanties en daarvoor pakt de klassificatie (Sp, LC) wat anders uit.

Voorbeeld: Subdwergeren (VI). Blijkbaar zeer oude sterren met veel minder "metalen" dan zon. Complicaties: een subdwerger kan op grond van metaallijnen voor een A5 ster worden aangezien en op grond van Balmerlijnen voor een F0 ster. Doordat de metaallijnen veel zwakker zijn, zijn de continue spectra veel minder gestoord dan bij normale dwergen; vooral naar de kleine golflengten is het verschil opvallend. Gevolg: uit de kleurindices B-V en U-B lijken subdwergeren blauw-violetter dan normale dwergen, doch dit hoeft niet te betekenen dat subdwergeren heter zijn dan hoofdreekssterren met dezelfde

$M_{bol}$  .

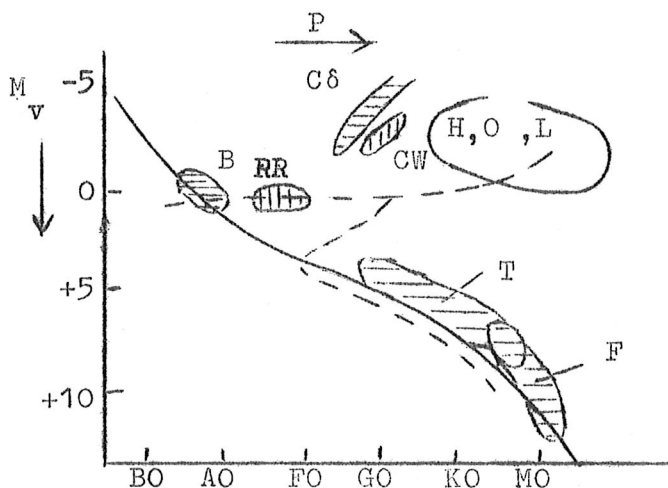
### III.3.2. Intrinsiek veranderlijke sterren

De meeste sterren zijn stabiel. Een minderheid toont duidelijk waarneembare veranderingen, in de helderheid, of het spectrum, of beide. Het meest opvallend zijn sterren waarvan de helderheid verandert ("veranderlijke sterren").

Deze sterren zijn gecatalogiseerd volgens het volgende schema: wanneer de ster geen klassieke aanduiding heeft ( $\delta$  Cephei, Algol) plaatst men vóór de naam van het sterrebeeld, (in volgorde van ontdekking):

R, S, T, ..... Z; RR, RS, ..... RZ; SS, ST, ..... SZ, ....., ..... ZZ (totaal 334 mogelijkheden per sterrebeeld. Daarna V 335, V 336, ... Voorbeelden: T Tauri, RR Lyrae, RW Aurigae.)

De bedekkingsveranderlijken worden in hoofdstuk V genoemd; wij bekijken hier enkele typen intrinsiek veranderlijke sterren. Overzicht:



— as hoofdreks, reuzentak populatie I

--- populatie II (bijv. bolhopen).

#### Pulserende sterren:

C $\delta$  Cepheïden I ( $\delta$  Cephei) - populatie I

CW Cepheïden II (W Vir) - populatie II

RR Clusterveranderlijken (RR Lyrae) - populatie II

H, O, L halfregelmatige, onregelmatige en langperiodelijke veranderlijken.

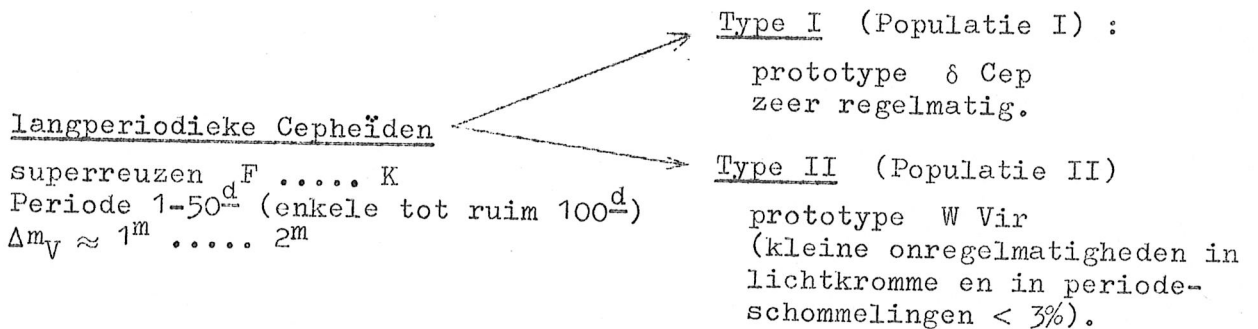
Contraherende sterren: T = T Tauri sterren.  
 ("actieve sterren") F = vlam- en flitssterren.

Magnetische sterren: B

Eruptieve veranderlijken, niet in bovenstaand HRD opgenomen.

III.3.2.1. Pulserende sterren

Wij bespreken hier alleen de meest regelmatige typen:



- Met dezelfde periode wisselt: 1) de helderheid;  $\rightarrow L$  .  
 2) het spectrale type (kleurindex);  
 $\rightarrow T_{eff}$  .  
 3) de radiële snelheid  $v_{rad}$  (uit  
 dopplereffekt)  $\rightarrow R$  .

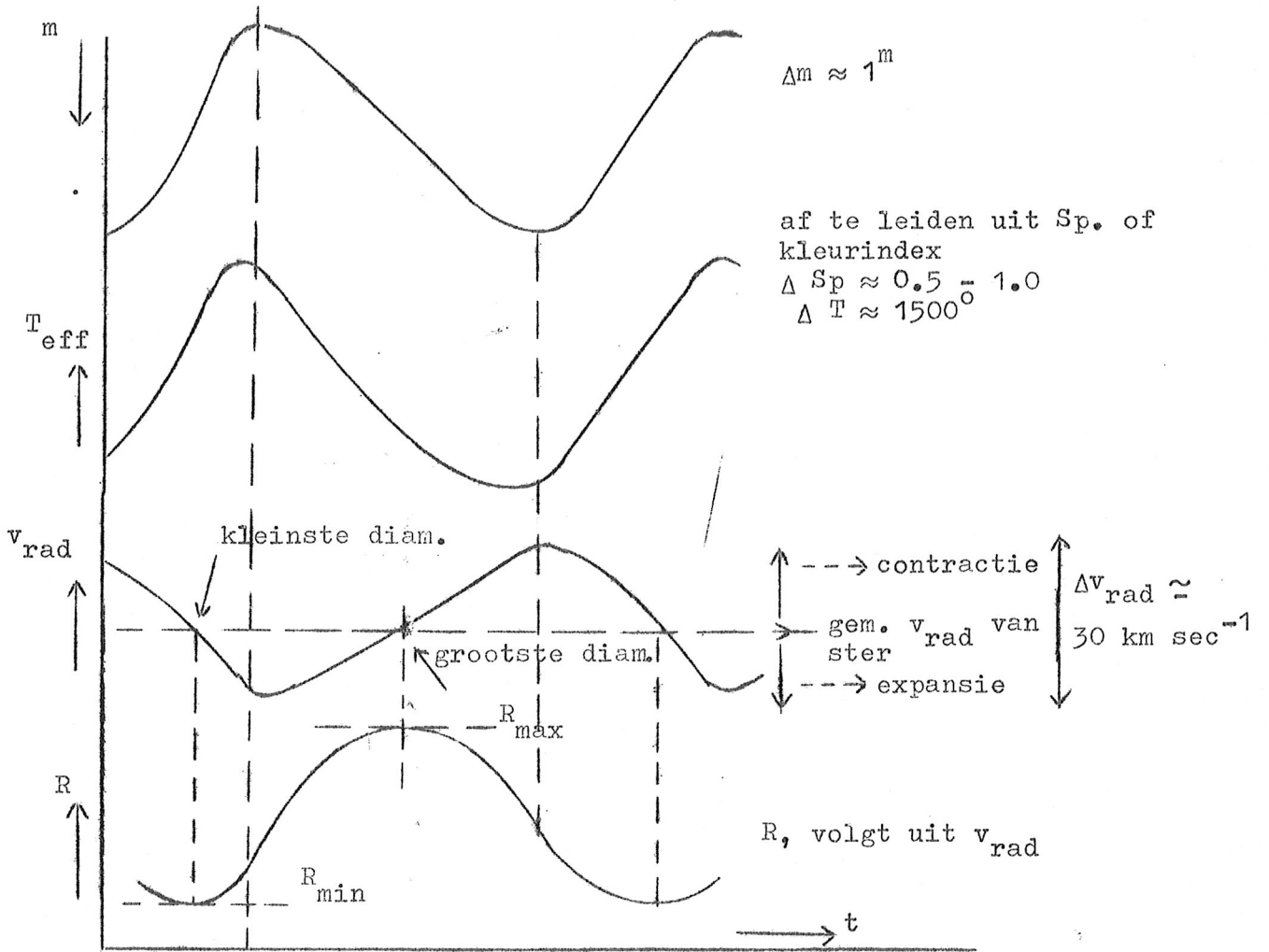
Periode-relaties:

- hoe langer P: des te later Sp (lagere  $T_{eff}$ )  
 : des te groter L, (R, massa) (periode-lichtsterkte rela-  
 tie).  
 : des te kleiner gemiddelde dichtheid  $\bar{\rho}$  (periode-dichtheid  
 relatie).

Onderscheiding Type I - II: vorm lichtkromme, verband  $\Delta m-P$  , al dan  
 niet optreden van emissielijnen (soms vrij lastig!) .

Kortperiodieke Cepheïden = RR Lyrae sterren = clusterveranderlijken.  
 Snel pulserende A-reuzen ( $B8 \dots F2$ ),  $P < 1^d$  . Uitsluitend (?) po-  
 pulatie II (halo + kern melkwegstelsel, hiaat in horizontale tak HRD  
 van bolhopen).  $\Delta m_V \approx 1^m$  .

Interpretatie van de waarnemingen  $m(t)$ ,  $T_{eff}(t)$ ,  $v_{rad}(t)$  :  
 Cepheïden zijn sterren die radiëel pulseren. De maximale/minimale  
 helderheid valt vrijwel samen met hoogste/laagste temperatuur (iets  
 erna) en met de grootste expansie/contractie snelheid - zie volgende  
 figuur. Blijkbaar is de temperatuurvariatie belangrijker voor de hel-  
 derheidsvariatie dan de variatie van de middellijn.



Uit de kromme  $v_{rad}(t)$  kan men  $R(t_2) - R(t_1)$  afleiden voor elk paar tijdstippen  $t_2$  en  $t_1$ , en wel in het bijzonder  $R_{max} - R_{min}$ . Bedenk dat de expansiesnelheid  $v_{exp}(t)$  groter is dan  $\overline{v_{rad}} - v_{rad}(t)$ , omdat wij van de omgeving van de sterrand slechts een component van  $v_{exp}$  waarnemen, dus  $v_{exp}(t) = k [\overline{v_{rad}} - v_{rad}(t)]$ , waarbij men vindt  $k \approx 1.4$ , rekening houdend met een plausibele randverzwakking.

Nu is:

$$1) \quad \frac{R_{max} - R_{min}}{\dots} = \int_{t_{R_{min}}}^{t_{R_{max}}} v_{exp}(t) dt, \text{ en}$$

$$R(t) - R_{min} = \int_{t_{R_{min}}}^t v_{exp}(t) dt. \quad (\rightarrow R(t) \text{ verloop in bovenstaande figuur.})$$

2) Je kunt ook  $\frac{R_{max}/R_{min}}{m_{bol}(R_{max}) - m_{bol}(R_{min})}$  afleiden, aangezien uit  $L(R_{max})/L(R_{min})$ , en

$$\frac{L(R_{max})}{L(R_{min})} = \frac{R_{max}^2}{R_{min}^2} \cdot \frac{T_{eff}^4(R_{max})}{T_{eff}^4(R_{min})} \rightarrow R_{max}/R_{min}, \text{ omdat ook}$$



omdat ook  $T_{\text{eff}}(t)$  uit Sp. of kleurindex bekend is.

Vervolgens:  $(R_{\text{max}} - R_{\text{min}})$  en  $R_{\text{max}} / R_{\text{min}} \rightarrow R_{\text{max}}, R_{\text{min}}, R(t), \bar{R}$ .

Voor Cepheïden I vindt men  $(R_{\text{max}} - R_{\text{min}}) / \bar{R} \approx 0.1$  en

$\bar{R} = 8 \dots 150 R_{\odot}$ , afhankelijk van Sp. Voor Cepheïden II vindt men  $\Delta R / \bar{R} \lesssim 0.5$ .

Merk op dat men uit  $R(t)$  en  $T_{\text{eff}}(t)$  onmiddellijk  $M_{\text{bol}}(t)$  berekent; samen met  $m_{\text{bol}}(t)$  geeft dit, via (III,104), de parallax  $p$ . Behalve in een afgeleide vorm (periode-lichtsterkte relatie, discussie hieronder) heeft men van deze principiëel machtige methode nog maar weinig gebruik gemaakt, omdat voor gele superreuzen geen goede model-atmosferen zijn berekend, die nodig zijn om de betrekkingen tussen BC, kleurindex en  $T_{\text{eff}}$  voldoende nauwkeurig vast te leggen.

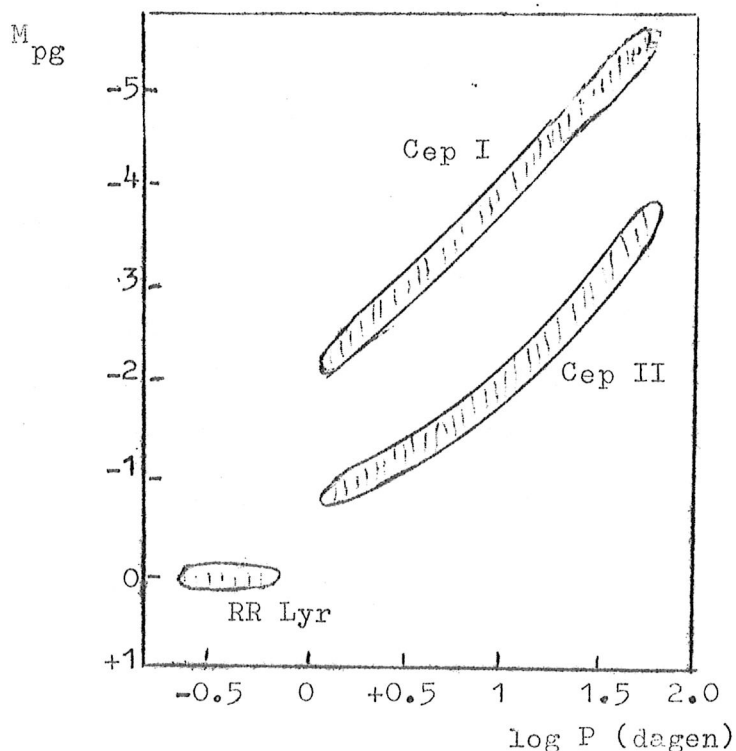
Over de oorzaak van de pulsaties:

De pulsaties kunnen niet ontstaan door een variabele energieproductie in het inwendige. Blijkbaar moduleert de "mantel" de doorgelaten energiestroom. Dit vereist dat de absorptiecoëfficiënt  $\kappa$  relatief groot is bij maximale compressie (maximale  $\rho$ ): de laag neemt dan energie op die nodig is voor de expansie; bij het expanderen neemt  $\kappa$  af; de flux ont-snapt en de ster contraheert weer, enz. Dit kappa-mechanisme kan werken in het geïoniseerde gas van een convectiezone, waar compressie recombina-tie veroorzaakt, waardoor  $\kappa$  oploopt. Berekeningen hebben aangetoond dat regelmatige, niet-uitdempende pulsaties alleen kunnen ontstaan wan-

neer de convectiezone en voldoende dik is en niet te diep ligt. Daarmee wordt begrijpelijk dat Cepheïden in een smalle (doch eindig brede) strook in het HRD liggen en tevens het bestaan van periode-lichtsterkte en periode-dichtheid relaties.

Massieve sterren gaan tenminste tweemaal door de instabiliteitsstrook (vaker indien lussen optreden in evolutiesporen).

De periode-lichtsterkte relatie - zie figuur hiernaast-



Van groot belang voor het bepalen van afstanden binnen het melkwegstelsel (bepaling middelpunt!) en tot naburige extragalactische stelsels. Verder reikende afstandsmetingen zijn direct of indirect op de Cepheïden geijkt.

(Historische opmerking: tot 1952 meende men dat Cepheïden I in M-P verband samenvielen met Cepheïden II. Sindsdien zijn alle afstanden tot extragalactische stelsels 2x zo groot geworden).

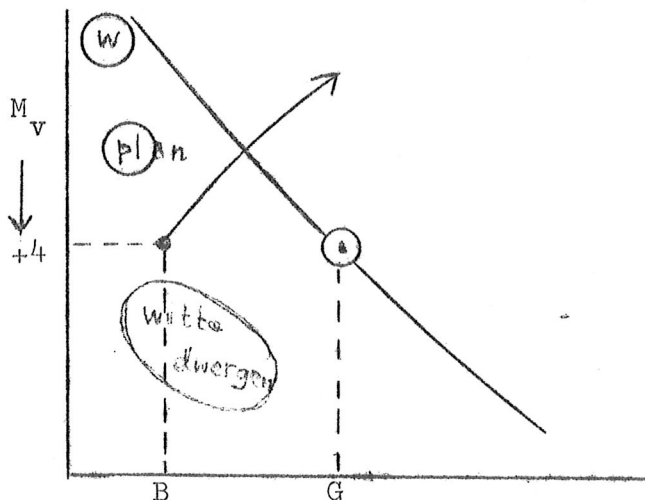
Andere typen pulserende sterren: Er zijn aan de "linkerzijde" van het HRD, boven de hoofdreeks, nog pulserende sterren met zeer kleine periodes (enkele uren), (zeer) kleine amplituden en doorgaans met twee of meer periodes [dwergcepheïden of  $\delta$  Scuti-sterren;  $\beta$  Canis Majoris-sterren].

Rechts van de Cepheïdenstrook liggen in het HRD groepen reuzen en superreuzen die in helderheid, in spectraal type en in radiële snelheid variëren, hetgeen weer als radiële pulsatie wordt uitgelegd. Al deze groepen gedragen zich minder regelmatig dan de Cepheïden: meer periodes en soms sterke onregelmatigheden. De hoofdperiode loopt in het HRD van links naar rechts op (als bij de Cepheïden!). Verschillende typen, waarvan de meest opvallende: langperiodieke veranderlijken (of Mira-sterren, naar Mira = O Ceti), rode (super)-reuzen vaak met emissielijnen (Me) of andere afwijkingen (S,C), zeer grote amplituden  $2.5^m \dots 6^m$ ;  $P = 80^d \dots 1000^d$ , betrekkelijk regelmatig.

III.3.2.2. Eruptieve sterren

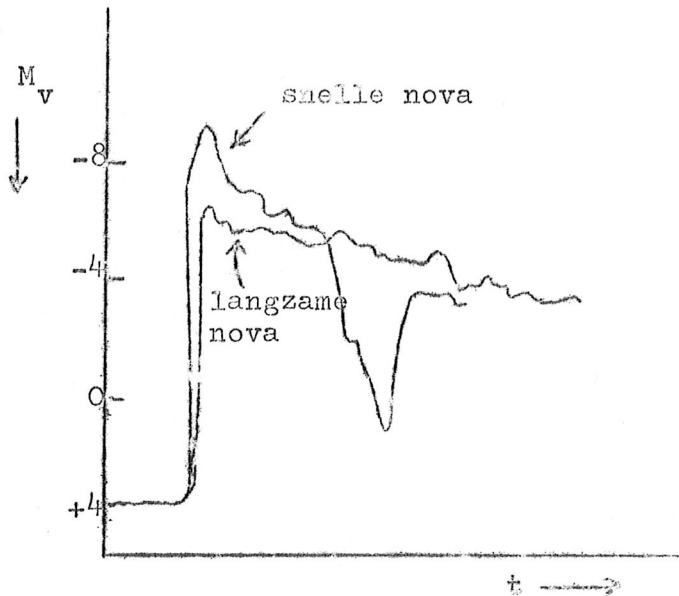
Novae, recurrente novae, } grotendeels besproken in § II.10 .  
 Supernovae → pulsars

Wij bespreken hier alleen de spektrale verschijnselen bij een nova-uitbarsting en wij wijzen op de Wolf Rayet-sterren die een soort "langdurige novae" blijken te zijn.



PN : prae-novae  
 W : Wolf Rayet sterren  
 plan: kernen planetaire nevels  
 Vóór de uitbarsting: B-achtig sterretje, ver onder de hoofdreeks. Tijdens de uitbarsting verandert het spektrum gedurende de fase tot het maximum volgens de aangegeven pijl: ster vlamt op tot een A superreus, waarbij de absorp-

tielijnen sterk naar het violet verschoven zijn. Blijkbaar stoot de ster een schil gas uit die ook in de continue straling ondoorzichtig is. De enorme toename in lichtsterkte is het gevolg van de enorme opzwellling van het "fotosferische oppervlak"  $\tau_c \approx \frac{2}{3}$ , die het effect van de door expansie verlaagde temperatuur (type B  $\rightarrow$  A) sterk overtreft. Enige tijd na het maximum ziet men nog steeds sterk naar het violet verschoven absorptielijnen, doch



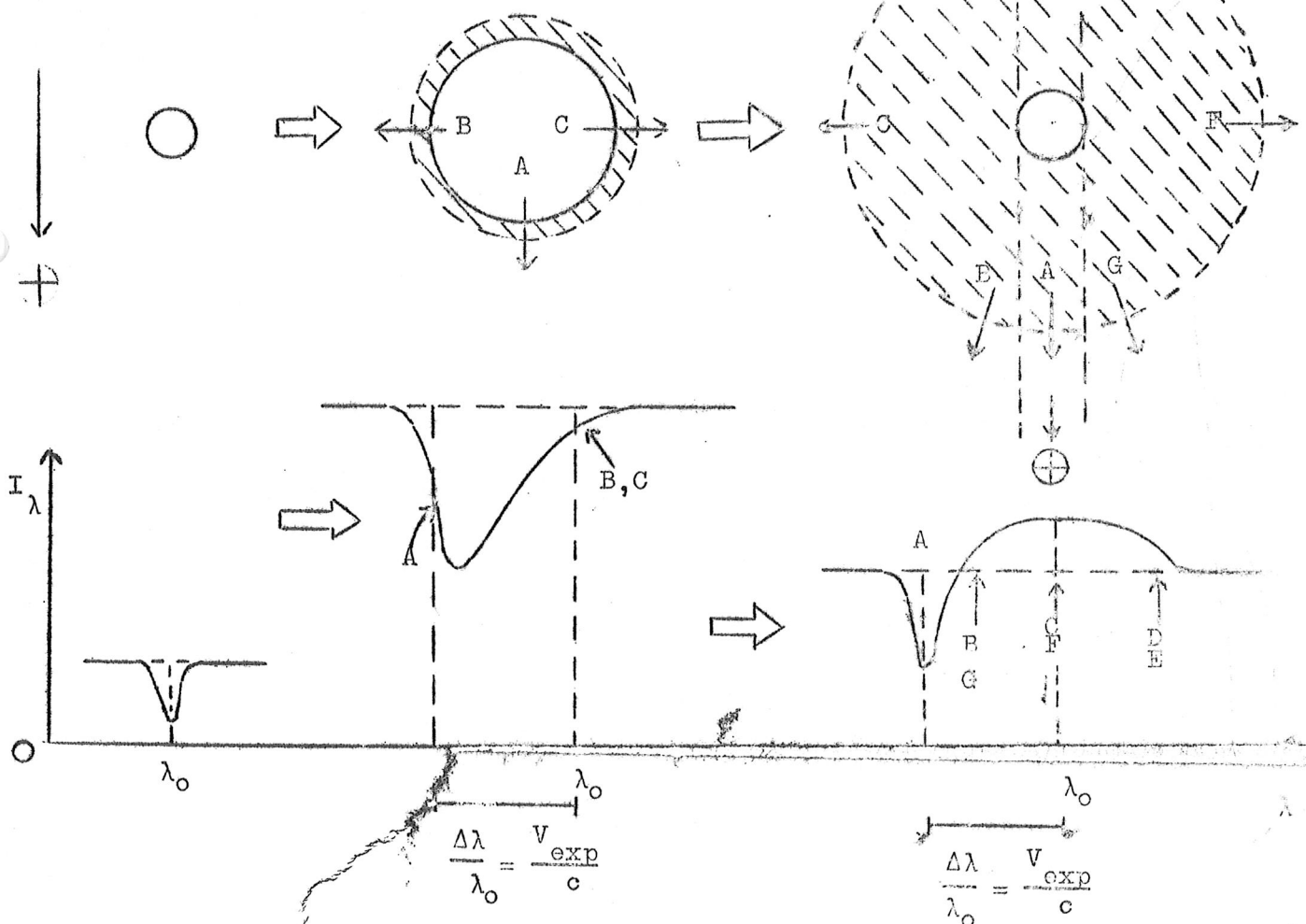
Verloop van het spectron tijdens nova uitbarsting verklaard met model met uitgestoten gasschil

○ : fotosferisch opp. ( $\tau_c = 2/3$ )  
 - - - : rand schil

vóór uitbarsting

vóór maximum

na het maximum



daarnaast sterk verbrede, niet verplaatste emissielijnen. De verklaring is dat de expanderende gasschil zo ijl is geworden dat deze schil optisch zeer dun is geworden in het continuum, zodat het fotosferische oppervlak weer inkrimpt en de helderheid in het continuum weer afneemt. De schil is in de spectrale lijnen optisch veel minder dun dan in het continuum, zodat emissielijnen ontstaan; de figuur verklaart dat deze lijnen zeer breed doch niet verplaatst zijn.

Er worden expansiesnelheden tussen 1000 en 2000 km sec<sup>-1</sup> gemeten, hetgeen vele malen groter is dan de ontsnappingssnelheid: de materie keert dus niet naar de ster terug.

Bij niet te ver verwijderde novae neemt men geruime tijd na de uitbarsting inderdaad een voortdurend uitbreidend neveltje waar. Daaruit kan men de afstand tot de nova schatten en daaruit weer de absolute magnituden tijdens minimum en maximum.

Voorbeeld: Nova Aql. 1918. Na zes maanden zag men het neveltje, dat in diameter aangroeide met 2" per jaar. Uit het spectrum:

$$v_{\text{rad}} = 1700 \text{ km sec}^{-1} \rightarrow \text{afstand } 360 \text{ pc} \quad (\text{kunt U nagaan}).$$

Uit het spectrum blijkt dat de uitgeworpen materie slechts een kleine fractie van de ster uitmaakt ( $\lesssim 10^{-5} M_{\odot}$ ). Het spectaculaire novaverschijnsel blijkt dus een "oppervlakkige" gebeurtenis te zijn, die de ster na afloop vrijwel ongewijzigd achterlaat; dit in tegenstelling met supernova-uitbarstingen.

Er zijn enkele typen sterren die min of meer "permanent" spectra tonen die doen denken aan novae ná het maximum: zeer brede emissielijnen met (althans bij sommige lijnen) absorptielijnen aan violette kant. Belangrijk type: Wolf-Rayet sterren, apart spectraal type W [weer onderverdeeld]. Temperaturen als O en vroege B sterren, iets onder hoofdreeks? H lijnen verbazingwekkend zwak - evolutie-effect?

Niet alleen bij novae doch ook bij W-sterren: abnormaal hoog percentage geconstateerde dubbelsterren - vermoeden: zijn alle novae en W-sterren dubbelsterren waarvan één component in een laat ontwikkelingsstadium is gekomen?

Links van de hoofdreeks bevinden zich ook de kernen van planetaire nevels (Hoofdstuk IV) - zeer hete doch relatief lichtzwakke sterren waar materie uitstroomt die de aanschijn geeft van een min of meer symmetrische emissienevel.

Kortom: links-onder het bovenste deel van de hoofdreeks vinden wij objecten die blijkbaar op een late etappe zijn naar het eindstadium witte-dwerg of neutronenster.

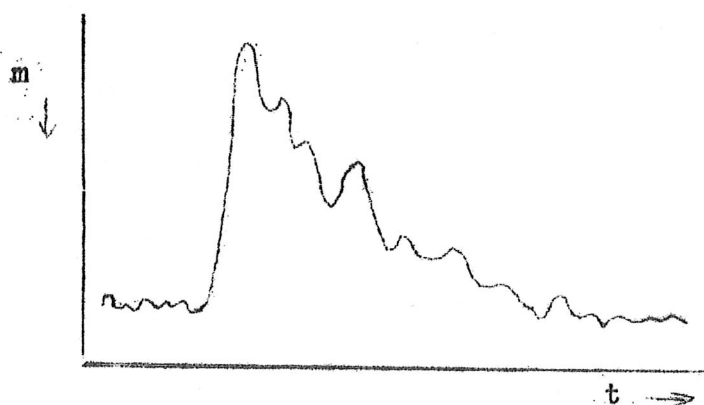
### III.3.2.3. Contraherende sterren, jonge dwergen

T-Tauri sterren: Sp. G ..... M, soms uitgesproken boven de hoofdreeks, in spectrum komen emissielijnen (of emissielijnkernen) voor. Volkomen onregelmatige lichtvariaties, vaak met flinke amplitude ( $\Delta m = 1 \dots 4^m$ ). Deze sterren komen in (donkere of heldere) wolken interstellair materie voor, meestal in associaties (vergel. II,5.2) (met of zonder O en B sterren).

Interpretatie: sterren die zich nog in het contractiestadium vóór de hoofdreeks bevinden. De helderheidswisselingen kunnen het gevolg zijn van instabiliteiten in de ster, van voorbijtrekkende donkere wolken of van beide. Voor de hypothese: contraherende sterren pleit bovendien:

- 1) rotatiesnelheden groter dan op hoofdreeks;
- 2) hoge Li-abundantie (Li wordt in kernen van hoofdreekssterren afgebroken).

Vlam- en flitssterren [UV Ceti - sterren]: hoofdreekssterren (of daarboven) K ..... M, vaak spectrale lijnen met emissiekernen. Lichten in aantal seconden zeer fel op ( $1^m \dots 6^m$ ), "relaxatie", met secundaire golvingen, in 10 - 100 minuten.



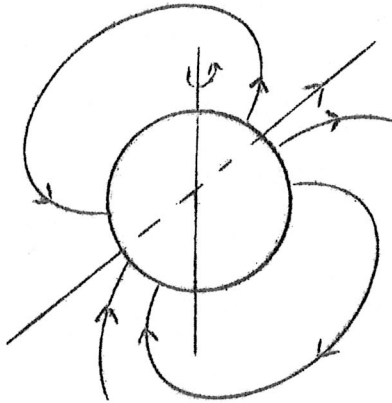
Interpretatie: nog contraherende sterren of zeer jonge hoofdreekssterren. Uitbarstingen: "sterrevlammen" (als zonnevlammen, zie § III.4.3., doch op veel grotere schaal). Bevestiging: radiostraling als bij zonnevlammen.

### III.2.3.4. Magnetische sterren

Veel A sterren op de hoofdreeks tonen Zeemansplitsingen, dus magnetische velden (500 ..... vele duizenden gauss). Bij veel van deze magnetische sterren vindt men abnormaal sterke lijnen van sommige metalen (Si, Cr, Zr, zeldzame aarden). Meestal ook variaties met de tijd:

- 1) Magnetisch veld verandert periodiek, vaak omslag polariteit (extrem voorbeeld: ster 53 Cam: + 3750  $\leftrightarrow$  - 5400 gauss).
- 2) Vaak varieert spectrum: groep onveranderlijke lijnen; groep in sterkte veranderlijke lijnen - meestal zijn dit de abnormaal sterke lijnen, die soms in twee groepen uiteenvalt die in tegenfase zijn (spectrum variabelen).
- 3) Soms waarneembare helderheidswisseling  $\Delta m < 0.1^m$  (gevolg van variabele lijnsterkten?). Alle variaties met dezelfde periode;  $P = 1^d \dots 15^d$ .

Men denkt tegenwoordig vooral aan het model van een scheve rotator:  
 as magnetisch veld valt niet samen met rotatieas (het magnetische



veld hoeft helemaal geen dipoolveld te zijn). De variaties in het spectrum verbindt men dan met "gebieden van abnormale lijnvorming" die door het magnetische veld in de fotosfeer van de ster worden vastgehouden (bijv. bij de polen). Is hier sprake van sterk afwijkende abundanties?

### III.4. De Zon

Lit.: C. Zwaan en M. Kuperus: Sterrenkunde deel II (ed. De Jager):  
 hoofdstuk 2, De Zon.

#### III.4.1. Uiterlijk

G2 V ster .  $T_{\text{eff}} = 5780 \text{ K}$  ;  $R = 700\,000 \text{ km}$  ,  $\bar{\rho} = 1.4 \text{ g cm}^{-3}$

In wit licht:

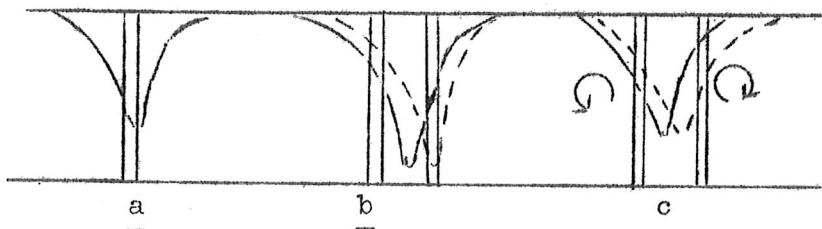
Schijf met randverzwakking (§ III.2.2.9) → fotosfeer. Rand bij  $\tau_t = 1 \rightarrow \tau = 0.01$  .

Opvallende structuren: zonnevlekken, fakkels (heldere vlekken, in wit licht alleen nabij rand goed zichtbaar, altijd om vlekken, doch treden ook zelfstandig op).

Differentiële rotatie: periode aan equator 24.7 dagen, op  $75^\circ$  breedte ruim  $33^d$  ; gevonden uit structuren en dopplereffekt.

Voor uiterlijk van zon in röntgen- en radiostraling, spectra van chromosfeer en corona: zie III.2.2.2.

Monochromatische opnamen: met behulp van bijzondere filters (Lyot-filters = monochromatische polariserende filters) of met behulp van een zgn. spectroheliograaf kan men monochromatische beelden (eventueel



met bandbreedte van een fractie van  $1 \text{ \AA}$ ) maken.

Opnamen in kernen van sterke lijnen

(a) (vooral in H en K lijnen van Ca II):

de fakkels die in wit licht alleen nabij de rand goed zichtbaar zijn, worden nu goed zichtbaar over gehele schijf. Bovendien chromosferisch netwerk: kleine heldere vlakjes in een net-achtige structuur gerang-

schikt (§ III.4.2.1.) . Zeer gedetailleerde chromosferische structuren op schijf zichtbaar, bijv. in  $H\alpha$  .

Opnamen in lijnflank (b): vaststelling snelheidsvelden (met twee spleten symmetrisch om positie niet verplaatste lijn kan men snelheden van intensiteitsfluctuaties scheiden).

Opnamen in lijnflank in twee tegengestelde polarisatierichtingen (c): meting magnetische veld. (Twee spleten)

Opnamen kunnen ook foto-electrisch gemaakt en met computer verwerkt worden. (c) → magnetograaf .

III.4.2. Convectie in de zon en daarmee samenhangende verschijnselen ≡ III.2.2.5. b en c.

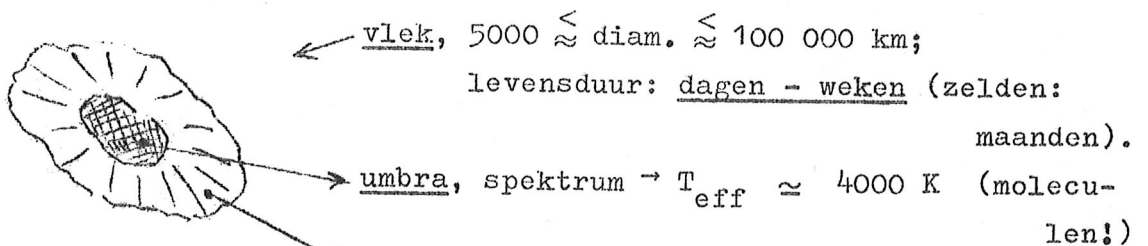
III.4.3. Magnetische velden en zonne-activiteit

III.4.3.1. Actief gebied: vlekken, fakkels, protuberansen

Actief gebied: = aantal verschijnselen over een beperkt deel van het zonne-oppervlak , gekenmerkt door sterke magnetische velden.

Zonnevlekken :

● porie, diam. 1000 -  $\leq$  5000 km, levensduur: uren, dagen.



→ penumbra: ( $T_{\text{eff}} \approx 5300 \text{ K}$  .)

Magnetisch veld: in umbra vrijwel verticaal 2500 - 3200 gauss; in penumbra bijna horizontaal.

Fakkels: Helder, vooral nabij rand, } gebiedjes die in hoge fotosfeer -  
In kernen van lijnen } lage chromosfeer paar honderd graden heter zijn dan omgeving.

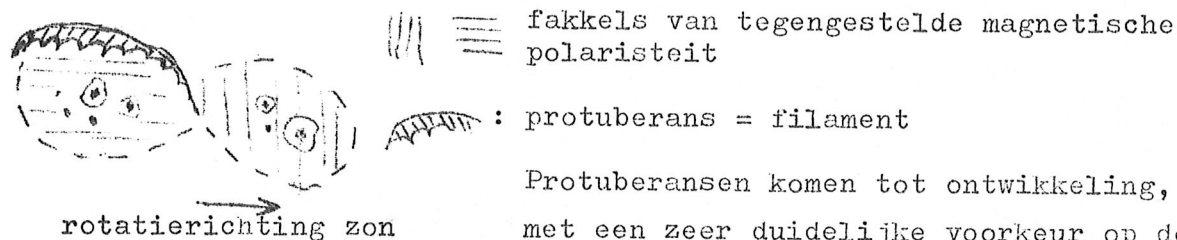
Magnetische velden: tientallen - honderden gauss. Fakkels en fakkelvelden zijn opgebouwd uit kleine elementen, diam.  $\approx$  1000 km. Altijd nabij zonnevlekken, doch er zijn fakkelvelden waarin zich geen vlekken ontwikkelen.

Protuberansen: buiten de zonneschijf: heldere rode, draderige "wolken" in corona. Spectrum chromosfeerachtig:  $T \approx 10\ 000^\circ$  , dichtheid veel groter dan in corona; drukevenwicht. Op schijf: donkere linten (filamenten) in het licht van  $H\alpha$ . Kammen: lang  $\approx$  200 000 km, breed  $\approx$  7000 km,

hoog  $\approx 40\ 000$  km. Levensduur: enkele maanden (vaak met onderbrekingen: plotseling verdwijnen).

#### Opbouw en levensloop van flink actief gebied

Eerst verschijnt een compact helder fakkelveld met een sterk magnetisch veld. Dit fakkelveld breidt zich uit, binnen één of twee dagen verschijnen de vlekken die zich binnen enkele dagen tot de grootste omvang ontwikkelen. Het actieve gebied heeft doorgaans een duidelijk bipolaire structuur:



Protuberansen komen tot ontwikkeling, met een zeer duidelijke voorkeur op de grens van de polariteiten en aan de poolwaartse zijde. De vlekken verdwijnen binnen één tot enkele weken, het fakkelveld breidt zich uit, wordt brokkelig en minder helder. Protuberansen ontwikkelen zich nog geruime tijd. Het fakkelveld verliest zich geleidelijk in het chromosferische netwerk; tenslotte brokkelen de protuberansen af.

De corona boven (of beter: in) het actieve gebied is abnormaal helder: de temperatuur is iets hoger, de dichtheid in de koepelvormige coronacondensatie is 5 tot 10 maal hoger dan in de normale corona. Verhoogde röntgen- en radiostraling.

#### III.4.3.2. Eruptieve actieve verschijnselen

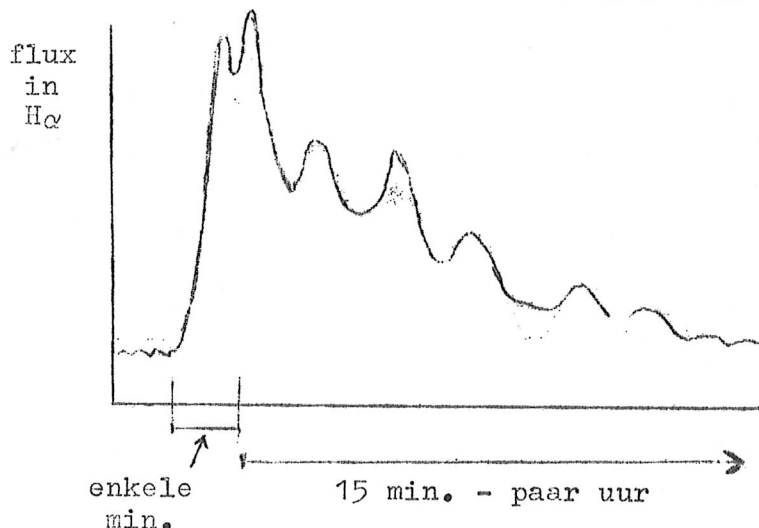
In vorige paragraaf: langzaam-veranderlijke actieve verschijnselen. Van de snelle verschijnselen worden de meest spectaculaire zonnevlammen (flares) genoemd.

1) optisch: Plotseling oplichten van Balmerlijnen (bij sterke vlammen wordt  $H\alpha$  volledige emissielijn) in delen van het fakkelveld. Zeer fijne structuren.

Indien nabij rand: oplichten van bijzondere coronalijnen:

( $\rightarrow T \approx 4 \times 10^6$  K)

2) Sterk verhoogde UV straling  $\lambda < 2000 \text{ \AA}$  bij sterke vlammen tot ver in röntgengebied (tot  $0.1 \text{ \AA}$ ) -





- dan sterke ionisatie in aardse ionosfeer - uitvallen van radioverkeer op korte golflengten.
- 3) Sterk verhoogde radiostraling op alle golflengten, verschijnselen zeer complex, grotendeels niet-thermische straling.
  - 4) Uitstoting van wolken met  $v = 500$  - paar duizend  $\text{km sec}^{-1}$  - kunnen na ongeveer 1 dag bij de aarde aankomen  $\rightarrow$  onregelmatigheden in aardse magnetische veld ("magnetische stormen"), en poollicht.
  - 5) Sporadisch, bij zeer sterke vlammen: "kosmische stralingsstoten": atoomkernen worden uitgestoten met sterk relativistische snelheden ( $10^9 - 10^{10}$  eV).

Men schat voor energie die totaal vrijkomt:  $10^{26}$  erg (kleine vlam) -  $10^{32}$  erg (zeer grote vlam). Ter vergelijking: H-bom  $10^{27}$  erg; straling zon in één seconde:  $4 \times 10^{33}$  erg.

Vlammen zijn niet zeldzaam. Bij een "onrustige" zon: per dag: 1 grote, 10 middelgrote en 100 kleine vlammen. Vlammen meest frequent omstreeks maximale ontwikkeling van actief gebied. A.G. met een complexe magnetische structuur vlammen frequenter en feller dan mooi-bipolaire gebieden.

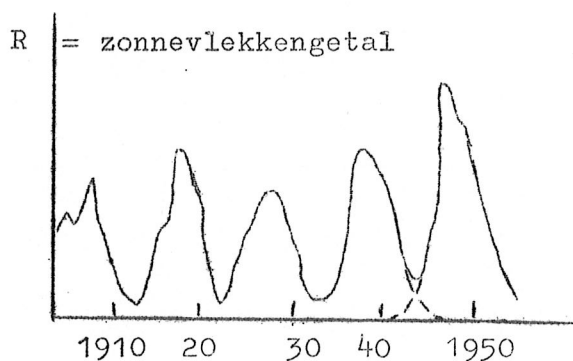
Uit de waarnemingen blijkt wel dat vlammen plotseling optredende instabiliteiten zijn in de corona en hoge chromosfeer.

Plaatje: tijdens de ontwikkeling van een A.G. wordt het magnetische veld voortdurend vervormd door differentiële rotatie en convectie op grote schaal (dit uit zich o.a. in geleidelijke verplaatsingen van zonnevlekken e.d.). Blijkbaar kan dit leiden tot instabiliteiten in de corona, waarbij het magnetische veld plotseling een nieuwe evenwichtsconfiguratie aanneemt. Bij snelle veranderingen in het magnetische veld kunnen geladen deeltjes worden versneld en dit kan in principe de niet-thermische componenten in de röntgen- en radiouitbarstingen verklaren.

In A.G. treden een groot aantal andere snelle verschijnselen op: plotseling verdwijnende protuberansen, bijzondere typen kortstondige protuberansen, allerlei typen radiouitbarstingen.

#### III.4.3.3. De activiteitscyclus

A.G. gebieden treden vrijwel uitsluitend in gordels aan weerszijde van de zonne-equator op, tot hoogstens  $40^\circ$  heliografische breedte. Het aantal zonnevlekken (vlekkengroepen, A.G.) varieert sterk met een 11-jarige periode.



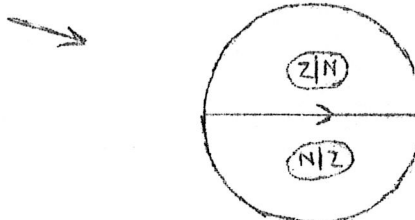
het ene halfrond de ene polariteit, op het andere halfrond juist de tegengestelde polariteit.

- 3) Het verband: polariteit leidende vlek - halfrond slaat bij de volgende cyclus om → eigenlijke periode 22 jaar.

Alle met activiteit verbonden verschijnselen weerspiegelen de activiteitscyclus, bijv. ook de vorm van de corona.

Wetmatigheden:

- 1) Aan begin van cyclus (na minimum) ontstaan vlekken gemiddeld op hoge breedte, de gemiddelde gordel van vlekvorming schuift geleidelijk naar de equator toe (→ vlinderdiagram, college).
- 2) Tijdens één cyclus hebben alle leidende vlekken (die voorop lopen bij de rotatie) op



Literatuur: A. Unsöld: Der neue Kosmos (II. Teil)

bij III.3: G.B. van Albada: Sterrenkunde (red. C. de Jager)  
deel III;

Sterren (Speciaal hoofdstuk I (t/m  
I.8) en § III.6)

bij III.4: C. Zwaan en M. Kuperus: Sterrenkunde deel II, hoofdstuk II: de Zon.

Inhoudsopgave College 1971-1972

<u>III</u>	<u>Atmosferen van Sterren</u>	
III.1	<u>Waarnemingen; te bepalen parameters</u>	1
III.2	<u>Stralingstransport, vorming van spektrale lijnen, modelatmosferen</u>	3
III.2.1	<u>Stralingstransport</u>	3
2.1.1.	Intensiteit en afgeleide grootheden	3
2.1.2.	Extinctie- en emissiecoëfficiënten; transportvergelijking; $\tau_{\nu}$ en $S_{\nu}$	6
2.1.3.	(!) TE, LTE, NLTE, verstrooiing.	9
2.1.4.	Overzicht extinctie- en emissieprocessen (fig. onvolledig!)	11
2.2	<u>Modelatmosferen</u>	13
2.2.1.	Vlakke lagen: relaties en benaderingen	13
2.2.2.	(!) Stralingsevenwicht	19
2.2.3.	Grijze atmosferen in stralingsevenwicht	20
2.2.4.	"Bonte" atmosferen: vorming spektrale lijnen en deken-effekt	23
2.2.5.	Drukverdelingen; hydrostatisch evenwicht	26
2.2.6.	Theoretische modelatmosferen in stralingsevenwicht	28
2.2.7.	Stralingsevenwicht of convectie?	29a
2.2.8.	(!) Empirische modelatmosferen	30
2.3	<u>Vorming van spektrale lijnen</u>	34
2.3.1.	Oplossing transportvergelijking; LTE en verstrooiing	34
2.3.2.	(!) Statistisch evenwicht, het twee-niveau atoom	37
2.3.3.	Lijnverbreding	43
2.3.4.	Equivalenten breedten, groeikrommen, abundanties	45
2.3.5.	Snelheidsvelden en magnetische velden	52

III.3	<u>Sterren</u>	54
3.1	Klassificatie van sterren, het LTD	54
3.2	Intrinsiek veranderlijke sterren	64
3.2.1.	Pulserende sterren	65
3.2.2.	Eruptieve sterren	69
3.2.3.	Contraherende sterren	71
3.2.4.	Magnetische sterren	72
III.4	<u>De Zon</u>	73
4.1	Uiterlijk	73
4.2	Gevolgen van convectiezone	74
4.2.1.	Granulatie, supergranulatie, oscillaties	74
4.2.2.	Verhitting hoge chromosfeer en corona; zonnwind	75
4.3	Magnetische velden en zonne-activiteit	75
4.3.1.	Actief gebied: vlekken, fakkels, protuberansen	75
4.3.2.	Eruptieve actieve verschijnselen	77
4.3.3.	De activiteitscyclus	78

Aanvulling blz III.31

na formule (III.47):

Voer in; met Eddington,  $K \equiv \oint I \mu^2 d\omega / 4\pi$

Vermenigvuldig alle leden van de transportvergelijking

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} = I(\tau, \mu) - S(\tau)$$

met  $\mu d\omega / 4\pi$ , en integreer over  $\omega$ . Dit levert, na verwisselen van integratie en differentiatie in het linkerlid:

$$\frac{d}{d\tau} \int_{-1}^{+1} I \mu^2 d\omega / 4\pi = \int_{-1}^{+1} I \mu d\omega / 4\pi - J \int_{-1}^{+1} \mu d\omega / 4\pi \quad (\text{III.48b})$$

eerste term =  $dK/dt$

tweede term =  $\frac{1}{4}F$ , volgens vgl. III.7a

derde term =  $0_m$

Verder benaderen we, voor  $\tau \rightarrow \infty$

$$K \approx \bar{\mu}^2 \int I d\omega / 4\pi = \bar{\mu}^2 \cdot J$$

$$\text{Nu is } \bar{\mu}^2 = \frac{1}{4\pi} \int \mu^2 \cdot 2\pi \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \mu^2 d\mu = \frac{1}{3}$$

Dus vgl (III.48b) wordt

$$\frac{1}{3} dJ/d\tau = \frac{1}{4} F$$

Daar  $J(\tau) = S(\tau)$  is dus voor  $\tau \gg 1$ :

$$\frac{dS(\tau)}{d\tau} = \frac{3}{4} F(\tau) \text{ en na integratie,}$$

$$S(\tau) = \frac{3}{4} F(\tau + c) \quad (\text{III.49a})$$

Samenvatting van de voornaamste formulesA. Intensiteiten, fluxen

$I_\nu$ ,  $I_\lambda$  (monochromatische) intensiteit

$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \oint I_\nu d\omega$  : gemiddelde monochromatische intensiteit

$\pi F_\nu = 2\pi \int_0^{\pi/2} I(\mu) \mu d\mu$  : monochromatische flux

$I = \int_0^\infty I_\nu d\nu$ ;  $J = \int_0^\infty J_\nu d\nu$ ;  $F = \int_0^\infty F_\nu d\nu$  : totale: int; gem. int.; flux

Bronfunctie:  $S_\nu = j_\nu / k_\nu$  ( $j_\nu$  = emissie koef;  $k_\nu$  =  
extinctie koef)

=  $B_\nu$  (Planck) in Lokaal Thermodynamisch

Evenwicht.

B. Transportvergelijking der straling

a) voor de intensiteit:  $\mu \frac{dI_\nu(\tau_\nu)}{d\tau_\nu} = I_\nu(\tau_\nu) - S_\nu(\tau_\nu)$

$d\tau_\nu = k_\nu \rho dz$  : Optische diepte element

$\tau_\nu = \int_0^Z k_\nu \rho dz$  : Optische dikte van laag

b) voor de flux:  $\frac{dF_\nu(\tau_\nu)}{d\tau_\nu} = J_\nu(\tau_\nu) - S_\nu(\tau_\nu)$

C. Oplossing transportvergelijking

voor laag, dikte  $Z$ , opt. dikte  $\tau_\nu$  :

$$I_\nu(Z) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu} + S_\nu (1 - e^{-\tau_\nu})$$

bij zuivere verstrooiing (geen abs):  $S_{\nu} = J_{\nu}$

bij zuivere absorptie (geen verstr):  $S_{\nu} = B_{\nu}$

algemeen:  $S = \frac{\sum_i k_{\nu,i} S_{\nu,i}}{\sum k_{\nu,i}}$

voorbeeld; verstr en abs.:  $S_{\nu} = \frac{\kappa_{\nu}}{\kappa_{\nu} + \sigma_{\nu}} B_{\nu} + \frac{\sigma_{\nu}}{\kappa_{\nu} + \sigma_{\nu}} J_{\nu}$

uittredende straling vlakke atmosfeer:

$$I_{\nu}(0, \mu) = \int_0^{\infty} S_{\nu}(\tau_{\nu}) e^{-\tau_{\nu}/\mu} d\tau_{\nu}/\mu$$

stel nu  $S = \sum_0^{\infty} a_n \tau^n$

dan  $I_{\nu}(0) = \sum a_n n! \mu^n \rightarrow I_{\nu}(0, \mu) \approx S_{\nu}(\tau_{\nu} = \mu)$  als  $n \leq 1$

$$F_{\nu}(0) = a_0 + \frac{2}{3} a_1 + a_2 + \dots \rightarrow F_{\nu}(0) \approx S_{\nu}(\tau_{\nu} = \frac{2}{3}), n \leq 1$$

$$J_{\nu}(0) = \frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{3} + \dots \rightarrow J_{\nu}(0) \approx \frac{S_{\nu}}{2} (\tau_{\nu} = \frac{1}{2}), n \leq 1$$

dus  $F_{\nu}(0) \approx 2 J_{\nu}(0)$

samenhang opt. diepten, verschillende  $\nu$ , zelfde geom. diepte:

$$\tau_{\nu} = \left( \frac{k_{\nu}}{k_0} \right) \tau_0$$

#### D. Structuur eenvoudige atmosfeer

stel: stralingsevenwicht:  $\pi F = \pi F_{\text{rad}}$ , constant met  $z$

$$\text{dan } \int k_{\nu} \rho S_{\nu} d\nu = \int k_{\nu} \rho J_{\nu} d\nu$$

stel bovendien: grijze atmosfeer:  $k_{\nu} = k = \text{constant}$

$$\text{dan } S(\tau) = J(\tau)$$

$$F_{\nu} = \frac{4}{3} \frac{dJ}{d\tau} = \frac{4}{3} \frac{dS}{d\tau}$$

$$\text{dus } S(\tau) = \frac{3}{4} F(\tau + \frac{2}{3})$$

$$T^4(\tau) = T_{\text{eff}}^4 \cdot \frac{3}{4} (\tau + \frac{2}{3})$$

$$\text{resp. } \dots \dots (\tau + q(\tau))$$

IIIB. Atmosferen van Planeten

III.B.1 Algemeen: Geen stralingsflux van binnen, zoals bij sterren, maar eenzijdige flux van buiten, die halve bol bestraalt. Aan nacht-zijde alleen emissie.

Zoals ons beeld van steratmosferen wordt opgebouwd n.a.v. de studie van de zon, baseren we de studie van planeet-atmosferen op de grondiger kennis van de aardatmosfeer. Deze bestaat uit de volgende lagen:

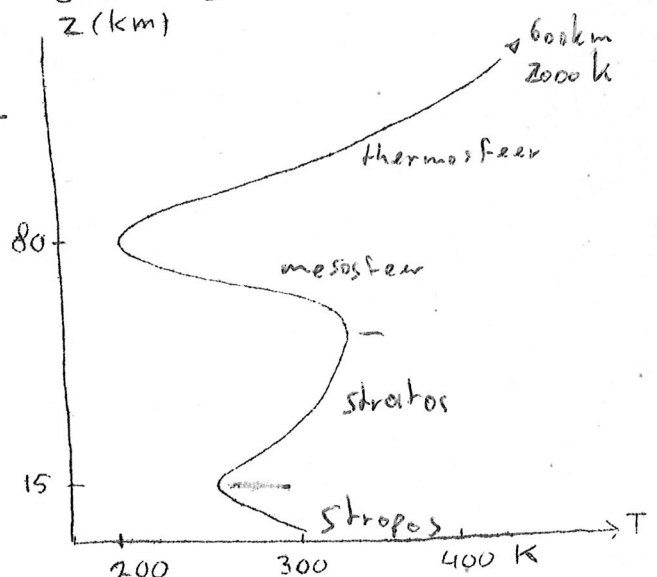
troposfeer	0-10 à 20 km	$dT/dz < 0$	convectie, het weder.
stratosfeer	tot 50 km	$> 0$	geen convectie.
mesosfeer	tot 80 km	$< 0$	
thermosfeer	tot 600 km	$> 0$	T loopt op tot ca 2000K.
exosfeer	$\gtrsim 600$ km		neutrale deeltjes ontsnappen.
magnetosfeer	tot <u>+80000</u> km		geioniseerde deeltjes gevangen in magnetisch veld.

Verder kent men alternatieve indeling:

Homosfeer: tot 100 km, chemisch homogeen.

Heterosfeer: daarboven: gravitatie diffusie: lichtste elementen "drijven" boven.

Verder: ionosfeer, 80-400 km, voorkomen van enige geioniseerde deeltjes.





Temperatuur op iedere diepte wordt bepaald met onderstelling  
stralin sevenwicht. Vergelijking III.43

$$\int k_{\nu} \rho S_{\nu} d\nu = \int k_{\nu} \rho J_{\nu} d\nu \quad (\text{III.B.1})$$

(denk aan het eenzijdige karakter van I; I = 0 in alle richtin-  
gen behalve die van de zon af).

Vgl (III.B.1) is niet verder te behandelen zonder nadere onderstel-  
ling. Stel er is LTE, dus  $S(\nu, T) = B(\nu, T)$ . Daar  $J$ , de atmosfe-  
rische dichtheden  $\rho$ , en de absorptiecoëfficiënten  $k_{\nu}$  bekend  
zijn is T de enige onbekende in vgl (III.B.1) en laat zich dus be-  
palen.

Temperatuur maxima:

bij  $z=0$  door absorptie zonnestraling in grond en verwarming lage  
luchtlagen

$Z \approx 50$  km: door absorptie van  $\approx 2500 \text{ \AA}$  straling door Ozon ( $O_3$ )

$z > 80$  km: door absorptie van kortgolvlige straling door  $O_2$ ,  $O$ ,  
 $N_2$ , (N).

Daar zonnestraling  $< 100 \text{ \AA}$  sterk variabel is is dit ook het ge-  
val met T ( $z > 500$  km). T amplitude  $\approx 1000$  K in zonneglans,  
en tussen dag en nacht.

### III.B.2 Schaalhoogte

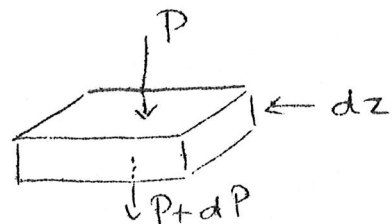
Druktoename over  $dz$  = gewichtdoosje  
met dikte  $dz$ :

$$dP = -g\rho dz$$

toestand vergel.  $P = \frac{RT}{\mu}$ ;  $\mu$  = gemiddeld mol.gew  $\approx$   
29 nabij grond

Dus 
$$\frac{dP}{P} = - \frac{g\mu}{RT} dz \equiv - \frac{dz}{H}$$

H is de druk - schaalhoogte =  $\frac{RT}{\mu g}$  (III.B.2)



Betekenis van H:

(a) stel  $H(z) = \text{constant}$ , dan

$$\int_{P(0)}^{P(z)} \frac{dP}{P} = -\frac{1}{H} \int_0^z dz$$

geeft

$$\ln \frac{P(z)}{P(0)} = -\frac{z}{H} \rightarrow P(z) = P(0) e^{-z/H} \quad (\text{III.B.3})$$

Schaalhoogte H is hoogteverschil waarover druk met factor e afneemt.

(b) stel weer H is constant. Stel: atmosfeer is homogeen, isotherm met zelfde  $\rho$  en eindige dikte Z, daarboven niets! Dan is

$$P(0) = \int_0^Z g \rho dz = g \rho Z \quad (\text{III.B.4a})$$

Anderzijds:  $P(0) = \rho e T / \mu \quad (\text{IV.B.4b})$

(III.B.4a) = (III.B.4b) indien  $Z = H$ , m.a.w.

Schaalhoogte is dikte van de "homogene atmosfeer".

### III.B.3 Theorie van exosferen van planeten.

De exosfeer is dat deel van de atmosfeer waar de vrije weglengte  $l$  zo groot is dat de kans op botsingen der deeltjes klein is, en de deeltjes kogelbanen beschrijven in het gravitatieveld van de planeet. Bijgevolg zullen deeltjes met uitwaartse snelheidscomponenten groter dan de ontsnappingssnelheid het gravitatieveld van de planeet kunnen verlaten. Mathematische gedefinieerd door  $l \gg H$ .

Stel: ondergrens exosfeer op niveau  $z_0$  waar  $l = H$ . (III.B.5)

Met  $\bar{\sigma}$  = botsingsoppervlak der deeltjes, en  $N$  = aantal deeltjes per  $\text{cm}^3$ , is

$l = (N\bar{\sigma})^{-1}$ , met (IIIB.5) levert dit

$$N(z_0) = \mu g / \bar{\sigma} R T \quad (\text{IIIB.6})$$

Laat verder  $N(z) = N(z_0) e^{-(z-z_0)/H}$

$$\text{dus } \int_{z_0}^{\infty} N(z) dz = N(z_0) \cdot H \quad (\text{IIIB.7})$$

In richting die hoek  $\vartheta$  maakt met verticaal is  $l = H$  op die hoogte  $z_1$  waar

$$N(z_1) = \mu N(z_0), \quad (\mu = \cos \vartheta)$$

omdat

$$N(z_1) \int_{z_1}^{\infty} e^{-\frac{(z-z_1)}{H}} \frac{d(z-z_1)}{\mu} = \frac{H N(z_1)}{\mu} \quad (\text{IIIB.8})$$

Laat van het aantal deeltjes  $N(z)$  een gedeelte  $\gamma$  een snelheid hebben, groter dan de ontsnappingssnelheid

$$v_{\text{ont}} = \sqrt{2GM/R}, \text{ met}$$

$G$ = gravitatiekonstante

$M$ = planeetmassa

$R$ = afstand tot planeet middelpunt (Meestal  $\approx$  straal van de planeet).

Van deze fraktie  $\gamma$  heeft de helft een uitwaartse snelheidscomponent

Het aantal deeltjes  $L_1$  in een zuil met doorsnee  $1 \text{ cm}^2$  dat kan ontsnappen is dus (zie vgl. IIIB.8):

$$L_1 = \frac{1}{\lambda} N(z_0) \oint \gamma \mu H d\omega = \frac{1}{\lambda} \gamma H N(z_0) \int_0^{\pi/2} 2\pi \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \quad (\text{IIIB.9})$$

$$= \frac{4\pi}{3\lambda} \gamma H N(z_0)$$

Om formule (IIIB.9) kwantitatief te kunnen uitrekenen dient men nog te kennen:  $\sigma$  (bepaalt  $N(z_0)$  met vgl (IIIB.6) en  $\gamma$ , en natuurlijk de structuur van de atmosfeer (bepaalt mede  $N(z_0)$ ,  $H$  en  $\gamma$ ). Daarbij te bedenken dat in de homosfeer (boven ca 100km) ieder bestanddeel zijn eigen schaalhoogte heeft, bepaald door het eigen moleculair gewicht.

Verdelingsfunctie der deeltjes snelheden is volgens Maxwell:

$$f(v) dv = 4(\bar{v})^{-3} \pi^{-\frac{1}{2}} v^2 \exp(-mv^2/2kT) dv$$

Met  $\bar{v} =$  gemiddelde snelheidscomponent  $= (2kT/m)^{3/2}$ .

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1; \text{ dus } \gamma = \int_{v_{ont}}^{\infty} f(v) dv$$

Het totale verlies per  $\text{cm}^2$  is dan

$$L = \frac{\pi N(z_0) H}{\lambda} \int_{v_{ont}}^{\infty} v f(v) dv =$$

$$= m N(z_0) \frac{v_{ont}}{\sqrt{4\pi}} \left( 1 + \frac{m v_{ont}^2}{2kT} \right) \exp\left(-\frac{m v_{ont}^2}{2kT}\right)$$

en het totale verlies van de hele planeet:

$$4\pi (R+z_0)^2 L \approx 4\pi R^2 L \quad (\text{IIIB.10})$$

Op grond van vgl. (IIIB.10) berekent men "ontsnappingstijden" gedefinieerd als de tijd nodig om een bepaald bestanddeel tot  $e^{-1}$  van de oorspronkelijke hoeveelheid te doen afnemen; de tabel geeft de ontsnappingstijd in jaren, voor de aarde.

temperatuur	aatom			
	H	He	N	O
500 K	$2 \cdot 10^7$	$4 \cdot 10^{25}$	$10^{92}$	$10^{105}$
1000 K	$4 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^{13}$	$10^{45}$	$10^{51}$
2000 K	$2 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^7$	$4 \cdot 10^{22}$	$10^{26}$

Let op de invloed van T; in perioden van intense zonne-activiteit loopt de temperatuur in de exosfeer of tot boven 2000 K! Op grond hiervan vindt men voor lichamen als de Maan, Mercurius dat ze vrijwel geen atmosfeer hebben, Mars heeft een zeer ijle atmosfeer, terwijl bij de zware planeten geen merkbaar massaverlies plaatsvindt.

#### IIIB.4 Ionosferen van de planeten

Meetresultaten: sedert 1930 uitsluitend met radiosondes, later ook directe metingen met raketten en satellieten en "bovenkantsondering" vanuit hoogvliegende satellieten. Het aantal electronen varieert met de hoogte, en toont enigszins een gelaagde structuur, overgeaccentueerd door de speciale techniek van het sonderen.

"laag"	ionisatie van	door	gemidd. z	max $N_e(\text{cm}^{-3})$
C	alle atomen	kosmische straling	50-60km	100
D	NO moleculen	(1216Å)	80km	1000
E	O <sub>2</sub>	röntgenstr.	10-170km	$1-2 \cdot 10^5$
F <sub>1</sub>	O(N <sub>2</sub> )	} UV 170 - 900 Å	170km	$2-4 \cdot 10^5$
F <sub>2</sub>	O(N <sub>2</sub> )		250-350km	$4-20 \cdot 10^5$
Langzame afname van $N_e$ op groter hoogte			1000km	$3 \cdot 10^4$
			4000km	$8 \cdot 10^3$

Theorie van het ontstaan van de ionosfeer

Ionisatie door het proces  $h\nu + X \rightarrow X^+ + e^-$

Beschouw monochromatische straling, frequentie  $\nu$ , intensiteit, uitgedrukt in fotonenstroom buiten aardatmosfeer is  $Q_\infty$ , en op hoogte  $z$ :  $Q(z)$ . Laat het botsingsoppervlak voor ionisatie  $\sigma$  zijn, de dichtheid van de betrokken deeltjes  $N(z)$ , dan is de produktie  $P(z)$  van elektronen

$$P(z) = N \sigma Q(z) \quad \left[ \text{m}^{-3} \text{s}^{-1} \right] \quad \text{(IIIB.11)}$$

en het aantal fotonen geabsorbeerd over een afstand  $ds$

$$\frac{dQ}{ds} = -N\sigma Q \quad \text{en} \quad \frac{dQ}{dz} = +N\sigma Q \sec \vartheta$$

Dus

$$Q(z) = Q_\infty \exp \left( - \sigma \sec \vartheta \int_z^\infty N(z) dz \right) \quad \text{(IIIB.12)}$$

Neem een constante scheelhoogte  $H$  aan:

$$N(z) = N(0) \exp(-z/H), \quad \text{(IIIB.13)}$$

dan is door combinatie van (IIIB.11), (IIIB.12) en (IIIB.13)

$$P(z) = \sigma Q_\infty N(0) \exp \left[ \underbrace{-\frac{z}{H}}_{(a)} - \underbrace{\sigma N(0) \sec \vartheta e^{-\frac{z}{H}}}_{(b)} \right] \quad \text{(IIIB.14)}$$

Deze uitdrukking is het produkt van twee exponentiele functies waarvan de een (a) afneemt met toenemende  $z$ , en de ander (b) juist toeneemt. Indien de ionisatie dan ook slechts veroorzaakt werd door één soort monochromatische straling zou de ionosfeer uit één vrij scherpe laag bestaan. Daar de ionisatie echter door een breed spectrum van zonnestraling veroorzaakt wordt,

strekt de  $N_e(z)$  functie zich over een groot  $z$  - bereik uit.

Evenwichts-dichtheid. Form. (IIIB.14) geeft de ionenproductie per cm en s, maar de hoeveelheid gevormde ionen wordt gecompenseerd door recombinitie zodat op iedere hoogte  $z$  zich uiteindelijk een evenwichtstoestand uitstelt, die overigens met de tijd verloopt, als gevolg van de variatie van de zonshoogte.

Dus

$$dN_e(t,z)/dt = P(t,z) - \alpha (N_e(t,z))^2 \quad (\text{IIIB.15a})$$

of

$$dN_e(t,z)/dt = P(t,z) - \beta I_e(t,z), \quad (\text{IIIB.15b})$$

al naar gelang ionen geneutraliseerd worden door



proces evenredig met  $N(x^+)$  en met  $N_e$ . Bedenk dat  $N(x^+) \propto N_e$ :  $\alpha$  is de recombinatie coëfficiënt ( $\alpha \approx 10^{-7} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ ).

(b) diffusie-verschijnselen, form. (IIIB.15b); treden alleen in de  $F_2$  laag op;  $\beta \approx 10^{-4} \dots 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ .

*brasilias*  
IIIB.5 Het dekenneffect in een planetenatmosfeer

De temperatuur van een planeet wordt berekend uit

$$(1-\alpha) F_{\odot} \left(\frac{R}{r}\right)^2 = \sigma T_p^4 \quad (\text{IIIB.16})$$

waarin  $\alpha$  de albedo ("witheid") is: het percentage van het opvallende licht dat in alle richtingen weerkaatst wordt.  $F$  is

de flux zonnestraling  $= \sigma T_{eff}^4$ ;  $R$ =straal zon,  $r$ =afstand planeet. Het linkerlid geeft de per  $cm^2$  geabsorbeerde stralingsflux; rechts staat de emissie.  $T_p$  = temperatuur "planeet" (bij de aarde in de praktijk de temperatuur van de stratosfeer; de aardestraling bij een golflengte van  $10 \mu$  is nl. hoofdzakelijk afkomstig uit die atmosferische laag waar  $\tau(10 \mu) \approx 1$ ; dit blijkt in de stratosfeer te liggen).

Op grond van form (IIIB.16) berekent men voor Venus (albedo=0.6) een temperatuur van 260 K, dit blijkt ongeveer de temperatuur te zijn van de bovenzijde van de dichte wolkenlaag om Venus. Echter blijkt de temperatuur aan het oppervlak blijkens directe metingen ca 740 K te zijn. Oorzaak: het deken- of broeikas-effect van de bewolkte hoge atmosfeer.

Benaderde behandeling:

Noem  $f$  de invallende flux buiten de atmosfeer; van deze flux wordt

- een flux  $f_f$  door de wolken geabsorbeerd, de helft hiervan wordt in de vorm van thermische straling naar buiten, de andere helft naar binnen uitgestraald;
- de rest door de wolken gereflecteerd;

Het ingestraalde deel doet de temperatuur van de ruimte "onder" de wolkenlaag toenemen, en dit zou onbeperkt doorgaan, indien er niet een "lek" zou zijn, bijv. een niet volledig optisch dik zijn van de wolken voor de infrarode straling uit het planeetoppervlak. Laat de fraktie grondstraling die naar buiten doorgelaten wordt  $\theta$  zijn, dan zijn de evenwichtsvergelijkingen:

$$(1-\alpha)\sigma(T_{eff})_{zon}^4 \left(\frac{R}{r}\right)^2 = 2\sigma T_{wolk}^4 \quad (IIIB.17a)$$

(factor 2 in rechterlid omdat de wolkenlaag naar binnen en beneden straalt)

en 
$$\sigma T_w^4 = \theta \sigma T_{opp}^4 \quad (IIIB.17b)$$

Uit vgl. (IIIB.17a) zou men vinden:  $T_w = \overset{220}{175}$  K,  
 en uit (IIIB.17b), met een grondtemperatuur van 740K:



$$\theta = \left( \frac{220}{175/740} \right)^4 \approx 0.009,$$

wat zou betekenen dat de wolken in het infrarood een "doorzichtigheid" ( $= e^{-\tau}$ ) hebben van 0.009, waaruit een infrarode optische dikte  $\tau \approx 6^5$  zou volgen.

Wijzigingen

blz. III.17: laatste twee regels weg.

blz. III.18, juist onder figuur, wordt:

$\tau \gg 1$ : Stralingsveld bijna isotroop;

$$J_{\nu}(\tau) \approx S_{\nu}(\tau) \quad F_{\nu}(\tau) \approx \frac{4}{3} \frac{d}{d\tau} [S_{\nu}(\tau)]$$

$$K_{\nu}(\tau) \approx \frac{1}{3} S_{\nu}(\tau) \approx \frac{1}{3} J_{\nu}(\tau)$$

Zodra het stralingsveld in het belangrijkste frequentiegebied isotroop geworden is, mag men verwachten dat LTE zeer dicht benaderd wordt, dus  $S_{\nu}(\tau) = B_{\nu}(T)$ .

Nog een tweetal . . . . . enz.

blz. III, 19 de één na laatste alinea: "Samen met (III,26). . . ." vervangen door:

Aangezien  $J_{\nu}(\tau_{\nu})$  afhangt van de bronfunctie  $S_{\nu}(t)$  "in de buurt" van  $\tau_{\nu}$  (zie blz. III,14) geeft (III,43) eigenlijk een speciale voorwaarde waaraan de bronfunctie moet voldoen opdat er stralingsevenwicht is.

Wanneer wij . . . . . enz.

III, 20, begin § III. 2.2.3 vervangen door:

Sterk vereenvoudigende onderstelling: materie grijs:  $k_{\nu}(z) = k(z)$ : geen spectrale lijnen enz.. Gevolg:

$$\tau_{\nu}(z) = \int_z^{\infty} k_{\nu} \rho dz = \tau(z) \quad (III,45)$$

onafhankelijk van  $\nu$  (bij niet-grijze materie zal in het algemeen  $\tau_{\nu_1}(z) \neq \tau_{\nu_2}(z)$ ).

Daardoor kunnen beide leden van de transportvergelijking en van de daaruit afgeleide vergelijkingen over  $\nu$  geïntegreerd worden;  $\int_0^{\infty} \dots d\nu$  geeft dan, bedenkend dat de volgorde: integratie over  $\nu$  en differentiatie naar  $\tau$  nu mag worden omgewisseld:

$$(III,14) \rightarrow \mu \frac{d I_{\nu}(\tau, \mu)}{d\tau} = I_{\nu}(\tau, \mu) - S_{\nu}(\tau) \rightarrow \mu \frac{dI(\tau)}{d\tau} = I(\tau) - S(\tau) \quad (III,46)$$

$$(III,43) \rightarrow S(\tau) = J(\tau) \quad (III,47); \quad (III,39) \rightarrow \frac{d}{d\tau} H(\tau) = J(\tau) - S(\tau) = 0$$

dus  $H(\tau) = H$ , onafhankelijk van  $\tau$ , maar dat wisten wij al. Voorts:

$$(III,40) \rightarrow \frac{d K(\tau)}{d\tau} = H \quad (III,49), \text{ dus } K(\tau) = H\tau + c = \frac{1}{4} F\tau + c \quad (III,50)$$

Nu suggereren (III, 38 en 34b):  $S(\tau) = J(\tau) \approx 3K(\tau)$  zodat je een oplossing vermoedt:

$$S(\tau) = J(\tau) = \frac{3}{4} F [\tau + q(\tau)], \quad (III,51)$$

waarin  $q(\tau)$  een langzaam-variërende functie is.

Eddington benaderde  $q(\tau)$  door een constante, die hij oploste met (III,34a)  $\rightarrow 2J(0) = F$  hetgeen met (III,51) oplevert  $q = \frac{2}{3}$ , dus

$$S(\tau) = J(\tau) \approx \frac{3}{4} F (\tau + \frac{2}{3}) \quad (III,51a).$$

(Hierna volgt blz. III, 21).