Errata en aanvullingen bij het kollege Stersystemen

p.V.45 r.7 De wiskunde is niet zozeer "identiek" als wel "analoog" aan die van de beschrijvingen van plasma's en gassen.

r.29 2e alinea:....het drie-lichamen-probleem in principe ook; de exacte oplossing van het vierlichamen-probleem is nog onderwerp van studie.

p.V.46 r.9 bij punt 1: 6 vergelijkingen, geen 3.

r.33 Opmerking bij het viriaaltheorema:
ook moet gelden dat: er geen rotatie is van het systeem als geheel
de $\frac{1}{r^2}$ - wet geldt voor de onderlinge kracht.

p.V.47 r.13 in de formules moet twee keer 1/2 weg (waar?)
Verder staat er nog een 1/2, een 2 en een 2 teveel.

r.20 Toepassing op een bolhoop:
kijk eens in de literatuur na wat ongeveer r is, wat $\overline{v^2}$ is en wat R. Vergelijk het resultaat en trek de konklusies.
Idem voor extragalactische stelsels.
Litt. Voigt deel II

p.V.48 r.23 $$U_i = - G \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} m_k \cdot \frac{1}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|} = U_i\, (\vec{r}_1, \ldots\ldots, \vec{r}_n)$$

r.25 Het betekent dus dat de precieze plaats van één individuele ster niet veel uitmaakt voor de potentiële energie van de ster die we beschouwen; het gaat meer om de dichtheidsverdeling van al die sterren rond de beschouwde ster. in de praktijk betekent dat, dat de invloed van dicht in de buurt zijnde sterren erg wordt onderschat. Bijvoorbeeld in een dubbelsterren systeem wordt de potentiële energie vooral bepaald door de partner. Beschouw ik dit soort paren als één geheel, dan kan ik wel (ongeveer) bovenstande redenering toepassen.
Botsingen tussen twee sterren, of bijna-botsingen worden trouwens ook verwaarloosd in deze uitsmeringsprocedure. Veronderstel ik bovendien dat één enkele ster van massa m_i niet van veel invloed is op de totale konfiguratie (dus moet zeker $m_i/M_{totaal} \ll 1$ gelden) dan is U ook niet meer afhankelijk van $\vec{r}_i$, maar alleen van $\vec{r}$, dus $U = U(\vec{r})$.

p.V.49 r.1 $\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_6 \cdot f\, \vec{V}_6 = 0$, kontinuïteitsvergelijking in de 6-dimensionale faseruimte. Schrijven we dit uit in een plaatsdeel en een snelheidsdeel, dan is
$\vec{V}_6 = (\vec{v}, \vec{a}) = \frac{d}{dt}(\vec{r}, \vec{v})$, en $\nabla_6 = \nabla_r + \nabla_v =$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} + \frac{\partial}{\partial v_x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial v_y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial v_z}\hat{k} ,$$

zodat

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_r \cdot f\,\vec{v} + \nabla_v \cdot f\,\vec{a} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + f(\nabla_r \cdot \vec{v} + \nabla_v \cdot \vec{a}) + \vec{v} \cdot \nabla_r f + \vec{a} \cdot \nabla_v f = 0$$

De term tussen haken is bekend uit de hamiltoniaanse mechanika, wanneer de koördinaten naar "nette" gegeneraliseerde koördinaten zijn dan geldt immers, wanneer H de hamiltoniaan van het systeem is, dat

$$\dot{r}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial r_i}, \text{ zodat}$$

$$\nabla_r \cdot \vec{v} = \sum_i \frac{\partial}{\partial r_i} \cdot \dot{r}_i = \sum_i \frac{\partial^2 H}{\partial r_i\, \partial p_i} \text{ en } \vec{\nabla}_v \cdot \vec{a} = \sum_i \frac{\partial}{\partial p_i} \dot{p}_i =$$

$$-\sum_i \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial r_i}, \text{ waaruit volgt dat } \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\ } \cdot \nabla_r f + \vec{a} \cdot \nabla f = 0.$$

De continuïteitsvergelijking geldt wanneer er tenminste geen deeltjes weggaan uit een meebewegend volume elementje, m.a.w. er zijn geen plotselinge plaats- of snelheidsveranderingen er zijn dus geen "bronnen" of "putten" van deeltjes.
Ga zelf na of daar in de sterrekunde aan voldaan is, bij welke sterren en wanneer.

pag.50,r.11 Tussen atomen en molekulen spelen krachten die evenredig zijn met $r^{-\alpha}$, waarbij α veel groter is dan 2. Het aantal deeltjes op afstand r neemt toe met r^2 (althans in een homogene verdeling), zodat bij dit soort krachten toch in de invloed van de dichtstbijzijnde deeltjes ("botsingen") verreweg overheerst. In een plasma en bij gravitatiewisseling is de kracht evenredig met r^{-2}, zodat de invloed van dichtstbijliggende en verwegliggende deeltjes even groot is. Vanaf een bepaalde afstand r_1 zitten in een bolschil met straal $r > r_1$ en dikte dr_1 zoveel deeltjes dat de invloed van 1 deeltje afzonderlijk erg klein is, zodat fluctuaties nauwelijks invloed hebben op de door de bolschil uitgeoefende kracht. Dit zijn ideale omstandigheden voor het optreden van dynamische evenwichten. Immers, schakel je de botsingen, de dichtbijliggende deeltjes even uit, dan voelt het deeltje dat we beschouwen alleen die gemiddelde kracht. Je kunt het ook als volgt formuleren: je beschouwt alle overige deeltjes als een uitgesmeerd "deel", waar het beschouwde deeltje mee "botst. Er is dan uiteraard vrijwel geen energieuitwisseling (denk aan de botsing tussen een vlieg en een muur) en er geldt behoud van impulsmoment voor het ene deeltje. Het deeltje zal door die "zee" een baan beschrijven; is die baan periodiek, en vinden we voor elk ander deeltje ook steeds een periodieke baan, dan hebben we echt dynamisch evenwicht.

p.51 r.19 :..is: nl de kinetische energie $\overline{1/2\ mv^2}$ en de potentiële energie $-\overline{\frac{GmM}{r}}$

r.25 :...relaxatietijd T, ofwel de tijd nodig om na een verstoring weer statistisch evenwicht te bereiken.

r.26 :interactie in plaats van botsingen

p.53 r.6 4×10^6j 50×10^6j 10^{10}j

r.7 10^7j 10^8-10^9 j 10^{11}j

na r.11 relaxatietijd ? ~ 10^6-10^7j 10^{10}j

r.23 Van relaxatietijd is eigenlijk geen sprake (waarom niet?)

r.39 10^4j in plaats van 10^3j

p.54 r.38 Geen RR Lyrae veranderlijken, de groep is nog niet "oud" genoeg, maar er is wèl een Herzsprung gat (zie fig.55,56)

p.55 r.15 Immers de schijnbare diameter is niet zo erg afhankelijk van de schijnbare helderheid van de sterren. Daarentegen wordt door de interstellaire verstrooiïng en absorptie de schijnbare magnitude en daarmee de afstand, aanzienlijk vergroot.

r.29 Tabel:

R in kpc	N	ρ(kpc^{-3})
0 - 2	3	$8,3 \times 10^{-2}$
2 - 4	8	$3,5 \times 10^{-2}$
4 - 6	15	$2,4 \times 10^{-2}$
6 - 8	13	$8,7 \times 10^{-3}$
8 - 10	6	$2,9 \times 10^{-3}$
10 - 14	10	$1,4 \times 10^{-3}$
14 - 18	8	$6,2 \times 10^{-4}$
18 - 22	5	$2,5 \times 10^{-4}$
22 - 30	2	$2,9 \times 10^{-5}$
30 - 40	2	$1,3 \times 10^{-5}$
> 40	3	$< 10^{-6}$

p.V.57 r.7 10^{10} jaar in plaats van 6×10^9 jaar

58 r.20 "...zwakker dan Sirius" i.p.v. "..dan de zon".

59 r.16 fig.12 i.p.v. fig 9 en 10

r.18 ..asymptotisch naar 0 in dichtheid afnemend

r.25 (bijna een grote cirkel)

V.60 r.35 1-10 km/s

61 r.32 Ook op grond van gelijke radiële snelheden worden deze sterren wel geselecteerd (waarom?)

p.V.62 r.2 π in " $= 4{,}74 . \dfrac{\mu \left["/a \right] \cot \alpha}{v_r \text{ (km/s)}}$

65 r.26 met $M = m + 5 - 5 \log r - E(r)$

p.V 71 3e opmerking:

- We kunnen nu naar dynamische evenwichten zoeken, door de Vlasov vergelijking en de Poisson vergelijking op te lossen.

Nemen we cylinder symmetrie aan dan wordt in cylinder koördinaten de Vlasov vergelijking:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \pi \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} + Z \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial \pi}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial \pi} + \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\partial Z}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial Z} = 0$$

waarbij (r, ϑ, z) de plaats koördinaten zijn, en (π, θ, Z) de snelheidskoördinaten. Wanneer de gladde potentiaal gegeven wordt door φ, dan is verder (bewijs dit zelf):

$$\ddot{r} = \frac{\theta^2}{r} - \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} - \frac{\pi \theta}{r} \text{ en } \frac{\partial Z}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Invullen en integreren over de snelheidsruimte $\int d\pi d\theta dZ$ levert dan op

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(\rho < \pi >) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\rho < \theta >) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho < Z >) + \rho \frac{< \pi >}{r} = 0$$

waarbij ρ de dichtheid is, en $< >$ gemiddelden aangeven.

Je kunt ook nog de Vlasov vergelijking met θ en Z vermenigvuldigen en integreren, waarop je nog mooiere vergelijkingen krijgt.

Eis je dan ook nog dat $<\pi> = 0$ en $< Z > = 0$, natuurlijk niet $< \theta > = 0$, dan vind je (in de stationnaire toestand):

$$\frac{\partial}{\partial r}(\rho < \pi^2 >) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho < \pi Z >) + \frac{\rho}{r}(< \pi^2 > - < \theta^2 >) = \rho K_r$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(\rho < \pi\theta >) + \frac{\partial}{\partial z} \rho < \theta Z >) + \frac{2\rho}{r} < \pi\theta > = 0$$

en $\dfrac{\partial}{\partial r} (\rho < \pi Z >) + \dfrac{\partial}{\partial z} (\rho < Z^2 >) + \dfrac{\rho}{r} (< \pi Z > = \rho K_z$

waarbij K_r en K_z resp. zijn $-\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}$ en $-\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}$

Door nu de verschillende grootheden $< \pi^2 >$, $< \pi Z >$, etc. te weten, kan men K_r, K_z en ρ als functie van r, ϑ, en z trachten te bepalen en daaruit de structuur van het melkwegstelsel. In de practijk probeert men liever uitgaande van een bepaalde massaverdeling het verloop van deze grootheden te voorspellen, en ze dan te vergelijken met de waarnemingen. Modellen zijn: puntmassa, homogene bol, homogene afgeplatte bol, niethomogene ellipsoïde. De laatste blijkt nog het beste te voldoen.

4e opmerking:

- Een andere benadering is, om niet uit te gaan van de "gewone" koördinaten ($r, \vartheta, z, \pi, \theta, Z$), maar om te zoeken naar mogelijke invarianten van de banen van de individuele sterren. De sterbaan wordt bepaald door 6 integratie constanten. Vier invarianten zijn onmiddellijk aan te wijzen: het impulsmoment en de totale energie. Zodat de verdelingsfunctie geschreven kan worden als $f(I_x, I_y, I_z, E, X, Y)$, waarbij het onduidelijk is, of X Y invarianten zijn voor een sterbaan of niet. Men zocht al jaren naar de zogenoemde "derde integraal van beweging", maar heeft hem "nog" niet gevonden. Waarschijnlijk bestaat alleen een soort pseudo-integraal, een grootheid die alleen heel langzaam verandert, maar die redelijk goed als invariant te gebruiken is. Men neemt daar dan wel voor de Z op het moment dat de ster zo dicht mogelijk bij het melkwegcentrum door het melkwegvlak gaat. Ook uit deze keuze blijkt al, dat men probeert de beweging $\perp$ het melkwegvlak los te maken van de beweging in het vlak. Hieronder zullen we dat ook gebruiken.

Men probeert dan van de bovengenoemde drie vergelijkingen oplossingen te vinden door als model een dunne vlakke schijf te nemen, die roteert en waar wel $< \pi > \neq 0$ mag voorkomen, zij het alleen als oscillatie. Voor een gegeven rotatiekromme wordt dan de eigentrilling gezocht. Men kijkt of er een spiraalvormig gravitatieveld is, dat een bepaalde rotatiesnelheid heeft, en dat zó werkt dat dichtheidsverdeling zich zó vervormt dat weer een spiraalvormig gravitatieveld ontstaat. Ze vinden dan a) dat soort spiraaloplossingen bestaat voor de meeste rotatiekrommen en massaverdelingen

b) volgende spiraalarmen hebben de voorkeur

c) de golven draaien met een rotatiesnelheid Ω_1 voor de gebieden met een afstand tot het melkwegcentrum r waarvoor geldt

$$\Omega - \frac{k}{m} < \Omega_p < \Omega + \frac{k}{m}.$$

waar Ω (r) de rotatiesnelheid op afstand r is, k(r) de epicykel frequentie (zie onder) en m het aantal armen.

d) de golven voldoen aan een dispersievergelijking, (zie fig.A 1) waarin λ de radiële golflengte is, $\lambda_* = 4\pi^2 G\tau_*/k^2$, τ_* = de geprojekteerde dichtheid in het vlak en $\nu = m/\Omega - \Omega_p/k$. ν is dus de frequentie waarmee de sterren het spiraalpatroon tegenkomen, in eenheden van de epicykel frequentie.

Het is nodig nog even bij de genoemde epicykelfrequentie stil te staan. Beschouw een ster op afstand R_0, met bijbehorende rotatiesnelheid θ_0 van het LSR, terwijl deze ster kleine afwijkingen in de snelheid heeft t.o.v. de beweging van het LSR. Je kunt dan laten zien (doe dat zelf) dat de ster in radiële èn in tangentiële richting oscilleert in het LSR en wel zó dat in dat LSR systeem de ster een ellips beschrijft met frequentie $k = 2\sqrt{-B\ (A-B)}$, waarbij A en B de Oortse konstanten zijn (zie fig.A 2). De radiële halve as van de baan lengte v/k, waarbij v de radiële snelheidsafwijking is, en de tangentiële as is $\theta_0/-2B$. De spiraalarmen strekken zich dan voornamelijk uit van het punt waarbij sterren resp.1 voor dan wel 1 epicykel achter lopen bij de spiraal rotatie ;   dit zijn de twee Lindblad resonanties. De ene ligt bij ongeveer 4 kpc, de andere voorbij 10 kpc. Voorlopig is een eerste aanzet tot de interpretatie gegeven die positief lijkt. Maar een aantal problemen is nog onopgelost: de eigentrilling kan bestaan, maar wat is de aanzet? Mogelijk een uitbarsting in het centrum. Balkspiralen kunnen mogelijk met een goede massaverdeling worden aangepakt. Bij numerieke berekeningen aan veel deeltjessystemen blijken ook nog grote problemen op te komen zoals: te weinig energieverlies bij de langzame gravitationele kontractie, d.w.z. de "thermische" beweging van de sterren blijft te hoog.

p.V.78 toevoegen aan punt 13:

- in de afgelopen jaren zijn duidelijke bewijzen bevonden voor een explosie in het melkwegcentrum, zo'n 10^7 jaar geleden. Dit is van het grootste belang in verband met de explosies die op veel grotere schaal in sommige andere sterstelsels hebben plaats gevonden.