TENSOREN

In een gekromde ruimte kunnen we een infinitesimale afstand toch altijd schrijven als in een plat vlak en wel geldt in een algemeen relativistische wereld een analoog begrip voor afstand als in de speciale relativiteitstheorie:

$$ds^2 = dx_o^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 \qquad (1)$$

(waarbij $x_o = t$, $dx_1 = \frac{1}{c} dx$, $dx_2 = \frac{1}{c} dy$, $dx_3 = \frac{1}{c} dz$ te denken is).

In een vlakke ruimte kun je zo'n afstandsfunktie ook meteen over een eindige afstand invoeren en niet alleen voor infinitesimale afstandjes.

Wel kun je in een gekromde n dimensionale ruimte koördinaten invoeren (x_1 ------ x_4). Stel je dat maar voor op een golvend oppervlak, waar iemand rekbaar millimeterpapier op heeft geplakt. Maar dan geldt voor de afstandsfunktie:

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j \quad \text{(waarbij we sommeren over de i en de j)} \qquad (2)$$

Gaan we nu over op een ander koördinatenstelsel (iemand anders plakt nu het mm papier): $'x^1$ ------ $'x^4$, dan transformeren de dx^i als:

$$d'x^i = \frac{\partial' x^i}{\partial x^j}\, dx^j \quad \text{(sommeer over de j!)} \qquad (3)$$

Is nu in elk punt van die ruimte een groepje van vier koördinaten gedefinieerd als funktie van de x^i dan noemen we het een <u>kontravariante</u> vektor wanneer die koördinaten A^i transformeren bij koördinatentransformatie naar de $'x^i$ als

$a_i \vec{e}_i$

$$'A^i = \frac{\partial' x^i}{\partial x^j}\, A^j \qquad (4)$$

en zetten we de index boven. Hebben we echter een stel koördinaten gedefinieerd in elk punt B_i die transformeren volgens

$$B'_i = \frac{\partial x^j}{\partial' x^i}\, B_j \quad \text{(merk op dat } \frac{\partial x^j}{\partial' x^i} = \frac{\partial' x^i}{\partial x^j}^{-1} \text{ !)} \qquad (5)$$

dan heten de B_i de komponenten van een <u>kovariante</u> vektor. Ze transformeren net als de $\frac{\partial}{\partial x^i}$. Immers, die worden

$a_i \vec{e}_i$

$$\frac{\partial}{\partial' x^i} = \frac{\partial x^j}{\partial' x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial x^j}. \qquad (6)$$

Het produkt van een kovariante en een kontravariante vektor:

$A^i B_i$ (gesommeerd over i) vormt een <u>scalar</u> φ ; deze blijft invariant onder de koördinatentransformaties:

$$B_i{}' A'^i = \frac{\partial x^\alpha}{\partial' x^i} \cdot \frac{\partial' x^i}{\partial x^\beta} B_\alpha A^\beta = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} B_\alpha A^\beta = B_\alpha A^\alpha = \varphi \qquad (7)$$

En de afgeleide van een scalar: $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ vormt weer een kovariante vektor (laat dat zelf maar zien).

Neem nu een grootheid met 4^n koördinaten die je steeds in groepjes van 4 kunt pakken en dus van n indices kunt voorzien waarbij elke index loopt van 1 - 4 . Wanneer nu bij een koördinatentransformatie de komponenten bij één index steeds kovariant dan wel kontravariant veranderen, dan heet zo'n ding een tensor (van rang n).

Voorbeeld: n = 2 ; $C^i{}_j$ transformeert dan:

$$'C^i{}_j = \frac{\partial' x^i}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial x^\beta}{\partial' x^j} \cdot C^\alpha{}_\beta \qquad (8)$$

α transformeert kontravariant, β kovariant. Je kunt nu eindeloos zelf tensoren maken. Tensoren van dezelfde vorm, dus evenveel kovariante en evenveel kontravariante indices mag je bij elkaar optellen en aftrekken. Is $A^i{}_j$ een tensor en $B^k{}_{\ell m}$ ook, dan is $A^i{}_j B^k{}_{\ell m}$ óók weer een tensor (laat dat zien).

Maak je een kovariante en een kontravariante index aan elkaar gelijk (en dus sommeren!) dan heet dat <u>kontraktie</u> en krijg je weer een tensor: bijvoorbeeld

$$A^{ij}{}_{ki\ell} = B^j{}_{k\ell} \text{ en is weer een tensor.} \qquad (9)$$

Nu is meteen duidelijk dat de g_{ij} in (2) een kovariante tensor is, immers:

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j = g_{ij} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial' x^\alpha} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial' x^\beta} \cdot d'x^\alpha\, d'x^\beta \qquad (10)$$

zodat

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^i}{\partial' x^\alpha} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial' x^\beta} g_{ij} \quad \text{(dus dubbel kovariant).}$$

Maak je nu van g_{ij} (die je kunt schrijven als een matrix) de inverse, dan geven we die aan door g^{ij} (we weten nog niet of het een kontravariante tensor is) en er geldt:

$$g_{\mu\alpha}\, g^{\mu\beta} = \delta^\beta{}_\alpha = 1 \text{ als } \alpha = \beta, \; 0 \text{ als } \alpha \neq \beta .$$

Zij nu $p_\mu = g_{\mu\alpha}\, dx^\alpha$ (een kovariante vektor!), vemenigvuldig met $g^{\mu\beta}$:

$$g^{\mu\beta}\, p_\mu = g^{\mu\beta}\, g_{\mu\alpha}\, dx^\alpha = \delta^\beta{}_\alpha\, dx^\alpha = dx^\beta$$

is een vektor, maar dat kan alleen wanneer $g^{\mu\beta}$ een tensor is (Qed!)
Je kunt nu van een kovariante vektor A_i een kontravariante vektor maken door vermenigvuldiging met g^{ij} ; het resultaat geven we dan aan door A^j :

$$g^{ij} A_i = A^j \text{ een kontravariante vektor.}$$

En ook $g_{ij} B^i = B_j$. Dit heet het "op en neer halen" van de indices.
Van de Riemanntensor $R^\sigma{}_{\lambda\mu\nu}$ maak je eerst een tensor van rang 2 door kontraktie: $R^\sigma{}_{\lambda\mu\sigma} = R_{\lambda\mu}$, daarna haal je λ omhoog:

$$R^\lambda{}_\mu = g^{\lambda\sigma} R_{\sigma\mu} \text{ , en dat kontraheer je weer tot } R^\lambda{}_\lambda = R \text{ .}$$