

# **ASTROFYSICA**

docentenhandleiding

DIRECTIE HER- EN BIJSCHOLING DOCENTEN  
van het Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen in samenwerking met  
de Commissie Modernisering Leerplan Natuurkunde

1975

Auteursrechten voorbehouden

## INHOUD

### Inleiding

- Algemene doelstellingen; beschikbare middelen en tijd; voorkennis; inhoud van de keuzegroep; didactische uitgangspunten 4
- Hoe het materiaal te gebruiken 6
- Literatuur 8

### Hoofdstuk 1

- Doelstellingen en gezichtspunten; voorkennis; didactische opmerkingen; beschikbare tijd; achtergrondinformatie; opmerkingen per paragraaf 10
- Antwoorden 11

### Hoofdstuk 2

- Doelstellingen en gezichtspunten; voorkennis; algemene opmerkingen; beschikbare tijd; opmerkingen per paragraaf 12
- Antwoorden 15
- Achtergronden (theorie van het stralingstransport) 18

### Hoofdstuk 3

- Doelstellingen en gezichtspunten; voorkennis; beschikbare tijd; Opmerkingen per paragraaf 23
- Antwoorden 26
- Achtergronden:
  - Waterstof en de Pickeringseries 28
  - Wetten van Boltzmann en Saha; resonantieversstrooiing 29

#### Hoofdstuk 4

- Doelstellingen en gezichtspunten	31
- Voorkennis; beschikbare tijd; algemene opmerkingen; opmerkingen per paragraaf	32
- Antwoorden	35
- Suggesties bij een vrijere behandeling	38

#### Hoofdstuk 5

- Doelstellingen en gezichtspunten	41
- Wijze van behandelen, voorkennis, benodigde tijd, literatuur	42
- Opmerkingen per paragraaf	42
- Antwoorden	47
- Achtergronden:	
Energie uit gravitatie; de centrale temperatuur van de zon	50
Kernfusiereacties	51
Energietransport	54
Ontaarde materie	57
Gravitatie	59

#### Appendix

- 2.7A	62
- 3.1A	63
- 3.6A1; 3.6A2	64
- 4.1A1; 4.1A2; 4.5A	66
- 4.6A	67
- 4.3.2A	71

## VOORWOORD

De leerlingentekst "Astrofysica" is na een tweetal experimenten tot stand gekomen. Hoe de tekst gegroeid is uit bijdragen van verschillende leraren en uit ervaringen tijdens de experimenten hebben wij uiteengezet in het voorwoord tot die tekst.

Tijdens de experimenten is duidelijk gebleken dat leraren zonder opleiding in de astrofysica veel behoefte hebben aan een docentenhandleiding. In dit ontwerp vindt u in de inleiding algemene gegevens over de opzet van de keuzegroep "Astrofysica" en over de manieren waarop het materiaal gebruikt kan worden. Vervolgens geeft deze handleiding voor elk hoofdstuk uit de tekst: doelstellingen, fysische en astrofysische achtergrondinformatie, didactische suggesties en antwoorden op de vragen in de leerlingentekst.

Deze voorlopige handleiding is samengesteld om eerst te dienen bij de bijscholingscursussen en vervolgens bij het onderwijs zelf.

Hoewel gebruik gemaakt is van ervaringen tijdens de experimenten kon deze versie nog niet aan de praktijk getoetst worden. De samenstellers zien daarom opmerkingen en suggesties tot verbeteringen gaarne tegemoet.

J. van der Rijst

C. Zwaan



## I INLEIDING

### I1 Algemene doelstellingen bij de keuzegroep "Astrofysica"

De keuzegroep Astrofysica beoogt:

- de leerlingen vrij diepgaand met methoden en inzichten in een deelgebied van de natuurwetenschappen, de sterrekunde, te laten kennismaken; daarbij wordt gebruik gemaakt van inzicht en kennis die reeds verworven zijn in de natuur- en wiskunde. Tevens wordt bereikt dat de leerlingen meer inzicht in het sterrekundige wereldbeeld krijgen en hun natuurkundige kennis verbreden en verdiepen.
- inzicht te geven hoe de natuurkunde functioneert in een andere natuurwetenschap, i.c. de sterrekunde. Omgekeerd is het natuurkundige denken ook gestimuleerd door de astrofysica, voorbeelden: energievrijmaking in sterren → kernfusie; witte dwergen → ontaarde materie. De achtergrond is dat men in astrofysische objecten extreme omstandigheden van temperatuur en druk aantreft die in laboratoria niet of zeer moeilijk te realiseren zijn.

Afhankelijk van de wijze van behandelen kan in verschillende mate inhoud gegeven worden aan:

- leerlingen vertrouwd te maken met een nieuw veld van kennis door zelfwerkzaamheid, zelfstudie en door het werken in groepen.

### I2 Beschikbare middelen en tijd; voorkennis

Ter beschikking staan: de tekst voor leerlingen, deze handleiding en verwijzingen naar literatuur.

Voor de behandeling van de keuzegroep dienen 15 leseenheden ("lessen") te worden uitgetrokken, eventueel te vermeerderen met uren die de docent gebruiken wil om met deze keuzegroep samenhangende doch reeds behandelde natuurkunde op te halen.

De leerlingen hoeven slechts een beperkte globale sterrekundige voorkennis te bezitten: zij dienen het onderscheid tussen planeten en sterren te kennen en een globaal ruimtelijk beeld te bezitten van het planetenstelsel en het melkwegstelsel. Het hoofdstukje "het heelal", omschreven in het Rapport 1974 deel VI V.W.O. van de Commissie Modernisering Leerplan Natuurkunde, is daartoe ruimschoots voldoende. Deze handleiding geeft per hoofdstuk aan welke natuurkundige en sterrekundige voorkennis ondersteld wordt.

### I3 De inhoud van de keuzegroep en enkele didactische uitgangspunten

Hieronder zijn de hoofdstukken beknopt samengevat:

1. Verkenning van het waarnemingsmateriaal:

Wat astrofysica is;

Elektromagnetisch spectrum; beperkte doorlaatbaarheid van de aardse dampkring: optisch venster, radiovenster, ruimte-onderzoek.

Kwalitatieve beschrijving van spectra van sterren, planeten en gas-niveaus.

2. Thermische straling: Temperatuurbepalingen uit continue spectra van zon en sterren.

Natuurkunde: wetten van Kirchhoff, Planck, Wien (verschuivingswet), Stefan en Boltzmann; toepassingen op ondoorzichtige oppervlakken en op gassen.

Stralingskromme en randverzwakking bij de zon, interpretatie door een met de diepte toenemende temperatuur. Temperatuurbepaling bij sterren.

3. Lijnen en continua in spectra van sterren: Interpretatie van spectrale lijnen en seriegrenscontinua.

Natuurkunde: atoomstructuur, Balmerformule, emissie en absorptie van straling: lijnen en continua, wetten van Boltzmann en van Saha, iets over overgangswaarschijnlijkheden.

Seriegrenscontinua en absorptielijnen in sterspectra als gevolg van golflengte-afhankelijke absorptie en diepte-afhankelijke temperatuur. Chemische samenstelling van zon en sterren.

4. Classificatie van sterren naar spectrum, lichtsterkte en massa: Beschrijving van de spectrale reeks, verklaring als temperatuurreeks m.b.v. kennis opgebouwd in 2 en 3. In het Hertzsprung-Russell-diagram (totale "lichtsterkte" tegen temperatuur) blijken de sterren in bepaalde stroken te vallen: reuzen, dwergen en witte dwergen. Berekening van sterdiameters. Bepaling van massa's van componenten van dubbelsterren; massa-lichtsterkte relatie.

5. Inwendige structuur en evolutie van sterren: Energievrijmaking in sterren door samentrekking en door kernfusie. Inwendige structuur van sterren: vier differentiaalvergelijkingen (waarvan er drie worden afgeleid), globale aanduiding van oplossing, bespreking van resultaten aan één voorbeeld (zon).

Evolutie van sterren door veranderingen in chemische samenstelling ten gevolge van kernfusie. Evolutiesporen in het Hertzsprung-Russell-diagram, met verklaring van het optreden van dwergen, reuzen en witte dwergen. Leeftijden van sterren. De laatste evolutiefasen (planetaire niveaus, supernovae, witte dwergen, neutronensterren en "zwarte gaten").

Verband tussen de structuur van het melkwegstelsel en de evolutie van sterren.

Bij de keuze van het materiaal is sterk de nadruk gelegd op het verwerven van inzicht. Wij hebben getracht het feitenmateriaal beperkt te houden. Veel aandacht is geschonken aan de methoden waarop in de astrofysica inzicht wordt verkregen. Globaal zijn er drie:

1. Interpretatie van spectrale waarnemingsgegevens met behulp van fysische wetten. De grondslagen van spectroscopische diagnostiek worden gelegd in de hoofdstukken 2 en 3; verdere toepassingen volgen in hoofdstuk 4.
2. Het ordenen van een zeer omvangrijk waarnemingsmateriaal: classificatie en het vaststellen van empirische relaties (hoofdstuk 4).
3. Het ontwerpen en doorrekenen van theoretische modellen die de empirische resultaten kunnen verklaren (hoofdstuk 5).

Op verschillende plaatsen leggen wij er de nadruk op dat nieuwe inzichten ook weer nieuwe vragen oproepen. Wij wijzen ook vragen aan die op dit moment nog open zijn. Op deze wijze kunnen wij laten zien dat een natuurwetenschap een historisch en dynamisch bedrijf is dat niet is afgesloten. In enkele voorbeelden laten wij daarom ook zien hoe bepaalde inzichten zich historisch hebben ontwikkeld.

In de tekst voor leerlingen wordt een globale inventarisatie van de methoden en de historische dynamiek door het stellen van nieuwe vragen in de laatste paragraaf 5.8. aangegeven.

Uit de leerlingentekst is geweerd wat in het kader van de doelstellingen gemist kan worden. Zo zullen astronomen de magnitudeschalen van de helderheden van sterren missen. Over de vrij-vrijemissie en absorptie, hoewel uiterst belangrijk voor de straling in het infrarood en in het radiospectrum, wordt niet gerept. Overigens hebben wij getracht "eerlijk te blijven" door de moeilijker doch noodzakelijke fysische begrippen, didactisch op de inzichtelijke kern te herleiden maar dan ook resoluut aan te pakken (voorbeelden zijn te vinden bij de stralingswetten voor gassen in hoofdstuk 2 en bij de differentiaalvergelijking van sterinwendige in hoofdstuk 5). Aangezien de leerlingen over een beperkt wiskundig apparaat beschikken, moet de behandeling van veel onderdelen aan de kwalitatieve kant blijven, doch dit staat "inzichtelijk leren" allerm minst in de weg!

#### I4 Hoe het materiaal te gebruiken en te examineren?

De leerlingentekst, met alle paragrafen in de Appendix en alle vragen, is te uitgebreid om in 15 lessen geheel te behandelen. Aan de individuele leraren wordt het overgelaten een keuze te doen uit twee alternatieven:

A) een betrekkelijk strakke behandeling van alle hoofdstukken 1 t/m 5 met



weglating van een deel van de vragen, en zonder de paragrafen uit de Appendix. Bij deze variant ligt de nadruk op de behandeling van de brede inhoud. De ruimte voor zelfwerkzaamheid van de leerlingen is dan echter beperkt.

Wil de docent de keuzegroep tevens gebruiken om de leerlingen verder te trainen in zelfstudie dan kan hij kiezen:

B) Een bredere en diepere behandeling van de hoofdstukken 1 t/m 4, waarbij meer vragen en een aantal paragrafen uit de Appendix meegenomen worden. Daarbij zal hoofdstuk 5 wel moeten vervallen.

Ook bij variant B adviseren wij om de hoofdstukken 1 t/m 3 betrekkelijk strak en snel te behandelen, zonder aan "inzichtelijk leren" te kort te doen. Met de dan verworven kennis kunnen de leerlingen zelf aan het werk met hoofdstuk 4 en met paragrafen uit de Appendix. Concrete suggesties geven wij verderop in deze handleiding bij de bespreking van hoofdstuk 4.

Bij de keuze van variant B is het wel gewenst dat het in § 5.8. gegeven overzicht van methoden en verdergrijpende vragen in aangepaste vorm met de leerlingen doorgenomen wordt. Als voorbeeld van een theoretisch model kan hier het in § 2.5.a gegeven "drie-lagen-model" gebruikt worden.

De vragen die met een letter T achter het nummer worden aangeduid zijn "tekstvervangende" vragen die niet zonder meer kunnen worden overgeslagen. De overige vragen dienen òf ter herhaling, als inleiding op nieuwe stof òf ter toetsing en verdieping van inzicht. Uit deze vragen kan de leraar een keuze maken.

De paragrafen die in de Appendix zijn opgenomen geven:

- aanvullende en verdiepende stof, die vooral van belang is bij de keuze van variant B;
- enige historische achtergronden (de "leesstof" in §§ 3.1.A, 4.1.A);
- extra materiaal waarmee individuele leerlingen op eigen houtje kunnen werken.

Teneinde verschillende wijzen van gebruik van het materiaal aan te moedigen heeft de Begeleidingscommissie Experiment Astrofysica van de CMLN aanbevolen dit keuzeonderwerp uitsluitend in het schoolonderzoek te examineren.

### Enkele algemene opmerkingen:

Bij de experimenten is gebleken dat één leseenheden per week niet efficiënt werkt, waarschijnlijk zijn twee leseenheden per week het meest geschikt, zeker tijdens de behandeling van de hoofdstukken 1 t/m 3.

De belangrijkste formules en wetten uit deze hoofdstukken dienen niet uit het hoofd geleerd te worden. In het tabellenboekje (uitgave 1975) zijn zij dan ook samen met andere gegevens uit de sterrekunde opgenomen.

### I5 Literatuur

Hoewel er veel boeken bestaan over sterrekunde en astrofysica, loopt geen enkel boek parallel aan het in deze keuzegroep aangeboden materiaal. Hieronder volgen enkele titels, met korte karakteristieken.

1. P.J. Gathier: Sterrenkunde (Wolters-Noordhoff, Groningen 1972).  
Een eenvoudig boek destijds geschreven voor de lessen "Cosmografie" in de HBS-B. Het geeft ruimschoots de sterrekundige kennis vóórondersteld bij deze keuzegroep.
2. A.J.M. Wanders: Beknopte Sterrekunde (Wolters-Noordhoff, Groningen 1971).  
Dit eveneens voor de HBS-B geschreven boek is uitgebreider dan het boek van Gathier en van iets hoger niveau. Leerlingen kunnen in dit boek wat "om de tekst heen lezen" op een voor hen prettig niveau.
3. C. de Jager (redacteur): Sterrenkunde (Wetenschappelijke Uitgeverij, Amsterdam 1969).  
Daaruit in het bijzonder:
  - deel 2, hoofdstuk II: C. Zwaan en M. Kuperus: De Zon;
  - deel 3, G.B. van Albada: De zichtbare buitenkant van de sterren, het onzichtbare binnenste, de "levensloop" van sterren.De serie van vier delen geeft een overzicht van de astronomie naar de stand in 1969. Het geeft achtergrondfeiten op v.w.o.-niveau; grote gedeelten kan de leerling zonder moeite verwerken.
4. A. Unsöld: Der neue Kosmos (Springer-Verlag, Berlin, 1967).  
Ook in het Engels vertaald. Belangrijk als achtergrondinformatie voor docenten doch voor de meeste leerlingen op een iets te hoog fysisch niveau.
5. C. de Jager en E.P.J. van den Heuvel: Ontstaan en levensloop van sterren (2e druk, Thieme, Zutphen, 1972).  
Geeft een rijkdom van feiten bij hoofdstuk 5 van onze keuzegroep. Geïnteresseerde leerlingen kunnen hier hun hart ophalen!

6. Platenboeken, twee voorbeelden:

H. Haffner: Das Weltall im Bild (Verlag Styria, Graz-Wien-Köln);  
Br. Ernst en Tj.E. de Vries: Atlas van het Heelal (Winkler-Prins, Amsterdam, Brussel, Elsevier).

7. Tijdschriften:

Leerlingen kunnen artikelen over recente astrofysische ontwikkelingen vinden in:

Hemel en Dampkring, nu: Zenit; Stichting "De Koepel", Utrecht;  
Natuur en Techniek; Op de Thermen, Maastricht;  
wat moeilijker: Scientific American (verkrijgbaar aan de kiosk).

8. Begeleidingscommissie:

Verslag van het tweede Experiment Astrofysica, 1972/1973 (Commissie Modernisering Leerplan Natuurkunde).

Dit rapport geeft onder meer aan op welke overwegingen de huidige tekst voor leerlingen en de docentenhandleiding tot stand is gekomen.

Doelstelling en gezichtspunten:

Dit hoofdstuk beoogt de leerlingen bij te brengen:

- wat astrofysica is en hoe de astrofysicus werkt;
- spectra vormen het belangrijkste waarnemingsmateriaal;
- de aardse dampkring legt beperkingen op;
- enige fenomenologische kennis over spectra van zon en sterren, van de planeten en van emissielevels.

Voorkennis, die tijdens 1 kan worden opgehaald:

- globaal ruimtelijk overzicht van planetenstelsel en melkwegstelsel
- kwalitatieve kennis over:
  - a) het ontwerpen van spectra met behulp van roosters en prisma's;
  - b) het elektromagnetische spectrum.

Didactische opmerkingen:

Dit hoofdstuk bevat vrij veel informatie doch geen moeilijke begrippen. Het kan door de leerlingen thuis bestudeerd worden; gerezen problemen en antwoorden op vragen kunnen daarna besproken worden (bijvoorbeeld in klassegerek).

Het gevaar dreigt dat de docent door vragen van leerlingen teveel uitweidt over wat nog volgt, of op zijsporen wordt geleid. Verwijs leerlingen met specifieke belangstelling naar geschikte literatuur.

Beschikbare tijd:

Ongeveer één lesuur, plus tijd die u wenst te besteden aan herhaling van kernleerstof.

Achtergrondinformatie, aanvullende vragen, opmerkingen bij:

1.1.

Leerlingen zijn geneigd om ruimtelijke verdeling van sterren (zowel sterrenbeelden, als planetenstelsel, melkwegstelsel) als object van "echte" sterrekunde te beschouwen!

1.2.

Achtergrondinformatie:Waarnemingsmethoden en -instrumenten:

- Der neue Kosmos    Unsöld    I Teil § 9
- Sterrenkunde        De Jager e.a.    Deel I

Besproken wordt de reflector (hoofdstuk II 3), de refractor (II 3), de spectrograaf (II 9, IV 2,3), de radiotelescoop (III 1,3), foto-elektrische en thermo-elektrische waarnemingsmethoden (II 4), de intensograaf of microfotometer (registrogram) (II 9,3).

1.3.

Alleen de hoofdzaken dienen gememoriseerd te worden, termen als ionosfeer, golflengtegrenzen van vensters e.d. mogen vergeten worden.

Achtergrondinformatie:

Structuur van de aardse dampkring:

- Sterrenkunde                      Gathier                      blz. 17 t/m 23
- Beknopte sterrekunde              Wanders                      blz. 34 t/m 36

Absorptie door de aardse dampkring:

- Ruimtevaart en wetenschap        (Aula 352)                      blz. 57
- Ruimteonderzoek                      De Graaf (Ratio reeks)        blz. 16, 17

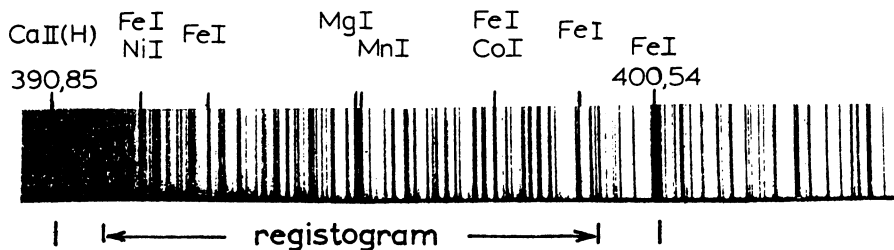
Voor geïnteresseerde leerlingen, bijv. in een klasgesprek een extra vraagstuk:

De aardse dampkring veroorzaakt een aantal absorptielijnen (wijde banden) in het zichtbare deel van het spectrum ( $O_2, H_2O$ ). Vraag: Bedenk een methode om in het waargenomen spectrum van de zon (ster) de "aardse" lijnen te onderscheiden.

(Antwoord: de aardse lijnen zijn bij lage zonnestand veel sterker dan bij hoge zonnestand).

Antwoorden op vragen:

- 1.a) radiostraling, ..... röntgenstraling
- b) elektromagnetische straling
2. Met een rooster of met een prisma (glas absorbeert een belangrijk deel van de e.m. straling met golflengten  $\lambda < 200 \text{ nm}$ !)
- 3.a) I, II, XIII
- b) alle spectra
- c) XIII
- d) I, II, XIII
- e) VI, IX, X
- 4.



5. radiostraling gaat ongehinderd door bewolking
6. stratosfeer ballonnen, raketten, satellieten
- 7.a) een planeet zendt zelf bijna geen zichtbare straling uit
- b) licht dat wij van een planeet ontvangen is grotendeels gereflecteerde zonnestraling
- c) absorptie door planeetoppervlak of door planeetatmosfeer

## HOOFDSTUK 2

### Doelstellingen en gezichtspunten:

- Kennismaking met stralingswetten en begrip van de samenhang tussen deze wetten, ook bij gassen; bij een steratmosfeer komt straling uit een relatief dunne laag.
- Methode: toepassing van stralingswetten om uit meting van continue straling van zon en sterren temperaturen te bepalen.
- Begrip, dat randverzwakking bij zon wijst op een naar buiten afnemende temperatuur.
- Begrip, dat de afwijkingen die de stralingkromme van de zon t.o.v. de krommen van Planck vertoont het gevolg zijn van 1) een (zonder bewijs gegeven) verloop van de absorptiecoëfficiënt van het zonnegas en 2) de naar buiten afnemende temperatuur.
- Begrip van de bepaling van de effectieve temperatuur van een ster uit de verhouding tussen de vermogens uitgestraald in twee golflengtegebiedjes.
- Notie aanbrengen: temperatuurverval naar buiten is het gevolg van de naar buiten lopende energiestroom.

### Voorkennis:

Bestudering van dit hoofdstuk vergt geen bijzondere voorkennis, doch reeds aanwezige noties omtrent stralingswetten worden dankbaar meegenomen.

### Enkele algemene opmerkingen:

In deze keuzegroep vraagt dit hoofdstuk waarschijnlijk de meeste begripsinspanning en wel bij de stralingswetten voor gassen. De moeilijkheden bij het fysisch inzicht blijken soms pas bij de toepassingen in de astrofysica, in het bijzonder bij het begrijpen en toepassen van het "drie-lagenmodel". Daarom wordt in § 2.1 t/m 2.4 de fysica heel geleidelijk opgebouwd; eerst wordt veel aandacht geschonken aan de thermische straling van ondoorzichtige lichamen.

In dit hoofdstuk te verwerven inzichten worden in hoofdstuk 3 verder toegepast ter verklaring van het optreden van seriegrenscontinua en absorptielijnen in spectra van sterren, hetgeen tot een verdere verdieping zal leiden.

### Beschikbare tijd:

Ca. 3,5 lessen, plus de tijd voor herhaling van de kernleerstof.

### Opmerkingen bij de paragrafen, didactische suggesties:

2.1.

Een inleiding, aansluitend op aanwezige globale kennis en intuïtie. De wet van Kirchhoff wordt hier kwalitatief ingeleid; gebruik voorbeelden om deze wet "aan te praten".

Spoor leerlingen aan een kartonnen doosje met gaatje te maken!

Neem twee identieke (blikken) doosjes met afneembare deksels, boor in elk één klein gaatje. Lak beide aan de buitenkant dof zwart en slechts één ook aan de binnenzijde. Nummer ze. Geef ze nã vraag 12 rond en laat leerlingen proberen aan de "zwarteheid" van de gaatjes te raden welk van de doosjes inwendig zwart is en welk glimmend. Verschil zal niet te zien zijn !  
Toepassing: een (vooral klein) raam zonder vitrage is veel donkerder dan de gevel !)

## 2.2.

Bewust geven wij de formule van Planck: leerlingen mogen het vwo niet verlaten met het denkbeeld dat in de fysica uitsluitend evenredigheden en  $1/r^2$ -wetten gelden. Bovendien dienen leerlingen een formule te leren "lezen" ook als de afleiding niet bekend is. Natuurlijk dient de formule niet gememoriseerd te worden, doch de verschuivingswet van Wien en de wet van Stefan en Boltzmann wel (uiteraard niet de waarden van de factoren). Leerlingen kunnen wel inzien dat de verschuivingswet en de wet van Stefan en Boltzmann resp. door differentiatie naar en integratie over de golflengte uit de wet van Planck volgen, doch die afleidingen zelf liggen op een te hoog niveau.

De verschuivingswet is nuttig om snel vast te stellen waar de top van de kromme van Planck ligt. Wij wijzen erop dat temperatuurbepaling van sterren uitsluitend met behulp van de verschuivingswet (stokpaard in vele populaire boeken) slecht werkt, omdat de continue spectra juist bij de top van de stralingskromme en verder naar kortere golflengten sterk gehavend zijn door absorptielijnen. Onderstreep, dat de Planckfunctie bij golflengten  $\lambda \leq \lambda_{\max}$  veel gevoeliger is voor de temperatuur dan bij langere golflengten (zeer goed in fig. 5 te zien).

## 2.3

De vrij gedetailleerde behandeling van de wet van Kirchhoff voor ondoorzichtige oppervlakken is noodzakelijk om:

- 1° leerlingen grondig met dit eenvoudige geval vertrouwd te maken alvorens met de wat moeilijker toepassing op gassen te beginnen;
- 2° de effectieve temperatuur van de zon af te leiden, waaruit volgt dat de zon een gasbol is.

Om het eerste doel te bereiken is het belangrijk dat leerlingen de vragen 22, 23 en 25 zelf oplossen.

Veel teksten gaan van de vreemde onderstelling uit, dat men eerst moet onderstellen dat "de zon een ideaal zwart lichaam is" alvorens men de effectieve temperatuur kan gaan bepalen. De lezer moet zich dan maar wat bij een "ideaal zwart gas" zien voor te stellen ....

Extra vraag (bijv. voor klasgesprek):

Je hoort soms in een weerbericht: "... tengevolge van de sneeuwlaag treedt sterke nachtelijke afkoeling op". Is het niet vreemd dat de witte sneeuw blijkbaar sterk straalt?

In welk golflengtegebied treedt de uitstraling op? (verschuivingswet van Wien

toepassen). Wat volgt uit het voorgaande voor de absorptiecoëfficiënt van sneeuw (ijs) in dat golflengtegebied? (ijs, water en waterdamp bezitten inderdaad een zeer hoge absorptiecoëfficiënt in ver IR).

2.4.

Bij de definitie van de absorptiecoëfficiënt  $k_\lambda$ : na één meter  $\Delta E_\lambda = -k_\lambda E_\lambda$  hebben wij stilzwijgend aangenomen  $k_\lambda (\text{m}^{-1}) \ll 1$ , hetgeen zeker in steratmosferen geoorloofd is. De preziese definitie luidt:  $dE_\lambda / dl = -k_\lambda E_\lambda$ .

Biedt weerstand aan de verleiding om al in te gaan op de achtergronden van het verloop van  $k_\lambda(t,P)$ , verwijs leerlingen resoluut naar hoofdstuk 3.

De redenering over de toepassing van Kirchhoff (formule (6)) is uit didactische overwegingen aan de globale kant gehouden. Voor een exacte behandeling zouden  $E_\lambda$  en  $B_\lambda$  per eenheid van ruimtehoek (steradiaal) gedefinieerd moeten worden. Deze geometrische complicatie zou onzes inziens het fysisch inzicht te veel in de weg staan (te veel tijd kosten).

Met deze paragraaf willen wij als kennis en inzicht overdragen:

- toepassing van de wet van Kirchhoff: per vol.elem.  $E_\lambda(\lambda) = k_\lambda \cdot B_\lambda$ ;
- het optreden van zelfabsorptie in zeer dikke lagen gas (kwalitatief);
- een zeer dikke laag gas straalt in golflengtegebiedje  $(\lambda, \lambda + d\lambda)$  juist het vermogen gegeven door de wet van Planck  $B_\lambda(T)$  uit, waarbij T de (gemiddelde) temperatuur van de laag is waaruit deze straling afkomstig is (voor leerlingen is dit een bewering zonder bewijs!);
- zeer dikke lagen isotherm gas stralen volgens de wet van Planck ("als een zwart voorwerp").

Deze inzichten dienen als inleiding op het in § 2.5 aan de orde gestelde "drie-lagenmodel".

Voor de exacte afleidingen verwijzen wij de docenten (en misschien een enkele zeer begaafde leerling?) naar "Elementen uit de theorie van het stralingstransport", die verderop in de handleiding bij dit hoofdstuk gegeven worden.

2.5.

Het in het begin van deze paragraaf gegeven "drie-lagenmodel" van een steratmosfeer is fundamenteel voor het begrip van wat er verder in dit en het volgende hoofdstuk gebeurt. Het is daarom van belang, dat leerlingen dit model zo goed mogelijk begrijpen. Begripsmoeilijkheden komen voort uit niet eigen-gemaakte kennis van § 2.4. - breng leerlingen "teruglezen" bij! Accepteer dat minder begaafde of minder gemotiveerde leerlingen (voorlopig) met begripsmoeilijkheden zitten, laat het model "uit het hoofd leren" en houdt hen voor, dat het inzicht geleidelijk groeien zal met de toepassingen tot en met hoofdstuk 3. Het is daarom beter niet lang op de noest te zagen doch in hoofdstuk 3 nog eens op het model terug te komen.

Leerlingen die vraagstuk 29 zelfstandig kunnen oplossen, hebben de voorgaande materie goed begrepen.

In de laatste alinea wordt de naar buiten afvallende temperatuur in verband



gebracht met de voor transport van warmte-energie noodzakelijke temperatuursgradiënt.

2.6.

De helderheidsverhouding in twee golflengtegebiedjes in het spectrum is principieel een zuivere maat voor de effectieve temperatuur van een ster. Het probleem schuilt in de ijking.

Bijkomstige problemen zijn:

- eventuele verschillen in chemische samenstelling tussen sterren, met als belangrijkste effect dat de sterkte van de in de golflengtegebiedjes optredende absorptielijnen kunnen verschillen;
- roodverkleuring van ver verwijderde sterren door verstrooiing aan interstellair stof (zie Appendix 4.6A).

Leidt leerlingen niet af met deze bijkomstigheden. Komen zij zelf met dit soort problemen aandragen, vermeld dan dat men doorgaans in drie of meer kleuren meet om de dubbelzinnigheden bij twee-kleurenfotometrie te onder-  
vangen.

2.7

Deze samenvatting is bewust beperkt tot enkele hoofdlijnen en is niet diepgaand.

Oplossingen van vraagstukken:

9. a,b: de beroete thermometer
10. weinig absorptie van straling (opm.: wel goede straling in IR t.g.v. complexe moleculen)
12. elk invallend lichtbundeltje moet zeer vele reflecties ondergaan, bij elke reflectie is er een verlies door absorptie.
21.  $\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{c_1}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{c_2/kT} - 1} \right) = 0$

uitweiding voor docenten:

dit leidt tot een vergelijking van de vorm

$e^{-\beta} + \frac{\beta}{5} = 1$ , waarin  $\beta = \frac{c_2}{\lambda_t T}$ .  $\lambda_t$  is de golflengte behorend bij de top van de Planckkromme.

De wortel van deze transcendente vergelijking is:

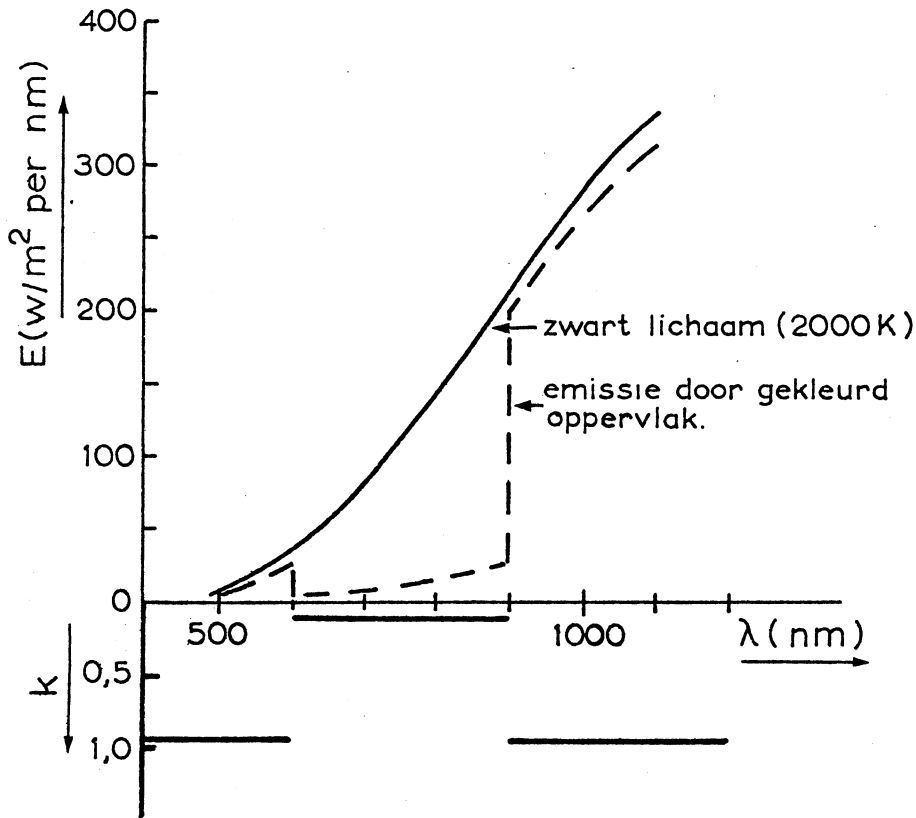
$\beta = 4,9651$  (methode van successieve benadering).

$$\lambda_t T = \frac{c_2}{\beta} = \frac{14,38 \cdot 10^{-3}}{4,9651} = 2,88 \cdot 10^{-3} \text{ m.K.}$$

22. a)  $k_\lambda \equiv 1$

- b)  $k_\lambda = 0$
- c)  $0 \leq k_\lambda \leq 1$
- d) dimensieloos.

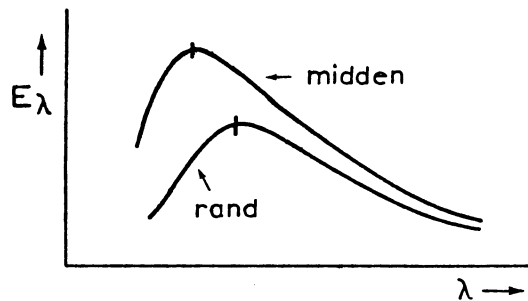
23. oranje-geel en rood licht worden grotendeels gereflecteerd. De waarnemer ziet een diep oranje oppervlak.
24. de door een oppervlak (ter grootte van de oppervlakte-eenheid) geëmitteerde straling is gelijk aan het produkt van de absorptiecoëfficiënt en de waarde van de functie van Planck welke past bij de temperatuur van het oppervlak.
- 25.



opm: het is belangrijk dat leerlingen deze vraag zelf oplossen, eventueel met enige hulp. Een voorgekauwde oplossing heeft vrijwel geen waarde meer!

26. a)  $T_{\text{eff}}$  is kleiner dan de ware temperatuur van het oppervlak  
 b) oppervlakken met  $k_\lambda \equiv 1$  (ideaal zwart oppervlak)
27. a)  $1,39 \cdot 10^3 \cdot 4 \pi R^2$   
 b)  $1,39 \cdot 10^3 R^2/r^2$   
 c)  $\sigma T_{\text{eff}}^4 = 1,39 \cdot 10^3 \left(\frac{R}{r}\right)^2$        $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$   
 d)  $5,80 \cdot 10^3 \text{ K}$
28. a) dimensieloos  
 b) per meter

29. a)



Aan de rand van de zon komt de straling uit minder diepe lagen, dus uit lagen van een lagere temperatuur. Het uitgestraalde vermogen is dan ook kleiner voor alle golflengten.

b,c) Aan de zijde van de korte golflengten zullen de verschillen het grootst zijn, omdat daar de functie van Planck het meest gevoelig is voor de temperatuur.

Opm.: Dit is een vrij moeilijke vraag omdat wij niet uitvoerig hebben stilgestaan bij T gevoeligheid bij wet van Planck. In een klassegereprek: krommen van Planck bij verschillende temperaturen laten vergelijken!

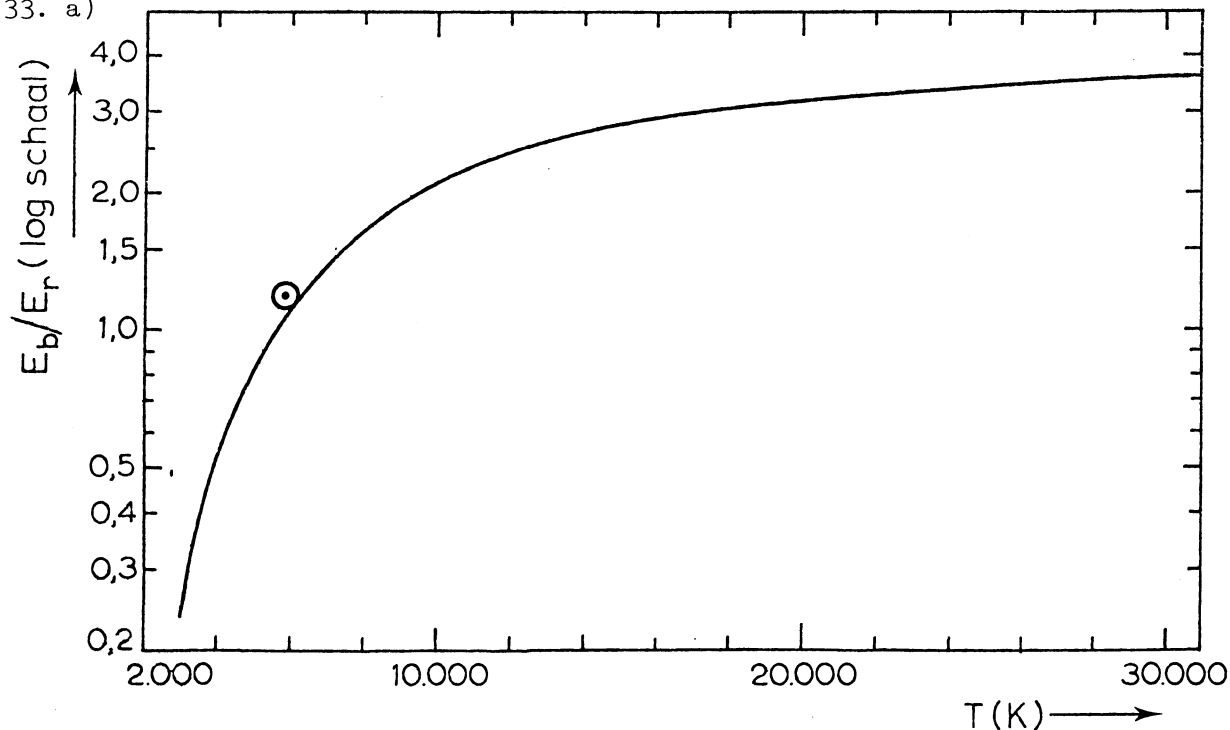
30. a) als leerlingen antwoorden neen, dan is dat goed. Als leerlingen doorvragen: soms lukt het iets van randverzwakking te meten (eclipserende dubbelsterren);

b) afnemen, gevolg van warmtetransport.

31. Totale uitgezonden vermogens gelijk, de op aarde gemeten vermogens verhouden zich voor beide kleuren als  $1 : 3^2$ .

32. c)  $E_b/E_r$  neemt toe met toenemende T.

33. a)



b) De methode is voor lagere temperaturen het gevoeligst.

34b. 6200 K; 400 K (7 %)

35. 2; 4; 1; 3; 5.

Achtergronden; elementen uit de theorie van het stralingstransport

De stralingswetten worden op een elementaire wijze behandeld, bijv. in

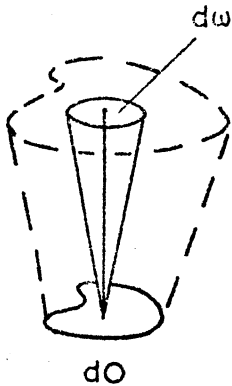
R. Krönig, Leerboek der Natuurkunde, hoofdstuk VII § 14 en 16;

W.H. Westphal, Physik, hoofdstuk 32;

A. Unsöld, Der Neue Kosmos, hoofdstuk 11.

Hieronder volgen de voor ons doel belangrijkste elementen uit de theorie van stralingstransport.

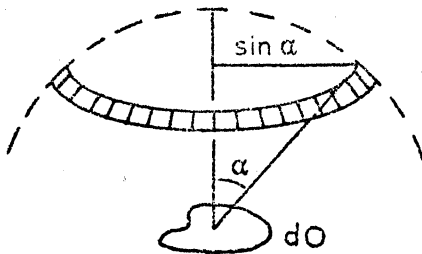
Definitie van monochromatische intensiteit  $I_\lambda$  (intensiteit is de gebruikelijke astrofysische term, de meer bekende term is oppervlakte-helderheid).



Door het oppervlakje  $dO$  stroomt gedurende een tijdsverloop  $dt$  binnen de ruimtehoek  $d\omega$  om de normaal in het golflengte-interval  $(\lambda, \lambda+d\lambda)$  een hoeveelheid energie:

$$I_\lambda \cdot dO \cdot dt \cdot d\omega \cdot d\lambda.$$

De hierin optredende evenredigheidscoëfficiënt, de monochromatische intensiteit  $I_\lambda$  heeft dus de dimensie  $\text{Wm}^{-2} (\text{sterad})^{-1} \text{m}^{-1}$ .



De stralingsstroom (flux) door  $dO$ , indien het vlakje in alle richtingen  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$  met dezelfde intensiteit ("oppervlakte helderheid")  $I_\lambda$  straalt is:

$$E_\lambda dO d\lambda = dO d\lambda \int_0^{\pi/2} I_\lambda \cos \alpha \cdot 2\pi \sin \alpha d\alpha = \pi I_\lambda dO d\lambda$$

perspectivische verkorting  $dO$        $\uparrow$

$d\omega$ , de ringvormige ruimtehoek

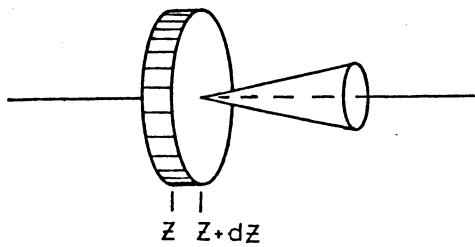
m.a.w. de monochromatische energieflex per oppervlakte eenheid  $E_\lambda = \pi I_\lambda \text{ Wm}^{-2} \text{m}^{-1}$  voor een vlak met  $I_\lambda(\alpha) = I_\lambda$ .

In de theorie van stralingstransport speelt de intensiteit  $I$  (per steradiaal) de belangrijke rol omdat  $I$  langs een lichtbundel niet verandert, tenzij er absorptie optreedt, of emissie of beide.

Om de begripsmoeilijkheden niet met bijkomstige geometrische begrippen (ruimtehoek, steradiaal) te verzwaren hebben wij in de leerlingentekst de intensiteit niet expliciet ingevoerd. Daarom zijn in § 2.2 in formule (1) en (3)  $B_\lambda$  en  $B$  in energiefluxen gegeven; hieronder gebruiken wij intensiteiten, dus  $B_\lambda / \pi$  en  $B/\pi$ .

In § 2.4 zou eigenlijk gesproken moeten worden over "een lichtbundel met intensiteit  $I_\lambda$ ", i.p.v. "een lichtbundel met een vermogen  $E_\lambda$ " en zou formule (6) moeten luiden:  $I_\lambda = k_\lambda \cdot l \cdot \frac{B_\lambda}{\pi}$

Absorptie, emissie, vergelijking voor stralingstransport



Beschouwen we een doosje in een gaslaag dan geldt voor de intensiteitsverandering in dat doosje:

$$dI_{\lambda}(z) = I_{\lambda}(z + dz) - I_{\lambda}(z) = \underbrace{-k_{\lambda} I_{\lambda}(z) dz}_{1} + \underbrace{k_{\lambda} \frac{B_{\lambda}}{\pi} dz}_{2} \quad (D1)$$

term 1: beschrijft de absorptie, deze is evenredig met  $I_{\lambda}(z)$  en  $dz$ .

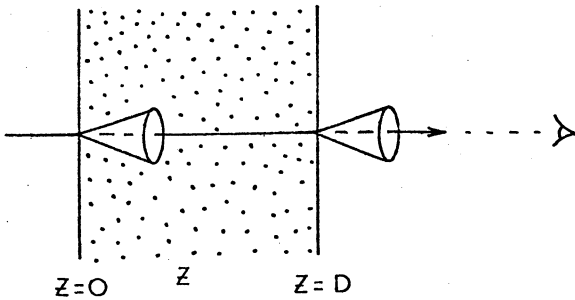
De evenredigheidsconstante is gedefinieerd als  $k_{\lambda} [m^{-1}]$ , de monochromatische absorptiecoëfficiënt.

term 2: geeft de emissie; hier is de wet van Kirchhoff toegepast.

opm.: De middelbare vrije weglengte van een foton met energie  $hc/\lambda$  bedraagt  $1/k_{\lambda}$ .

Toepassingen: oplossingen voor de wet van stralingstransport

1.



In het eenvoudigste geval, beschouwen we een gaslaag met de volgende eigenschappen: Homogene laag,  $k_{\lambda}(z) = k_{\lambda}$ , er is alleen absorptie, dus geen emissie ( $B_{\lambda}(T) \ll I_{\lambda}$ ) Bij  $z = 0$  valt loodrecht straling in met intensiteit  $I_{\lambda}(0)$ . Hoe groot is de intensiteit van de uittredende straling  $I_{\lambda}(D)$ ?

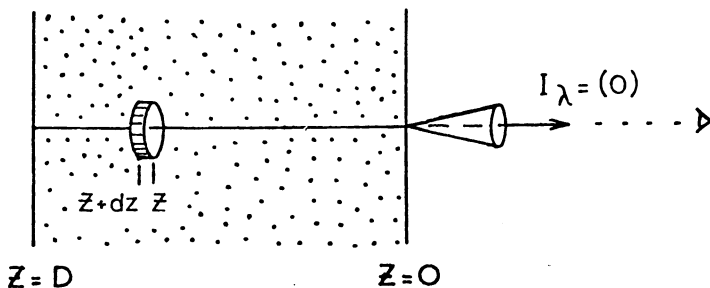
Pas (D1) toe:

$$\begin{aligned} dI_{\lambda}(z) &= -k_{\lambda} I_{\lambda}(z) dz \\ \frac{dI_{\lambda}(z)}{I_{\lambda}(z)} &= -k_{\lambda} dz \\ I_{\lambda}(D) &= I_{\lambda}(0) e^{-k_{\lambda} D} \end{aligned} \quad (D2)$$

(wet van Beer)

Voor een homogene laag met dikte D wordt het begrip optische dikte als volgt gedefinieerd:  $\tau_{\lambda}(D) \equiv k_{\lambda} \cdot D$

2. Emissie van en zelfabsorptie in een homogene isotherme gaslaag



Homogeen en isotherm wil zeggen  $k_{\lambda}(z) = k_{\lambda}$  en  $T(z) = T$ . Omdat de temperatuur in de laag constant is geldt ook  $B_{\lambda}(z) = B_{\lambda}$

zelfabsorptie: verzwakking langs weg  $Z \rightarrow 0$

Oplossen van (D1) geeft nu: 
$$I_\lambda(0) = \int_0^D \underbrace{\frac{B_\lambda}{\pi} k_\lambda}_{\text{Kirchhoff: emissie binnen vol.elem. binnen eenh. v. ruimtehoek}} dZ \underbrace{e^{-k_\lambda Z}}_{\text{zelfabsorptie: verzwakking langs weg } Z \rightarrow 0} = \frac{B_\lambda}{\pi} \int_0^D k_\lambda e^{-\tau_\lambda} d\tau_\lambda$$

Kirchhoff:  
emissie binnen  
vol.elem. binnen  
eenh. v. ruimtehoek

met optische diepte:  $\tau_\lambda(Z) = k_\lambda Z$ , dus  $I_\lambda(0) = \frac{B_\lambda}{\pi} (1 - e^{-Dk_\lambda})$  (D3)

We definiëren nu de optische dikte van de laag:  $\tau_\lambda(D) = Dk_\lambda$

Een laag wordt optisch dun genoemd als:

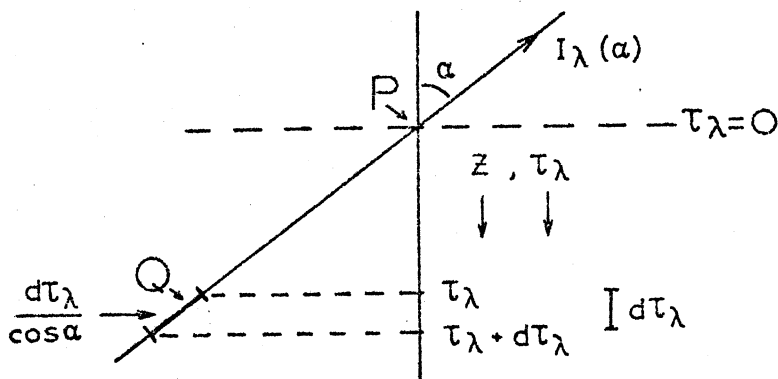
$$\tau_\lambda(D) = Dk_\lambda \ll 1 \xrightarrow{(D3)} I_\lambda(0) \approx \frac{B_\lambda}{\pi} \cdot \tau_\lambda(D) \quad (D3a)$$

Een laag is optisch dik als:

$$\tau_\lambda(D) = Dk_\lambda \gg 1 \xrightarrow{(D3)} I_\lambda \approx \frac{B_\lambda}{\pi} \quad (D3b)$$

Dus: een isotherme optisch dikke laag gas straalt volgens de wet van Planck (als een zwart lichaam), onverschillig hoe  $k_\lambda$  verloopt met  $\lambda$

### 3. Straling uit een niet-isotherme steratmosfeer



Neem aan: de atmosfeer bestaat uit vlakke homogene lagen met:  $k_\lambda(Z)$  en  $T(Z)$  bepalen  $B_\lambda(Z)$ . Het stralingsveld  $I_\lambda(Z, \alpha)$  is een functie van  $Z$  en de uit-treehoek  $\alpha$ .

Wij voeren nu het begrip optische diepte in de atmosfeer in.

$$d\tau_\lambda(Z) \equiv k_\lambda(Z) dZ \text{ en } \tau_\lambda(Z) \equiv \int_\infty^Z k_\lambda(Z') dZ' \quad (D4)$$

waarbij " $-\infty$ " betekent: voldoende ver buiten de atmosfeer,  $\tau_\lambda(-\infty) = 0$

Elk dun laagje zal stralen volgens de wet van Kirchhoff; in dikke lagen treedt zelfabsorptie op.

Wij bekijken nu de intensiteit  $I_\lambda(\alpha)$  in een punt P dat buiten de atmosfeer ligt ( $\tau_\lambda(P) = 0$ ).

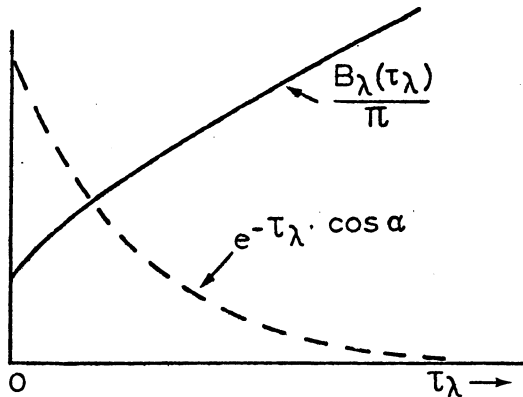
Kirchhoff: het wegelement ter lengte  $d\tau_\lambda / \cos \alpha$  bij Q draagt tot  $I_\lambda(\alpha)$  in P bij:

$\frac{B_\lambda}{\pi} \cdot \frac{d\tau_\lambda}{\cos \alpha}$ , langs de weg  $Q \rightarrow P$  wordt deze bijdrage door zelfabsorptie verzwakte met de

factor  $e^{-\tau_\lambda / \cos \alpha}$ , dus:

$$I_{\lambda}(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{B_{\lambda}(\tau_{\lambda})}{\pi} \cdot e^{-\tau_{\lambda}/\cos \alpha} \frac{d\tau_{\lambda}}{\cos \alpha} \quad (D5)$$

Om het in § 2.5 geïntroduceerde drie-lagenmodel te funderen beschouwen we beide



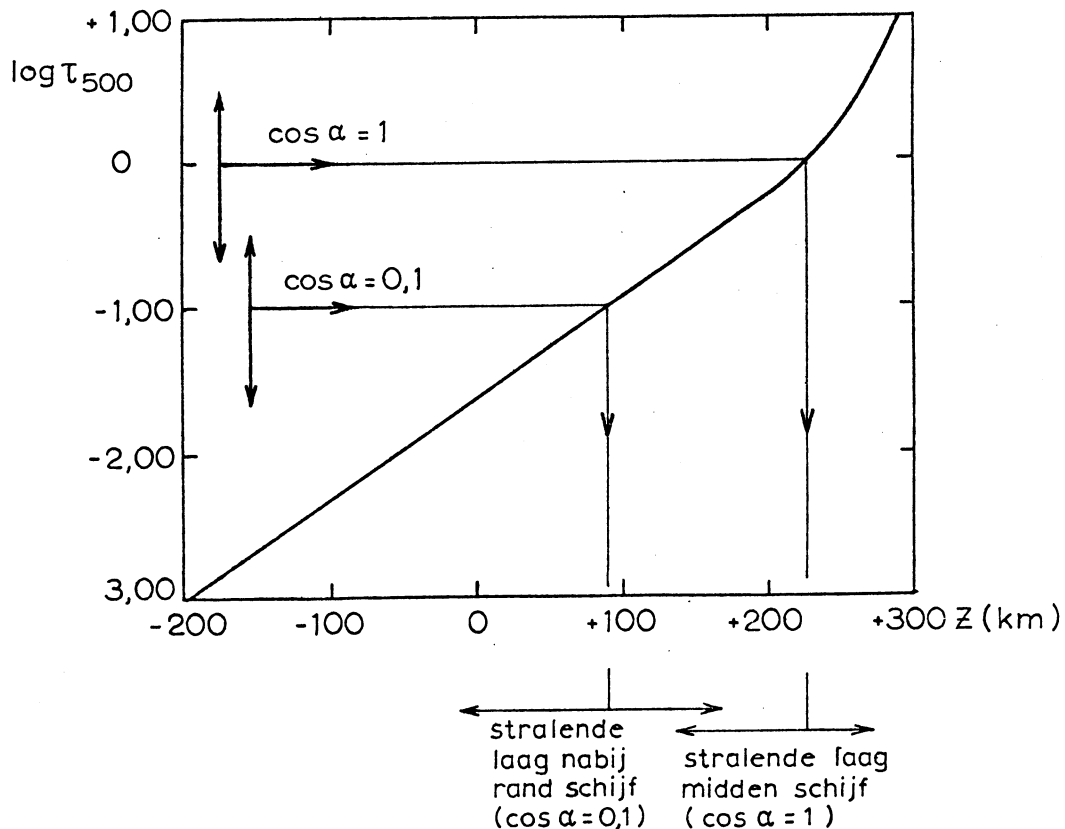
factoren in de integrand in (D5): de belangrijkste bijdrage tot  $I_{\lambda}(\alpha)$  is afkomstig uit een beperkte laag:

$0,1 \lesssim \frac{\tau_{\lambda}}{\cos \alpha} \lesssim 3$ , dit is de "waarneembare stralende laag" uit § 2.5 en fig. 7, waarvan de ligging afhangt van  $\alpha$  ( $\rightarrow$  randverzwakking bij monotoon stijgende  $B_{\lambda}(\tau_{\lambda})$ ). Voor de "doorzichtige lagen" (1), die vrij-

wel niet tot het spectrum bijdragen, geldt:  $\tau_{\lambda}/\cos \alpha < 0,1$  en voor de "niet-waarneembare ondoorzichtige lagen" (3) geldt:  $\tau_{\lambda}/\cos \alpha \gtrsim 3$ .

Opm.: uit die diepe lagen kunnen fotonen niet direct ontsnappen, wel zorgt de uit grote diepte opwellende stralingsstroom voor de handhaving van de diepte-afhankelijke Planckfunctie of temperatuur.

De absorptiecoëfficiënt  $k_{\lambda}(Z)$  neemt ongeveer exponentieel met de diepte  $Z$  toe: (voornamelijk omdat de dichtheid exponentieel met de diepte toeneemt). Gevolg:  $\tau_{\lambda}(Z)$  neemt ongeveer exponentieel met  $Z$  toe: dit leidt ertoe dat de waarneembare stralende laag, geometrisch (in km) beschouwd, vrij scherp begrensd is (zie onderstaande figuur).



In deze figuur is voor het zonnemodel, besproken in § 2.5.c, de logaritme van de optische diepte  $\tau_{500}$  (in het continuüm bij  $\lambda = 500$  nm, groen) uitgezet tegen de geometrische diepte  $Z$ . Het nulpunt van de  $Z$ -schaal is gekozen op de plaats waar men in groen licht de zonnerand ziet.

Ook de voor de waarneembare laag representatieve temperatuur is vrij scherp bepaald; uit (D5) volgt bij benadering:

$$I_{\lambda}(\alpha) \approx \frac{B(\tau_{\lambda} = \cos \alpha)}{\pi} \quad (D6)$$

Men gaat gemakkelijk na dat deze benadering exact geldt indien de Planck-functie  $B_{\lambda}$  een lineaire functie van  $\tau_{\lambda}$  is. Anders gezegd:

$T(\tau_{\lambda} = \cos \alpha)$  is de representatieve temperatuur voor de stralende laag. De posities  $\tau_{\lambda} = \cos \alpha$  zijn in bovenstaande figuur aangegeven.

#### Opmerkingen:

1. Voor de meeste sterren is de dikte van de laag waaruit de straling afkomstig is, zeer dun t.o.v. de straal van de ster (zon: 500 km  $\ll$  700.000 km). Dit rechtvaardigt het gebruik van het vlakke-lagenmodel bij de afleiding van vergelijking (D5).

2. Het verloop van de Planck-functie (of de temperatuur) met de diepte in de atmosfeer hangt af van de wijze waarop het energietransport plaatsvindt. Bij vrijwel alle sterren gaat dit uitsluitend door straling. Alleen in de diepste lagen van sommige ster-atmosferen (bijv. de zon) speelt ook convectie een rol. Voor energietransport uitsluitend door straling geldt bij benadering

$$B(\bar{\tau}) = \int_0^{\infty} B_{\lambda}(\bar{\tau}) d\lambda = \sigma T^4(\bar{\tau}) = \sigma T_{\text{eff}}^4 \left( \frac{3}{4} \bar{\tau} + \frac{1}{2} \right)$$

constante

waarbij de optische diepte  $\bar{\tau}$  gebaseerd is op een geschikt gekozen middellwaarde  $\langle k_{\lambda} \rangle$  van de absorptiecoëfficiënt over de golflengte.  $T$  neemt dus monotoon met de diepte  $\bar{\tau}$  toe.  $T_{\text{eff}}$  is de z.g. effectieve temperatuur (bij de zon dus: 5800 K): maat voor energieflux per opp. eenheid.

3. Bij de gehele bovenstaande uiteenzetting hebben wij lokaal thermodynamisch evenwicht (LTE) ondersteld, d.w.z. dat de emissie van straling in elk volume-element met Kirchhoff-Planck, met één unieke lokale temperatuur, beschreven mag worden. Deze zelfde lokale temperatuur bepaalt in LTE ook de bezettingsevenwichten van energieniveaus (met Boltzmann) en de ionisatieevenwichten (met Saha).

Voor vrijwel alle sterren (met uitzondering van de zeer hete) is LTE een heel goede benadering voor de vorming van het continue spectrum. Voor de vorming van de meeste spectrale lijnen geeft LTE ook een goede benadering. De LTE-benadering faalt wanneer verstrooiingsprocessen een belangrijke rol spelen. Dan moet in de vergelijking voor stralingstransport (D1) voor de Planckfunctie  $B_{\lambda} / \pi$  een andere bronfunctie ingevuld worden. Dit is het geval bij continue verstrooiing aan vrije elektronen in atmosferen van zeer hete sterren, en bij de resonantieverstrooiing in de kernen van zeer sterke spectrale lijnen (bijv. bij de gele Na D-lijnen).



## HOOFDSTUK 3

### Doelstellingen en gezichtspunten:

- ophalen: samenhang atoommodel - spectra van gassen; daaraan toevoegen: seriegrenscontinua;
- verdelingswet van Boltzmann en het ionisatie-evenwicht volgens Saha leren "lezen" en toepassen;
- het begrip overgangswaarschijnlijkheid leren kennen, het begrijpen van het verloop van de absorptiecoëfficiënt van gassen door seriegrenscontinua en lijnen; het semi-kwantitatief begrijpen van spectra van gassen met behulp van de wet van Kirchhoff;
- het begrijpen, dat het optreden van zowel "sprongen" in het sterspectrum bij seriegrenzen en van absorptielijnen in spectra van zon en sterren het gevolg zijn van het naar buiten afnemen van de temperatuur;
- globaal begrijpen van de kwantitatieve bepaling van de chemische samenstelling van zon en sterren;
- de belangrijkste resultaten kennen: zon en meeste sterren hebben dezelfde chemische samenstelling: 90 % H, 10 % He, spoortjes zwaardere elementen.

In dit hoofdstuk wordt:

- natuurkundige kennis en inzicht opgehaald, verdiept en verbreed;
- de wet van Kirchhoff en het "drie-lagenmodel" herhaald en voor nieuwe toepassingen gebruikt.

### Onderstelde voorkennis:

Atoommodellen naar Rutherford en Bohr.

### Beschikbare tijd:

Voor nieuwe stof 3 lessen.

### Opmerkingen en didactische suggesties per paragraaf:

Dit hoofdstuk bevat veel natuurkunde en relatief weinig sterrekunde. Meer sterrekundige toepassingen volgen in hoofdstuk 4.

#### 3.1.

Deze paragraaf is uitsluitend noodzakelijk omdat de beschrijving en de verklaring van seriegrenscontinua in spectra van gassen in de meeste leerboeken om raadselachtige redenen ontbreken.

Laat vraag 38 T vooral door de leerlingen zelf uitzoeken.

Uit didactische overwegingen hebben wij vrij - vrij continua weggelaten.

Vrij - vrij continua zijn overigens zeer belangrijk in het infra-rode deel van sterspectra. Vrij - vrij continua worden veroorzaakt door overgangen van elektronen tussen vrije energietoestanden in het veld van het ion (hyperboolbanen in de Bohrse terminologie).

3.2. en 3.3.

Deze paragrafen zijn grotendeels een herhaling van bekende stof, zij behoeven niet veel tijd en energie te kosten. U kunt veel aan de leerlingen overlaten. De laatste alinea van § 3.3. leidt de volgende paragrafen in.

Vraag 42 dient om te accentueren dat elk atoom of ion een eigen karakteristiek spectrum heeft. Verwarring met een atoom of ion van een andere element is niet nodig. Toch is deze verwarring in het verleden wel opgetreden voor de Balmer- en Pickeringseries (zie achtergronden bij dit hoofdstuk).

Het thema van deze vraag is één van de voorbeelden waarin wij zien hoe het sterrekundig en het natuurkundig onderzoek elkaar stimuleren.

3.4.

De verdelingswet van Boltzmann wordt zonder afleiding gegeven, en achteraf kwalitatief aannemelijk gemaakt. Memoriseren van de formule (9) is niet nodig.

Vraag 44: tenminste éénmaal rekenen met de formule draagt bij tot het verwerken van de wet. De tabel in fig. 16 geeft resultaten van een aantal temperaturen voor gebruik in hoofdstuk 4.

3.5.

Ook de wet van Saha wordt gegeven en alleen kwalitatief aannemelijk gemaakt. Leerlingen die bij de scheikunde vertrouwd zijn geworden met dissociatie-evenwichten, zullen daar bij het begrip van de wet van Saha profijt van hebben.

Leerlingen hebben soms moeilijkheden om het verschil te zien tussen de wetten van Saha en Boltzmann. Onderstreep dat Boltzmann handelt over de energieniveaus, waarbij het elektron steeds in het atoom gebonden blijft. Bij ionen zijn de elektronen vrij, een ion moet een elektron ontmoeten alvorens recombinitie tot atoom mogelijk wordt; Saha geeft een evenwichtsvergelijking tussen drie soorten deeltjes: atomen, ionen en elektronen (zie ook achtergronden, hieronder).

3.6

Hier wordt het verloop van de absorptiecoëfficiënt met de golflengte behandeld dat in hoofdstuk 2 als bekend werd aangenomen. Aangezien het aantal atomen of ionen in een bepaalde energietoestand via de wetten van Boltzmann en van Saha ook van  $T$  en  $P_e$  afhangen, wordt het nu ook duidelijk dat de absorptiecoëfficiënt  $k_\lambda$  van  $T$  en  $P_e$  afhangt.

Maak niet veel ophef van de overgangswaarschijnlijkheden: dit begrip moet even genoemd worden, bijv. om te begrijpen dat de sterkten van de Balmerlijnen niet gelijk zijn.

Bij vraag 49 en bij het bekijken van de temperatuurafhankelijkheid in het V-spectrum (plaat XI, vraag 50) komt de wet van Kirchhoff opnieuw aan de orde. Desgewenst kunt u toepassing van Kirchhoff wat verder uitdiepen, bijv. aan de

hand van Appendix 3.6A1.

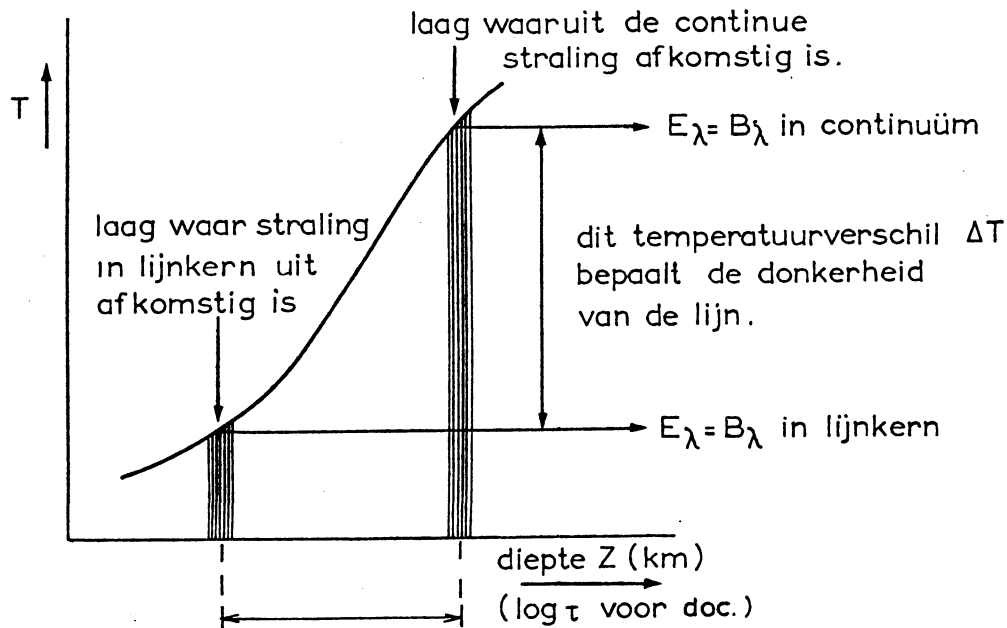
Het gedeelte na vraag 50 tot het einde van de paragraaf is de astrofysische kern van hoofdstuk 3. Het doet een stevig beroep op het in hoofdstuk 2 verworven inzicht, dat hier wordt opgehaald en zo nodig wordt verdiept. Leerlingen die vraag 51 zelfstandig kunnen oplossen, hebben het voorgaande goed begrepen.

Plaat XIII toont spectaculaire consequenties van het principe: naarmate de absorptiecoëfficiënt groter is komt de straling uit hoger gelegen lagen. Verstemt men het filter geleidelijk van de kern van H $\alpha$  naar de vleugel van de lijn, dan ziet men structuur en contrast geleidelijk veranderen; tenslotte krijgt men de "wit-licht" opname terug.

Voor de alternatieve verklaring van absorptielijnen door verstrooiing: zie achtergronden, hieronder

### 3.7.

Misschien moet u er genoeg mee nemen dat u de methode van de kwantitatieve chemische analyse, uit de sterkte = donkerheid van de spectrale lijnen, aan uw leerlingen moet "aanpraten". De resultaten van vraag 54 geven een aanwijzing in hoeverre leerlingen deze materie kunnen verwerken. Diep inzicht in deze zaak is voor het vervolg geen vereiste. Maar indien uw leerlingen het voorgaande t/m § 3.6. voortreffelijk begrepen hebben, zal het wel mogelijk zijn om het in deze paragraaf wat oppervlakkig aan de orde gestelde principe goed te begrijpen met behulp van onderstaande schematische figuur en het schema: donkerheid  $\Delta E \rightarrow \Delta T \rightarrow \Delta Z \rightarrow n_A \cdot p_{AB}$ . Het zou in ieder geval een uitstekende test zijn, die u wel losjes moet "aanspelen" om leerlingen niet in paniek te brengen.



diepteverschil  $\Delta Z$  wordt bepaald door het effectieve aantal absorberende atomen/ionen  $n_A \cdot P_{AB}$ .

3.8.

Deze samenvatting geeft een beknopt overzicht van de onderwerpen aan die in dit hoofdstuk werden aangesneden, doch veel minder van het inzicht en de kennis die verworven dient te zijn!

Antwoorden op en aanwijzingen bij de vragen

38.



c. bij ieder energieniveau hoort een lijnenserie met bijbehorend serie-grenscontinuüm.

41. a, b; zie figuur 15

42. a.  $\text{He}^+$

b.	$\text{H}$	$\cong$	$\text{He}^+$
	$n = 2 \rightarrow m = 3$		$n = 4 \rightarrow m = 6$
	$n = 2 \rightarrow m = 4$		$n = 4 \rightarrow m = 8$
	$n = 2 \rightarrow m = 5$		$n = 4 \rightarrow m = 10$
	enz		enz

c. Vergelijken van de spectra van  $\text{He}^+$  (lab) en  $\zeta$ -Puppis over een groot golflengtegebied.

44.  $n_2/n_1 = 4 \exp^{-1} (\Delta E/kT)$

$$\Delta E/kT = 10,2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} / (1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 10^3) = 118,3$$

$$X = e^{118,3} \rightarrow \log X = 118,3 \log e = 118,3 \cdot 0,4343 = 51,38$$

$$X = 2,4 \cdot 10^{51}$$

$$n_2/n_1 = 4/X = \underline{1,7 \cdot 10^{-51}}$$

45. in de grondtoestand

$$47. P_e = N_e kT$$

48. Voor temperatuur  $T < 20.000K$  is het aantal deeltjes  $n_1$  in de grondtoestand veel groter dan  $n_2$  (het aantal deeltjes in de eerste aangeslagen toestand). Omdat de absorptiecoëfficiënt  $k$  evenredig is met  $n$ , zal de absorptiecoëfficiënt in het Lymancontinuüm veel groter zijn dan die in het Balmercontinuüm (bovendien zijn ook de overgangswaarschijnlijkheden in het Lymancontinuüm wat groter).

49. a) de overgangswaarschijnlijkheid  $p_{2m}$  neemt af naar de seriegrens. Dan neemt ook de lijnabsorptiecoëfficiënt af naar de seriegrens. Omdat  $E \sim k$  (Kirchhoff) neemt ook de helderheid af naar de seriegrens.

$$b) \left. \begin{array}{l} n_2 > n_3 \\ k \sim n \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} k_2 > k_3 \\ E \sim k \end{array} \right\} \rightarrow E_2 > E_3$$

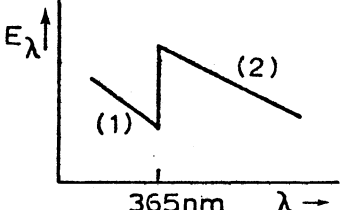
(bovendien is de overgangswaarschijnlijkheid in het Balmercontinuüm groter dan in het Paschen continuüm).

50. a) 3045 Å; 3051 Å; 3054 Å; 3060 Å; 3074 Å; 3082 Å; 3091 Å;

b) 3034 Å; 3041 Å; 3114 Å; 3140 Å;

c) 3111 Å; 3118 Å; 3125 Å; 3132 Å;

51. a) voor  $\lambda < 365 \text{ nm}$  is de absorptiecoëfficiënt  $k$  groter dan voor  $\lambda > 365 \text{ nm}$ . Dus: voor  $\lambda < 365 \text{ nm}$ , straling uit een minder diepe laag.

b)  Balmer'sprong (schematisch) uit de waarnemingen. Deel (1) past bij een Planckse kromme van lagere temperatuur dan deel (2). Het Balmercontinuüm komt dus uit een laag van lagere temperatuur.

c) uit a  $\rightarrow$  Balmercontinuüm minder diep }  $\rightarrow$  c: T neemt naar buiten af  
 uit b  $\rightarrow$  Balmercontinuüm lagere T

52. Lyman - Paschen - Bracketsprong.

53. Energietransport gaat van hoge naar lagere temperatuur en van binnen naar buiten, dus de temperatuur moet naar buiten toe afnemen.

54. De "donkerheid" van de spectrale lijnen is ook afhankelijk van het temperatuurverschil tussen de lagen:

a) die de straling uit de kern van de lijn uitzenden;

b) die het omringende continuüm uitzenden.

Dus hangt de donkerheid van de lijnen af van het temperatuurverloop (zie opmerking bij § 3.7. hierboven).

Dit is de hoofdzaak. Geven leerlingen aan: T is nodig om Boltzmann en Saha

toe te passen, om uit  $n_A$  het totale aantal deeltjes van het element  $n_{elem.}$  te berekenen dan is dat een prachtig extra argument. Breng het echter niet expliciet ter sprake als zij er niet zelf mee aankomen.

55. Sterren met dezelfde chemische samenstelling maar met verschillende effectieve temperaturen geven verschillende spectra te zien.

### Achtergronden

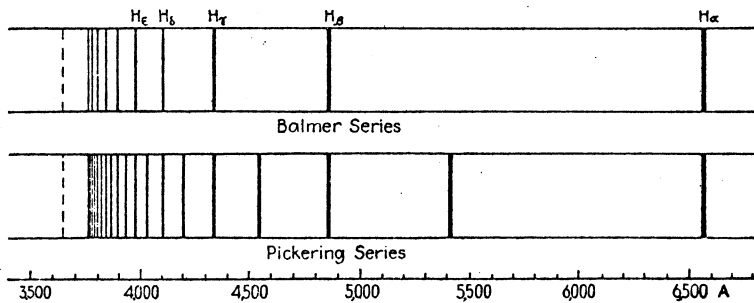
Waterstof en de Pickeringserie (ontleend aan White: Introduction to atomic spectra)

De verklaring van de lijnenseries in het waterstofspectrum was goed bekend, toen Pickering in 1897 in het spectrum van de ster  $\zeta$ -Puppis een serie lijnen ontdekte met golflengten die een nauwe relatie vertonen met de Balmer-serie van waterstof. Rydberg was de eerste die aantoonde dat de frequenties van de lijnen in het spectrum van  $\zeta$ -Puppis (de zogenaamde Pickeringserie) te berekenen zijn door in de Balmerformule de waarde voor  $m$  met een factor 0,5 te laten toenemen.

$$f_m = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad \text{met } m = 2,5, 3, 3,5, \dots$$

De overeenstemming tussen gemeten en berekende waarden was dermate goed dat men meende dat in de ster waterstof voorkomt in een fysische toestand die we op aarde niet kennen.

Hieronder zijn de Balmer- en de Pickeringserie weergegeven.



Uitgaande van de gedachte dat er halftallige waarden voor  $m$  en  $n$  mogelijk zijn in de Balmerformule, voorspelde Rydberg nog andere lijnenseries, onder andere:

$$f_m = R \left( \frac{1}{1,5^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad \text{met } m = 2, 2,5, 3, \dots$$

Deze lijnen liggen, met uitzondering van de eerste, allen in het ultra violette deel van het spectrum. Het spectrum van  $\zeta$ -Puppis vertoont echter een lijn bij  $\lambda = 4688 \text{ nm}$ ; dat is juist de golflengte die volgt uit de formule bij substitutie van  $m = 2$ . De hypothese van Rydberg was hiermee bevestigd.

Fowler onderzocht het spectrum van helium in het laboratorium. In één van zijn experimenten onderzocht hij het spectrum van een gas bestaande uit wa-

terstof en helium. Het waargenomen spectrum vertoont niet alleen de eerste twee lijnen van de Pickeringserie maar eveneens een aantal andere lijnen die Pickering in sterren had waargenomen. Op een of andere manier schenen al deze lijnen in relatie te staan met het waterstofspectrum en leek er geen verband te bestaan met de belangrijkste lijnenseries van helium.

Uiteindelijk is de hele puzzel opgelost door Bohr die op grond van zijn theorie een verwantschap verwachtte tussen de spectra van neutraal waterstof en eenmaal geïoniseerd helium.

#### De wetten van Boltzmann en Saha:

Over de wetten van Boltzmann en Saha geven veel boeken meer achtergrond, bijv. op betrekkelijk elementair niveau:

Ambarzumjan u.a.                      Theoretische Astrophysik  
A. Unsöld                                Der neue Kosmos, hoofdstuk 17.

In de leerlingentekst stelt de constante  $a(B,A)$  in formule (9) de wet van Boltzmann voor:  $a(B,A) = \frac{g_B}{g_A}$ , waarin  $g_B$  en  $g_A$  de statistische gewichten (= ontardingsgraden) van respectievelijk niveau B en A zijn.

In formule (10a) voor Saha is uit didactische overwegingen als "constante" ingevoerd:

$$\beta = \frac{(2\pi m)^{3/2}}{h^3} \cdot 2 \cdot \frac{u_i(T)}{u_a(T)}$$

Hierin is:

$m$ : de massa van het elektron;  $h$ : de constante van Planck;

$u_a(T) = \sum_n g_n \exp \{-E_n/(kT)\}$ : de toestandsom voor het atoom waarbij de sommatie zich uitstrekt over alle energieniveaus binnen het atoom (het  $n$ -de niveau heeft het statistisch gewicht  $g_n$  en de aanslagenergie  $E_n$ );

$u_i(T)$ : de analoge toestandsom voor het ion.

Beide toestandsommen nemen toe met toenemende temperatuur, maar doorgaans niet op dezelfde wijze. De "constante"  $\beta$  zal daarom in veel gevallen enigszins van de temperatuur afhangen.

De formule voor de wet van Saha kan met voor de hand liggende substituties voor het evenwicht tussen elk tweetal opeenvolgende ionisatietrappen worden gebruikt.

#### Resonantieverstrooiing

Het optreden van absorptielijnen in spectra van zon en sterren wordt in de leerlingentekst verklaard met behulp van de wetten van Kirchhoff en Planck als het gevolg van het naar buiten afnemen van de temperatuur in de ster-

atmosfeer (lokaal thermodynamisch evenwicht, zie ook de bij hoofdstuk 2 gegeven achtergronden). Deze verklaring voldoet voor de meeste spectrale lijnen goed, doch enkele zeer sterke lijnen in het zonnenspectrum blijken donkerder kernen te bezitten dan uit de Kirchhoff-Plancktheorie volgt (dit is bijv. het geval bij de resonantielijnen van Na). Men kan dit afwijkende gedrag verklaren door het optreden van resonantieversstrooiing: fotonen worden uit een gerichte bundel geabsorbeerd en in willekeurige richtingen weer uitgezonden, hetgeen uiteraard tot een uitdunning van fotonen, met  $\lambda = \lambda_{\text{lijnkern}}$ , in de gerichte bundel leidt.

Tijdens de experimenten met deze keuzegroep is gebleken dat enkele docenten aanvankelijk moeilijkheden hadden met de interpretatie van absorptielijnen volgens het L.T.E.-principe met Kirchhoff-Planck. De reden was dat de verklaring van de Na-absorptielijnen in het laboratorium met behulp van resonantieversstrooiing hen in de weg zat. Wij onderstrepen daarom dat voor de verklaring van de seriegrenscontinua en van verreweg de meeste absorptielijnen in ster spectra het principe van lokaal thermodynamisch evenwicht veel belangrijker is dan de resonantieversstrooiing.



## HOOFDSTUK 4

Bij de behandeling van dit hoofdstuk staan twee wegen open: een betrekkelijk strakke en beknopte behandeling, opdat er nog tijd overblijft voor hoofdstuk 5, of een uitgebreidere behandeling, waarbij ook paragrafen uit de appendix aan de orde kunnen komen. In het laatste geval kunt u de leerlingen door eigen werkzaamheid en door samenwerking in groepjes veel zelf laten ontdekken. De hieronder volgende handleiding biedt eerst een aantal algemene gegevens en vervolgens een aantal suggesties die nuttig kunnen zijn bij een methode met grotere mate van zelfwerkzaamheid van de leerlingen.

### Doelstellingen en gezichtspunten

Van leerlingen die dit hoofdstuk hebben verwerkt mag verwacht worden dat zij

- Weten dat de spectra van de meeste sterren in een reeks O, B, ... gerangschikt kunnen worden.
- Weten dat deze reeks een temperatuurclassificatie voorstelt, hetgeen volgt uit kleurmetingen. Aannemelijk kunnen maken dat de verschillen tussen de spectra niet op verschillen in chemische samenstelling berusten. Aan de hand van voorbeelden duidelijk kunnen maken dat het verloop van de sterkte van bepaalde spectrale lijnen door de spectrale reeks verklaard kan worden uit het verloop van de effectieve temperatuur met de wetten van Saha en Boltzmann.
- Een schets kunnen maken van het Hertzsprung-Russelldiagram. Weten welke grootheden langs de assen zijn uitgezet. De stroken kunnen aangeven waarin de meeste sterren terecht komen en daar de namen hoofdreekssterren, reuzen, superreuzen en witte dwergen correct bij kunnen schrijven.
- Een semi-kwalitatief begrip hebben van de relatieve aantallen hoofdreekssterren, reuzen, superreuzen en witte dwergen. Aan kunnen geven welke problemen een zuivere statistiek bemoeilijken.
- Uitgaande van de definitie van effectieve temperatuur, lijnen in het HRD kunnen tekenen waar sterren met gelijke diameters op liggen (met  $R/R_{\odot}$  als parameter). Daarmee wordt aan de namen reuzen, superreuzen, witte dwergen inhoud gegeven.
- Het principe van de massabepaling van componenten van een dubbelster kunnen uitleggen.
- De massa-lichtsterkterelatie en het empirisch gevonden verloop van de massa door het HRD kwalitatief kunnen aangeven.
- Samenvattend kunnen formuleren in welke opzichten de categorieën sterren (hoofdreekssterren, reuzen, ...) verschillen in temperatuur, straal en massa.
- Enkele nieuwe vragen kunnen formuleren die voortvloeien uit de ordening van sterren in de spectrale reeks, in het HRD en uit ordening naar de massa; bijv.: waarom stroken in HRD? Waarom witte dwergen zo compact en afwijkend in M-L-relatie?

Meer algemene gezichtspunten en principes in dit hoofdstuk zijn:

1. Het omvangrijke materiaal aan sterren maakt classificatie en ordening noodzakelijk.
2. Classificatie vereist een goede statistiek.
3. In dit hoofdstuk zijn de aan sterren meetbare gegevens gecompleteerd met massabepalingen; deze mate van volledigheid is noodzakelijk om aan hoofdstuk 5 te kunnen beginnen.
4. Een zinvolle ordening leidt tot nieuwe vragen.
5. Een belangrijke toepassing van de wetten van Saha en van Boltzmann: de interpretatie van de spectrale reeks.

Voorkennis:

Dit hoofdstuk bouwt voort op hoofdstukken 2 en 3. Daarnaast is de gravitatie-wet van Newton nodig. Er komt geen nieuwe natuurkunde aan de orde.

Benodigde tijd:

Bij een strakke behandeling zijn 3 lessen voldoende.

Algemene opmerking:

De leerlingen ontmoeten in dit hoofdstuk geen moeilijk te verwerken begrippen.

Tijdens de experimenten werd er met veel plezier aan dit hoofdstuk gewerkt.

Docenten vinden achtergrondinformatie in:

G.B. van Albada: Sterrenkunde 3e deel (red. C. de Jager), in het bijzonder in hoofdstukken I, 4 en 5; II, 1 en in

A. Unsöld: Der neue Kosmos § 15, 16, 17.

Opmerkingen per paragraaf:

4.1.

Sommige boeken schrijven achter de hier gegeven reeks ...K, M nog de typen R, N en S. R-, N- en S-sterren zijn koele reuzen ( $T_{\text{eff}}$  als bij M sterren) met afwijkende spectra, vermoedelijk ten gevolge van afwijkende chemische samenstellingen. Deze R-, N- en S-sterren zijn zeer schaars, doch als (super-) reuzen-karakter wel opvallend. Alleen over spreken als leerlingen al weten dat de reeks niet "volledig" is.

Opmerking bij spectrale plaat XII: de negatieven zijn opgenomen op zeer snelle fotografische emulsie die echter voor  $\lambda > 490 \text{ nm}$  (nabij  $H_{\beta}$ ) niet meer gevoelig is. Voor spectrale typen K en M zijn de negatieven voor  $\lambda < 400 \text{ nm}$  erg bleek: het continuüm is daar zwak (Planck) en sterk overdekt door overlappende absorptielijnen.

Aan het einde van de handleiding bij dit hoofdstuk geven wij suggesties hoe u de leerlingen de spectrale reeks zelf kunt laten ontdekken. In ieder geval kunt u enkele van de nog niet geïdentificeerde spectra in § 4.1A1 door de leerlingen

laten classificeren met behulp van plaat XIII; dat gaat gemakkelijker dan in vraag 56!

#### 4.2.

De kleurverandering langs de spectrale reeks en het daaruitvolgende verband tussen spectrale klasse en effectieve temperatuur (bepaald volgens de in § 2.6. besproken methode) wordt meegedeeld. Het is van groot belang dat de leerlingen de verklaring van het sterkteverloop van enkele spectrale lijnen langs de reeks met behulp van de wetten van Saha en van Boltzmann goed begrijpen. Sommige van de vragen 57-61 zijn niet gemakkelijk, doch geef leerlingen de kans er grondig over na te denken alvorens deze stof bijv. in een klasseggesprek te behandelen, en behandel niet alles in één les.

Enkele aanvullende vragen zijn vrij gemakkelijk te bedenken, bijv.:

- Waarom verdwijnen van  $B \rightarrow O$  de H-lijnen eerder dan de He I-lijnen? (antw.: ionisatie-energie van He veel hoger).
- Een Fe I-lijn uit het grondniveau van  $Fe^{\circ}$  verschijnt ergens in spectrale typen F (waarom is er dan een klein beetje Fe in atoomtoestand van  $Fe^{\circ}$ ?) en neemt  $\rightarrow G \rightarrow K \rightarrow M$  voortdurend in sterkte toe (steeds meer  $Fe^{\circ}$  in grondtoestand).
- Een Fe I-lijn uit een aangeslagen toestand van  $Fe^{\circ}$  neemt van  $F \rightarrow G \rightarrow K \rightarrow M$  aanvankelijk in sterkte toe en daarna weer af (de factor  $Fe^{\circ}$  in aangeslagen toestand neemt bij afnemende temperatuur weer af - Boltzmann).

Opmerking: In een steratmosfeer komen hoogstens twee naburige ionisatietrappen voor, zodat bijvoorbeeld een spectrum met Fe II-lijnen daarnaast òf Fe I-lijnen òf Fe III-lijnen toont.

#### 4.3.

Het woord Hertzsprung-Russelldiagram gebruiken wij hier strikt genomen niet juist. Russell zette de zgn. absolute visuele magnitude uit tegen de spectrale klasse. Het lijkt ons toch aardig om aan het lichtsterkte-temperatuurdiagram zoals in fig. 24 de naam van beide pioniers te blijven verbinden (die vervelende, historisch bepaalde magnitudeschalen behandelen wij in deze keuzegroep niet, want dit levert weinig inzicht op en kost veel tijd).

Onderstreept dient te worden dat de zeer ongelijkmatige verdeling van de sterren in het HRD een verrassing is; dit feit roept om een verklaring. Deze verklaring wordt in hoofdstuk 5 gegeven. Daarbij is kennis van de relatieve aantallen hoofdreekssterren, reuzen, etc. van groot belang, hetgeen het probleem van een zuivere statistiek aan de orde stelt.

#### 4.4.

Leerlingen zullen even moeten wennen aan het gebruik van dimensieloze

grootheden  $L/L_{\odot}$ ,  $T/T_{\odot}$  enz., en aan een logaritmische relatie als (12). Geef vragen 68-70 pas als huiswerk op nadat vraag 67 behandeld is (of gezamenlijk is opgelost). Deze paragraaf is een toepassing van de definitie voor het begrip effectieve temperatuur (§ 2.3., formule (9)).

Aanvullende vraag: Hoe groot is de ster Betelgeuze in vergelijking met afmetingen in het planetenstelsel? (middellijn Betelgeuze is ongeveer gelijk aan de middellijn van de baan van Venus).

#### 4.5.

Deze paragraaf biedt tevens de gelegenheid om de gravitatiewet van Newton te herhalen.

Formule (13) moet beslist niet uit het hoofd geleerd worden, wel kan men vergen dat de leerlingen de formule kunnen afleiden.

Het feit dat de werkelijke banen ellipsen zijn, en dat de banen onder een scheve hoek worden gezien tast de methode van de massabepaling niet aan (men kan de projecties van de ware lange assen in de op de hemelbol geprojecteerde banen terugvinden). De som van de massa's kan nauwkeuriger bepaald worden dan de verhouding van de massa's, want  $(r_1 + r_2)$  volgt uit de relatieve posities van de componenten terwijl  $r_1/r_2$  uit de absolute posities t.o.v. een gemiddelde achtergrond moet worden afgeleid.

Vraag 72 laat leerlingen zelf de schokkende ontdekking beleven van de hoge massadichtheid in witte dwergen; wij geven er bewust geen beschouwing bij. U kunt erop wijzen dat deze astrofysische vondst de natuurkunde met een toen nog onbekende toestand van materie confronteerde. Indien u hoofdstuk 5 niet behandelt, kunt u iets vertellen over witte dwergen en ontaarde materie (§ 5.3.b, § 5.5.d, § 5.8.c, appendix 5.3b A).

De vragen 73-76 laten de leerlingen zelf enkele feiten ontdekken.

Vraag 76 geeft aansluiting op § 4.5.A (appendix): men kan hoofdreekssterren en reuzen ook aan details in het spectrum onderscheiden. Als u § 4.5A niet behandelt vindt u daar wellicht voor u nuttige achtergrondinformatie.

#### 4.6.

Bij deze samenvatting moet er waarschijnlijk vooral op gewezen worden dat uit waarnemingen afgeleide resultaten vragen oproepen (er bestaat bij leerlingen de neiging dergelijke resultaten als einddoel te aanvaarden). Hier is de gelegenheid erop te wijzen dat wetenschap voortgang vindt door verdergaande vragen te stellen. In dit verband zou u leerlingen kunnen vragen een lijstje te maken van vragen die nu (dat is na deze hoofdstukken) aan de orde zijn. Eventueel kunt u eens nagaan of er noties bestaan in welke richting naar antwoorden moet worden gezocht (bouw inwendige van ster, evolutie-effecten).

Antwoorden op vragen

56. De leerlingen zullen iets vinden tussen G0 en K0, bijvoorbeeld als volgt:

De lijnen van  $\text{Ca}^+$  (H en K) zijn beide zeer sterk. Dat sluit de typen O t/m F0 uit.

De Fe I-lijnen zijn redelijk sterk dat sluit ook de rest van de F-klasse uit.

Het zonnespectrum vertoont geen duidelijke banden van TiO. Dus ook K5 tot M vallen af.

Deze ruwe schatting leert dat de zon een G0-K0 ster is.

Letten we op de lijnen H $\gamma$  (410,1 nm) en CaI (422,6 nm) dan zien we dat in een G0 ster H $\gamma$  sterker is dan CaI en in een K0 ster H $\gamma$  zwakker dan CaI. In het spectrum van plaat I zijn deze lijnen bijna even sterk. De zon zal ongeveer een G5 ster zijn.

De fout bij deze ruwe benadering is vrij klein. In werkelijkheid is de zon een G2 ster.

57. a) Balmerlijnen in het spectrum, dus atomen in energietoestand overeenkomend met  $n = 2$ .
- b) A, F, ... M komt overeen met 10.000K - 3.500K. Uit de wet van Saha (fig. 17) blijkt dat waterstof dan grotendeels neutraal is.
- c) Hoe lager de temperatuur in de lijnvormende laag, des te kleiner is het aantal H-atomen in de toestand  $n = 2$  (Boltzmann, fig. 16).
- d) Voor temperaturen boven de 10.000K neemt het aantal H-atomen t.o.v. H-ionen af (Saha, fig. 17).
- e) Is waterstof geïoniseerd dan zijn er geen discrete energietoestanden meer, dus er zijn geen H II-lijnen bestaan.
58. a) De Ca II-lijnen treden op waar calcium hoofdzakelijk 1x geïoniseerd is, de Ca I-lijnen pas waar calcium hoofdzakelijk neutraal is, dus bij lagere temperaturen. Ca I-lijn wordt van K  $\rightarrow$  M steeds sterker omdat de fractie neutrale Ca steeds groter wordt bij afnemende temperatuur.
- b) De temperaturen zijn dna zo hoog dat de meeste calcium 2x geïoniseerd is.
- c) Calcium is al 2x geïoniseerd en H is nog neutraal. Is dat paradoxaal? Kijk eens naar de ionisatiepotentialen: voor H 13,6 eV; voor  $\text{Ca}^+$  11,87 eV. Bovendien is calcium een veel schaarser element dan waterstof (zie de tabel in fig. 21). Van F0  $\rightarrow$  A0 gaande komt er steeds meer H in de energietoestand  $n = 2$  met aanslag potentiaal 10,2 eV.
59. a) De ionisatiepotentiaal voor  $\text{Fe}^+$  is groter dan die voor  $\text{Ca}^+$ . Fe II-lijnen verschijnen dus al bij temperaturen waarbij calcium nog steeds 2x geïo-

niseerd is (dus geen Ca II-lijnen mogelijk).

- b) Doordat de ionisatiepotentiaal van  $\text{Fe}^{\circ}$  groter is dan die van  $\text{Ca}^{\circ}$  neemt bij afnemende T het percentage  $\text{Fe}^{+}$ -ionen eerder af dan het percentage  $\text{Ca}^{+}$ -ionen.

60. Gaande van lage naar hoge temperatuur zal Si eerst 1x geïoniseerd worden, bij hogere temperatuur 2x geïoniseerd etc. Als de Si III-lijnen verschijnen, verdwijnen de Si II-lijnen.

61. Bij hoge temperaturen is TiO volledig gedissocieerd, pas bij temperaturen  $\leq 3000$  K is er voldoende TiO aanwezig.

62. a)  $L_{\odot} = 4\pi \cdot 1,39 \cdot 10^3 \cdot (1,5 \cdot 10^8 \cdot 10^3)^2 = 3,9 \cdot 10^{26}$  W

b)  $L_{\text{S}} = 4\pi \cdot 1,33 \cdot 10^{-7} \cdot (81 \cdot 10^{15})^2 = 1,1 \cdot 10^{28}$  W

$$\frac{L_{\text{S}}}{L_{\odot}} = 28,2; \quad \log \frac{L_{\text{S}}}{L_{\odot}} = 1,45.$$

63. Het diagram zou gelijkmatig met stippen opgevuld zijn.

64. a)  $3 \cdot 10^6 : 1$

b) lichtzwak en (blauwachtig) wit van kleur (tegenstelling met rode hoofdreekssterren.

c)  $0,6 : 10^2 : 8 \cdot 10^4$

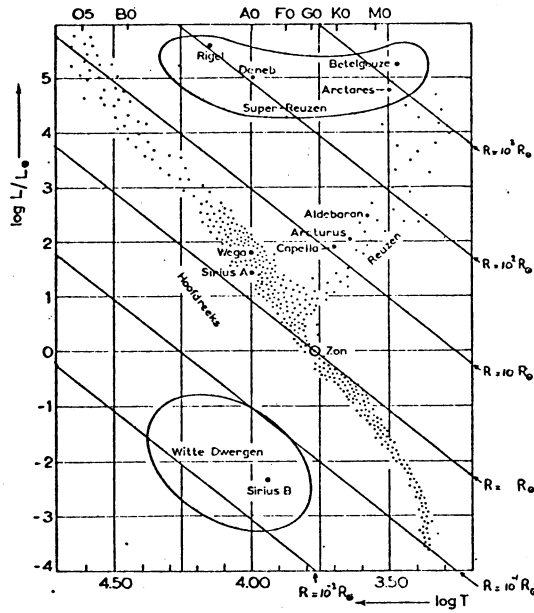
65.  $\frac{L_{\text{reus}}}{L_{\text{dwarf}}} = \frac{2 \cdot 10^6}{1}$  dus  $\left(\frac{R_{\text{reus}}}{R_{\text{dwarf}}}\right)^2 = 2 \cdot 10^6$

De superreus staat dan 1400x zo ver weg.

66. a) geen; b) geen; c) 5; d) 3; e) 41.

67. a)  $\log \left(\frac{L}{L_{\odot}}\right) = 4 \log \left(\frac{T}{T_{\odot}}\right) + 2 \log \left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)$

d)



68.  $0,1 R_{\odot} < R_{\text{hoofdreeks}} < 10 R_{\odot}$

69. a)  $10 R_{\odot} < R_{\text{reuzen}} < 200 R_{\odot}$

b)  $100 R_{\odot} < R_{\text{superreus}} < 1000 R_{\odot}$

c)  $10^{-3} R_{\odot} < R_{\text{witte dw}} < 10^{-1} R_{\odot}$

70. De lichtsterkten evenredig met  $R^2$ , en bovendien met  $T_{\text{eff}}^4$ .

71. De periode (omlooptijd) T } → totale massa  
 Afstand beide componenten ( $r_1 + r_2$ ) }

Kunnen we de stralen van de banen  $r_1$  en  $r_2$  afzonderlijk meten dan volgen daaruit zijn de afzonderlijke massa's  $m_1$  en  $m_2$  (zie formules die aan (13) voorafgaan).

Opmerking voor docenten: bij de bepaling van  $r_1 + r_2$ ,  $r_1$  en  $r_2$  moeten deze grootheder in hoekmaat (aan de hemel) gemeten worden, zij kunnen pas in lineaire maat worden omgezet indien de afstand tot de dubbelster bekend is.

72. a)  $m_A + m_B = 6,4 \cdot 10^{30} \text{ kg}$  ( $T = 2,49 \cdot 10^{18} \text{ sec}$ ).

$m_A = \frac{2}{3} m_T = 4,3 \cdot 10^{30} \text{ kg} = 2,6 m_{\odot}$

$m_B = \frac{1}{3} m_T = 2,1 \cdot 10^{30} \text{ kg} = 1,0 m_{\odot}$

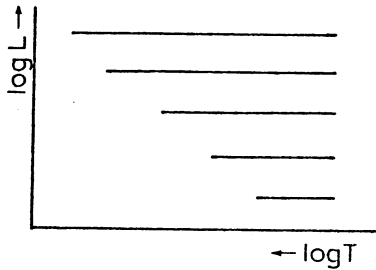
b)  $\rho = \frac{m_B}{\frac{4}{3} \pi R^3} = \frac{2,1 \cdot 10^{30}}{\frac{4}{3} \pi (1,39 \cdot 10^7)^3} = 2 \cdot 10^8 \text{ kg/m}^3$

$\rho_{\odot} = 1,4 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ;  $\rho_{\text{water}} = 10^3 \text{ kg/m}^3$ .

73.  $0,7 < \log(m/m_{\odot}) < 0,1 \rightarrow 5m_{\odot} < m < 10m_{\odot}$

74.  $-0,7 < \log(m/m_{\odot}) < 1,7 \rightarrow 0,2 < m/m_{\odot} < 50$

75.



Bij een bepaalde L behoort slechts één waarde van m (onafhankelijk van R en T:

$\log L = 4 \log m$  volgens Eddington).

Opm.: de linkeronderhoek blijft open, d.w.z. de relatie geldt niet voor witte dwergen.

76. De massa's variëren weinig, de stralen variëren sterk. Dus de dichtheden nemen zeer sterk af in de richting dwerg  $\rightarrow$  reus  $\rightarrow$  superreus.

$$\begin{aligned} \text{Schatting: } m_{\text{dwarf}} : m_{\text{reus}} : m_{\text{superreus}} &= 0,6 : 7 : 26 \\ R_{\text{d}} : R_{\text{r}} : R_{\text{sr}} &= 0,9 : 30 : 500 \\ \rho_{\text{d}} : \rho_{\text{r}} : \rho_{\text{sr}} &= 0,9 : 3 \cdot 10^{-4} : 2 \cdot 10^{-7} \end{aligned}$$

Suggesties bij een vrijere behandeling met veel zelfwerkzaamheid, groepswork en discussie (hier is gebruik gemaakt van een voorstel van drs. A.B.M. Smit)

#### Algemene opmerkingen

Zodra u gepland heeft welke delen u als klasgesprek, als groepswork en individueel als huiswerk aan de orde gaat stellen, dan blijft er hier en daar tijd over, in de klas of als huiswerk. Deze gaten kunnen bijv. gevuld worden met:

- paragrafen uit de Appendix, die aansluiten op hoofdstukken 2, 3 en 4;
- korte voordrachten door leerlingen over onderwerpen uit de astronomie (uit boeken, tijdschriften, niet behandelde onderwerpen uit deze keuzegroep);
- herhaling van natuurkunde.

Leggen wij er de nadruk op dat de leerlingen zelfstandig een aantal inzichten moeten verwerven dan kunnen wij aan de reeds genoemde doelstellingen nog toevoegen:

- het in eigen woorden kunnen uitleggen hoe spectra van sterren gerangschikt kunnen worden;
- enkele (groepen van) spectrale lijnen noemen die bijzonder geschikt zijn voor spectrale classificatie en ook het sterkteverloop van deze lijnen door de spectrale reeks globaal kunnen aangeven.



## Suggesties per paragraaf

### 4.1. bis

#### Ontdekking van de spectrale reeks

De tekst van hoofdstuk 4 en zeker plaat XIII moet buiten het bereik van de leerlingen blijven. Geef alleen plaat XV en vertel daarbij dat dit een verzameling spectra is die alle onderling verschillen. Deze verzameling geeft een goed beeld hoe spectra van sterren er uitzien (negatieven!).

Opdracht voor de leerlingen: Wat valt je op aan deze spectra? Verschillen de spectra veel of weinig? Kun je er systeem in ontdekken (knip daartoe de spectra los)?

- Sommige leerlingen zullen de spectra in twee reeksen rangschikken. Vraag dan of het ook in één reeks kan?
- Controleer of iedereen hetzelfde vindt (de spectrale typen nog niet geven!).
- In een klasgesprek volgt een inventarisatie en discussie over de gevonden ordeningsprincipes.
- Bespreking van § 4.1: rangschikking in de reeks 0, ..., M. In deze volgorde gerangschikt zien we een kleurverandering in de sterren (temperatuurreeks nog niet noemen).
- Mogelijk huiswerk: § 4.1; enkele met name te noemen spectra uit plaat XV identificeren met behulp van plaat XIII; vraag 56.

#### Opmerking:

Uit enkele steekproeven met leerlingen is gebleken dat zij zeer goed in staat zijn zelfstandig de spectra te rangschikken, vaak zelfs op de open vraag: kun je er systeem in ontdekken? (de leerlingen waren onbekend met spectra).

Allen vonden (soms met enkele verwisselingen) de bekende spectrale reeks. Een ander resultaat van deze werkwijze is dat de leerlingen kunnen aangeven, welke lijnen zij hoofdzakelijk bij de identificaties gebruiken. Zij geven juist die lijnen aan die ook in de historie van de spectrale classificatie een grote rol hebben gespeeld. De leerlingen waren zeer gemotiveerd om meer over spectra te ontdekken.

### 4.2 bis

#### Spectrale reeks als temperatuurreeks

Ook hier moeten de leerlingen de tekst van § 4.2 nog niet lezen. Vragen:

- Waardoor kunnen spectra van elkaar verschillen? Waardoor ontstaat een reeks? Bij de discussie zullen de leerlingen zelf wel concluderen dat vooral de temperatuur het uiterlijk van het spectrum bepaalt (misschien zeggen ze zelfs wel de effectieve temperatuur). Geef de tabel uit figuur 21 met verwijzing

naar § 2.6.

- Met welke wetten kunnen wij het sterkteverloop van spectrale lijnen langs de reeks misschien begrijpen?

Leidt vraag 57 in. Laat de klas deze oplossen (individueel of in groepjes; daarna bespreken).

- Eventueel huiswerk: vragen 58-63, deze de volgende les grondig bespreken, eventueel daarna nog aanvullende vragen.

4.3 bis

Het H.R.D.

Als de leerlingen vraag 63 gemaakt hebben, bespreek dan deze zodanig dat het verrassende van figuur 24 goed uitkomt. Bespreek figuur 24. De rest van de paragraaf kan geheel zelfstandig verwerkt worden. Daarna klassikale bespreking.

4.4 bis

Afmetingen van sterren

Een kwalitatieve inleiding in deze paragraaf kan zijn:

- De effectieve temperatuur van de G5-ster Capella is iets lager dan die van de G2-ster de Zon. Toch is Capella bijna 100x zo lichtsterk. Hoe kan dat? Hoeveel maal zo groot is Capella vergeleken bij de zon? (oppervlak is ongeveer 100x oppervlak zon, dus de straal ongeveer 10x de straal van de zon).
- Vraag 67 in groepjes in de klas maken ( of als huiswerk). Na het bespreken van deze vraag kan de rest zelfstandig gemaakt worden.
- Belangrijkste conclusies van deze paragraaf samenvatten.

4.5 bis

Massa's van sterren

Deze paragraaf is in te leiden met de volgende vragen:

- Van welke ster kennen wij de massa al?
- Hoe is die bepaald?
- Hoe kun je dan van andere sterren de massa bepalen? De paragraaf kan geheel als huiswerk worden voorbereid. Bespreek vooral de witte dwergen (vraag 72): zie 4.5 hierboven. Als u hoofdstuk 5 niet behandelt kunt u eventueel een leerling een spreekbeurt laten voorbereiden over witte dwergen en ontaarde materie.

Aansluitend aan deze paragraaf kunt u Appendix § 4.5 A behandelen.

## HOOFDSTUK 5

### Doelstellingen en gezichtspunten:

De globale doelstellingen in dit hoofdstuk zijn:

- De structuur en evolutie van sterren te begrijpen door modellen te maken van de onzichtbare inwendigen. Een ster is volledig bepaald door de massa en de momentane chemische samenstelling (die afhankelijk is van de afstand tot het centrum). De duur van de verschillende evolutiefasen is sterk verschillend en tevens afhankelijk van de massa van de ster. Met deze resultaten is de verdeling van sterren in het HRD te begrijpen. Toepassing van de verworven inzichten voor individuele sterren brengt inzicht in (en stelt verdere vragen naar) de structuur en de evolutie van het melkwegstelsel.

De onderstaande specifieke doelstellingen en gezichtspunten dienen ondergeschikt te blijven aan de globale doelen:

- Leerlingen moeten de twee mechanismen van energievrijmaking: contractie en kernfusie kennen en weten in welke evolutiefasen elk der mechanismen een dominerende rol speelt.
- Het model van het sterinwendige wordt door 4 differentiaalvergelijkingen (voor  $dp/dr$ ,  $dm/dr$ ,  $dL/dr$  en  $dT/dr$ ), de toestandsvergelijking (bijv. de gaswet) en de energievrijmaking  $\epsilon(\rho, T)$  in W/kg. Leerlingen dienen de drie eerstgenoemde differentiaalvergelijkingen zelf te kunnen opstellen, en enig denkbeeld te verkrijgen over de oplossing van de zes gekoppelde vergelijkingen, met randvoorwaarden en de kwalitatieve resultaten (als in fig. 33).
- Leerlingen dienen de evolutie van een ster te begrijpen als een alterneren tussen gravitatiecontractie en kernfusie, waarbij tijdens kernfusie de chemische samenstelling in het sterinwendige geleidelijk verandert. Leerlingen dienen globaal de evolutiesporen in een HRD te kunnen tekenen.
- Uit de globale relatieve tijdschalen van de verschillende evolutiefasen moeten de leerlingen de verdeling van de sterren over het HRD kunnen verklaren.
- Zij moeten kunnen aangeven waarom zware sterren zich veel sneller en ook wat anders ontwikkelen dan lichte sterren. Ook moeten zij het principe van de ouderdomsbepaling van open sterhopen kunnen aangeven.
- De kennis over de evolutie van individuele sterren moeten zij kunnen inpassen in de structuur en de "chemische evolutie" van het melkwegstelsel: de "chemische evolutie" in het melkwegstelsel.
- Leerlingen moeten een overzicht kunnen geven van de verschillende methoden van onderzoek die in deze keuzegroep worden beschreven en het dynamische proces van wetenschapsbeoefening door "steeds verder te vragen" met voorbeelden kunnen illustreren.

Wijze van behandelen, onderstelde voorkennis, benodigde tijd, literatuur:

De paragrafen 5.3 en 5.4 stellen relatief de hoogste eisen aan het begrip; dit gedeelte moet daarom in een betrekkelijk rustig tempo behandeld worden.

De overige paragrafen bevatten grote delen die de leerlingen zelf lezend kunnen verwerken ("leesstof") en waarvan alleen de grote lijn vastgesteld dient te worden.

Desgewenst kunt u ook bepaalde delen "vertellend kortsluiten". Ook in de vraagstukkenverzameling kan, met name in paragrafen 5.5 en volgende, flink gesnoeid worden.

Voor de behandeling van het gehele hoofdstuk zijn 5 lessen voldoende.

Natuurkundige voorkennis: enkele begrippen, bijv. kernfusie, hydrostatisch evenwicht worden opgehaald.

Sterrekundige voorkennis voor § 5.7 en 5.8: globale kennis van de structuur van het melkwegstelsel.

Bij de betrekkelijk compacte tekst bestaat er wellicht zowel bij de docenten als bij sommige leerlingen behoefte er wat omheen te kunnen lezen. Behalve het reeds genoemde boek: C. de Jager en E.P.J. van den Heuvel: "Ontstaan en levensloop van sterren" (Thieme, 1972) zijn er de laatste jaren een aantal artikelen verschenen in "Hemel en Dampkring" (nu "Zenith") en "Natuur en Techniek". Uit laatstgenoemd tijdschrift noemen wij twee algemene artikelen van E.P.J. van den Heuvel: de biografie van een ster (N en T 40e jaargang no. 4 en 5, 1972).

Opmerkingen en suggesties bij de paragrafen:

5.1

Deze paragraaf sluit onmiddellijk aan op § 4.6. Het is van belang de leerlingen aan te moedigen zelf ook vragen te formuleren; andere voorbeelden: waarom zijn reuzen zo ijl en witte dwergen zo compact?

5.2.

Deze paragraaf kan direct als huiswerk worden opgegeven waarna een korte bespreking voldoende zal zijn.

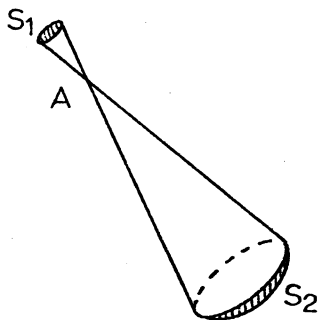
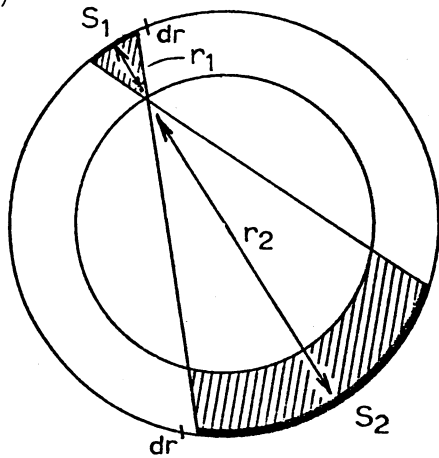
Uit verhoudingen tussen een radioactieve isotoop en de isotoop die als splijttingsproduct ontstaat (Pb/U; K/A) schat men dat de aardkorst ongeveer  $4,5 \times 10^9$  jaar geleden gevormd is. Op dezelfde wijze blijkt dat meteorieten  $4,6 - 4,9 \times 10^9$  jaren oud zijn. De zon is dus ongeveer  $5 \times 10^9$  jaar geleden gevormd.

Verderop in deze handleiding geven wij achtergrondgegevens bij gravitatiecontractie, een schatting van de centrale temperatuur van de zon en meer gegevens over kernfusieproblemen.

5.3

Het is van belang dat de leerlingen de differentiaalvergelijkingen 14, 15 en 16 zelf kunnen afleiden. Daarom wordt (14) stukje voor stukje opgebouwd in vragen 80 en 81. Bij (15) en (16) wordt steeds meer aan de leerling overgelaten. U kunt § 5.3a tegelijk met § 5.2 als huiswerk opgeven. Nadat § 5.3a besproken is kan de rest van § 5.3 (eventueel met § 5.4) vrijwel zonder voorbespreking als huiswerk worden opgegeven.

a)



De bewering dat bij een bolsymmetrische massaverdeling  $\rho(r)$  de massa buiten de bol met straal  $r$  geen bijdrage levert tot de gravitatieversnelling  $g(r)$ , op afstand  $r$  van het centrum kunt u desgewenst iets eleganter aannemelijk maken met behulp van nevenstaande figuur.

De aangegeven schilsectoren  $S_1$  en  $S_2$ , met massa's  $m_1 = \rho(r)S_1 dr$  en  $m_2 = \rho(r)S_2 dr$  dragen tot de gravitatieversnelling in A bij:

$$f \frac{\rho(r)S_1 dr}{r_1^2} - f \frac{\rho(r)S_2 dr}{r_2^2} = 0, \text{ want}$$

$$S_1 / S_2 = r_1^2 / r_2^2$$

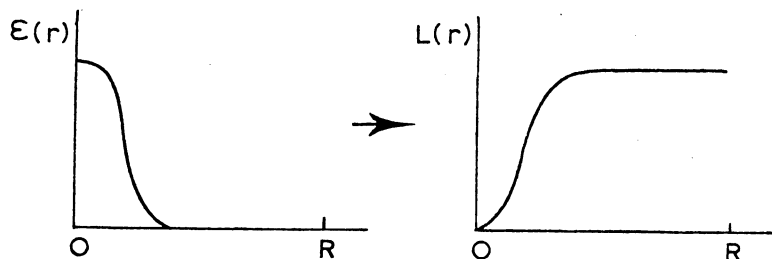
Hierna kunt u de leerlingen zo goed mogelijk "aanpraten" dat  $g(r) = f \frac{m(r)}{r^2}$ , een zuiver bewijs ligt te diep (zie achtergrondgegevens verderop in deze handleiding).

b) Voor de toestandsvergelijking (gaswet, ontaarde materie) volgen enkele achtergrondgegevens verderop in deze handleiding.

c) Wellicht is het nuttig te memoreren dat de "lichtsterkte" (het vermogen van de stralingsstroom door de hele ster met straal  $R$ ) gelijk is aan  $L(R) = 4\pi R^2 E$  met  $E = \sigma T_{\text{eff}}^4$  (formules 5, 11).

Vraag 83 c loopt al enigszins vooruit op § 5.4. U kunt daar in een klasgesprek nog de volgende vraag aan verbinden (vooruitlopend op fig. 33 en vraag 84): Schets globaal het verloop van  $\epsilon(r)$  ( $p$  en  $T$  nemen naar het centrum toe!). Schets daarna  $L(r)$  (naar formule (16) kijkend en ook aanschouwelijk!).

Oplissing:



Deze vraag kan ook na vraag 84e behandeld worden.

d) De differentiaalvergelijkingen voor het temperatuurverloop  $dT(r) / dr$  zijn door de leerlingen niet af te leiden. Wel kunt u vragen of  $dT / dr$  positief of negatief is.

De vergelijkingen voor het temperatuurverloop zijn:

- Indien uitsluitend energie door straling:

$$\left( \frac{dT(r)}{dr} \right)_S = - \frac{L(r) \cdot 3k}{4\pi r^2 \cdot 16\sigma T^3}$$

hierin is  $k$  de absorptiecoëfficiënt per eenheid van lengte, op een speciale wijze gemiddeld over de golflengten.

- Indien het energietransport volledig door convectie geschiedt dan stelt zich een temperatuursgradiënt in die een klein beetje groter is dan de adiabatische temperatuursgradiënt:

$$\left( \frac{dT(r)}{dr} \right)_{ad} = \left( 1 - \frac{c_p}{c_v} \right) \cdot \frac{T(r)}{P(r)} \cdot \frac{dP(r)}{dr}$$

De werkelijke gradiënt  $dT/dr$  wordt gevonden door zowel  $(dT/dr)_S$  als  $(dT/dr)_{ad}$  uit te rekenen. Blijkt  $(dT/dr)_S < (dT/dr)_{ad}$  dan geldt:  $dT/dr = (dT/dr)_S$ : energietransport vindt uitsluitend plaats door straling. In het tegenstelde geval treedt convectie op, in goede benadering geldt dan:  $dT/dr = (dT/dr)_{ad}$ . Meer achtergrondinformatie vindt u verderop in deze handleiding.

#### 5.4

Deze paragraaf vraagt een rustige bespreking. Het is mogelijk om de leerlingen kwalitatief het begrip bij te brengen dat de vier differentiaalvergelijkingen samen met de toestandsvergelijking en met  $\varepsilon(P,T)$  op te lossen zijn, mits de randvoorwaarden gegeven zijn.

Opmerking: Het aantal gegeven randvoorwaarden is te groot: zij kunnen strijdig zijn. De klassieke aanpak komt er op neer dat twee scharen modellen door numerieke integratie berekend worden 1) één schaar met als startpunt het centrum, met  $m(0) = 0$ ,  $L(0) = 0$  en aangenomen combinaties  $T(0)$  en  $P(0)$ ; 2) een tweede schaar van de rand  $r = R$  uit, met  $T(R)$ ,  $P(R)$ ,  $m(R)$  en  $L(R)$ . Uit deze scharen zoekt men dan die exemplaren bijeen die vloeiend op elkaar aansluiten. Het is ons inziens niet noodzakelijk dit met de leerlingen te behandelen.

De belangrijke conclusie dat de bouw (en dus ook het "uiterlijk") van een ster volledig bepaald is door de totale massa en de chemische samenstelling is bepaald niet zo maar in te zien. Deze conclusie moet dus voorgesteld worden als een "mededeling zonder bewijs".

Figuur 33 verdient nauwkeurig bekeken te worden, vraag 84 helpt daarbij.

## 5.5

Deze paragraaf kunnen de leerlingen heel goed zelf bestuderen; bij de bespreking kunnen de hoofdlijnen worden vastgelegd. Een gedeelte van deze paragraaf is "leesstof": het is niet de bedoeling dat alle feiten en gegevens bijv. in paragraaf 5.5d worden gememoriseerd!

- a) Een nauwkeurige beschouwing leert dat de helft van de vrijkomende gravitatie energie wordt gebruikt voor temperatuursverhoging, de andere helft verlaat de ster als straling (zie ook: achtergrondgegevens: energie uit contractie verderop in deze handleiding).
- b) -
- c) -
- d) De pulsars "flitsen" ook in het optische gebied. Flitsen met periodes van 1/30 seconde kunnen niet zonder meer waargenomen worden. Men heeft zeer speciale apparatuur nodig om de pulsen te registreren. De ontdekking van pulsars was dan ook toevallig.

Leerlingen vinden het niet eenvoudig om hoofdzaken samen te vatten. Daarom zou een uitdrukkelijke opdracht daartoe heel nuttig zijn; een discussie over de resultaten kan een interessant klasgesprek opleveren.

Een globale verklaring van het optreden van "lussen" in evolutiesporen: een ster dijt uit wanneer er een (nieuwe) "brandende" schil optreedt; zodra de buitenste schil (tijdelijk) dooft krimpt de ster als geheel weer in.

Verderop in deze handleiding geven wij enige achtergrondgegevens bij ontaarde materie.

Het stukje gravitatie contractie en kernfusie dient om het belang van de gravitatie contractie tijdens bepaalde evolutiefasen te onderstrepen. De leerlingen kunnen zelf die fasen noemen (protoster - contractie van de uitgedoofde sterren - witte dwergen).

Het boek van De Jager en Van den Heuvel: "Ontstaan en levensloop van sterren" geeft gedetailleerde achtergrondinformatie bij deze paragraaf op een ook voor geïnteresseerde leerlingen geschikt niveau.

## 5.6

Het eerste gedeelte (tot en met de opmerking na vraag 93) is belangrijk omdat hier de resultaten van berekeningen met theoretische modellen voor sterinwendigen worden gebruikt om de verdeling van de sterren over het HRD te verklaren. Nu is de noodzaak voor een goede statistiek (zie § 4.3) ook duidelijk. Bij de nabespreking dient onderstreept te worden dat de theoretische modellen van onzichtbare sterinwendigen in hoofdzaken juist moeten zijn omdat de in het HRD vastgelegde waarnemingsfeiten omtrent de buitenkant van de sterren zo treffend worden weergegeven (zie § 5.8 begin).

Met de term "actieve leven van een ster" in de aanhef van deze paragraaf bedoelen wij de evolutiestadia waarbij kernfusieprocessen energie leveren.

Het laatste gedeelte "ouderdomsbepalingen van open sterhopen" kan door de leerlingen zelf worden uitgewerkt. U kunt echter tijd besparen door de hoofdzaken samen te vatten. Een globaal begrip is wel nodig voor de volgende paragraaf.

#### 5.7

Deze paragraaf kunnen de leerlingen zelf verwerken. Hier worden de verworven astrofysische inzichten "ingepast" in het ruimtelijk beeld van het melkwegstelsel. Daarmee wordt tevens het in § 1.1 aangestipte thema omtrent de plaats van de astrofysica in de sterrekunde verduidelijkt.

De inpassing van astrofysische inzichten in een ruimtelijk beeld levert een aantal nieuwe inzichten op en stelt tevens een aantal intrigerende vragen naar de structuur en evolutie van melkwegstelsels. Leerlingen krijgen door de aard en de wijze van aanbieding van de "schoolnatuurkunde" gemakkelijk een veel te statische indruk van de natuurwetenschappen. Het in dit keuzeonderwerp behandelde thema leent zich bij uitstek om exemplarisch de dynamische ontwikkeling van een natuurwetenschap tot in het heden te laten "meebelevan". De leerlingen kunnen op verschillende plaatsen in dit keuzeonderwerp zien hoe nieuwe inzichten op de voet gevolgd worden door nieuwe vragen en nieuwe ontwikkelingen.

#### 5.8

Het in het begin van deze paragraaf gegeven overzicht dient uitsluitend om de grote lijn in dit hoofdstuk aan te geven. Het past in de gekozen opzet om niet alleen de indrukwekkende verworvenheden aan te geven, maar ook te wijzen op lacunes en tegenstrijdigheden.

De drie globale methoden die wij in de in dit keuze-onderwerp behandelde astrofysica onderscheiden laten zich waarschijnlijk wel generaliseren tot algemene aspecten van de natuurwetenschappelijke werkwijze. Het zou interessant zijn om na te gaan of leerlingen in een klasseggesprek zelf tot een dergelijk onderscheid kunnen komen. Het betoog dat de hypothese van de algemene geldigheid van de natuurwetten over een groot bereik in ruimte en tijd tot dusverre treffend is bevestigd blijkt de leerlingen vaak bedroevend weinig te schokken: dat schijnt al gesneden koek te zijn. Om de geesten wat op te schudden herinneren wij aan de schok die de ontdekking van witte dwergen heeft veroorzaakt (de jaartallen dienen ter illustratie, niet ter memorisatie).

De dynamica van de natuurwetenschappen, gedreven door de nieuwe vragen, die achter verklaringen en feiten oprijzen, leek ons een passend (en naar wij hopen: pakkend) onderwerp tot besluit.



Antwoorden op vragen:

77. a) totale energie:  $E = mc^2 = 10^{30} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 9 \cdot 10^{46} \text{ J}$

tijd die de zon kan stralen:  $t = \frac{9 \cdot 10^{46}}{4 \cdot 10^{26}} = 2 \cdot 10^{20} \text{ sec} = 7 \cdot 10^{12} \text{ jaar}$

b) ja, de ouderdom van de zon veel kleiner ( $\sim 5 \cdot 10^9$  jaar)

78. Kernfusie

79. a)  $E = mc^2 = \frac{4,8 \cdot 10^{-29} \cdot (3 \cdot 10^8)^2}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^6} \text{ MeV} = 27 \text{ MeV}$

b) 1 kg waterstof bevat  $6 \cdot 10^{26}$  protonen

4 protonen geven 27 MeV

1 kg waterstof levert:  $\frac{1}{4} \cdot 27 \cdot 6 \cdot 10^{26} = 4 \cdot 10^{27} \text{ MeV}$

c)  $m_{\odot} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$  bij omzetting komt vrij  $8 \cdot 10^{57} \text{ MeV} = 13 \cdot 10^{44} \text{ J}$

tijd:  $t = \frac{13 \cdot 10^{44}}{4 \cdot 10^{26}} = 3 \cdot 10^{18} \text{ sec} = 10^{11} \text{ jaar}$ , ruimschoots voldoende voor de leeftijd van de zon

d) de zon levert  $4 \cdot 10^{26} \text{ J/s}$

$E = mc^2$

$4 \cdot 10^{26} = m \cdot 9 \cdot 10^{16} \Rightarrow m = 4 \cdot 10^9 \text{ kg/s}$  (vraag de leerlingen of dat veel is in bijv.  $10^9$  jaar).

80.  $F_{\text{opw}} = F_{\text{ondervlak}} - F_{\text{bovenvlak}} = p_0 - (p + \Delta p)_0 = -\Delta p \cdot 0$

81. a)  $F_{\text{grav}} = f \frac{m_1 m_2}{r^2}$   $m_1 = m(r)$  de massa in de bol "onder" het elementje.  
 $m_2 = \Delta m = \rho(r) \Delta r$  de massa van het elementje

b)  $F_{\text{grav}} = F_{\text{opw}}$

$f \frac{m(r) \cdot \rho(r) \Delta r}{r^2} = -\Delta p \cdot 0$

c) De druk in de ster neemt van binnen naar buiten af. Dus hier is  $p + \Delta p < p$  (fig. 30).

$\frac{\Delta p}{\Delta r} = -f \frac{\rho(r) \cdot m(r)}{r^2}$

$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta r} = \frac{dp}{dr}$

82.  $\Delta m(r) = \rho(r) \cdot \frac{4}{3} \pi [(r + \Delta r)^3 - r^3]$   $\Delta r \ll r$

$\Delta m(r) = \rho(r) \cdot 4\pi r^2 \Delta r$

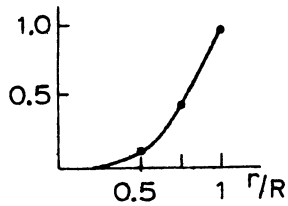
In de limiet voor  $\Delta r \rightarrow 0$  geeft dat:  $\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$

83. a)  $\Delta L(r) = \Delta m(r) \cdot \epsilon(r) = 4\pi r^2 \rho(r) \epsilon(r) \Delta r$

c)  $L(r)$  blijft daar constant ( $\epsilon(r) = 0!$ , ook in aanschouwelijke termen laten uitleggen).

84. a)  $m(r) = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$

b)



$$\frac{m(r)}{m(R)} = \left(\frac{r}{R}\right)^3$$

c) in de zon is  $\rho(r)$  niet constant doch  $\rho$  neemt zeer sterk toe naar het centrum

d) binnen  $\frac{r}{R} = 0,34$

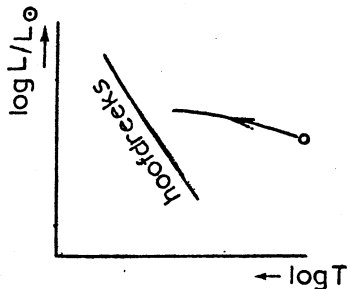
e)  $\frac{r}{R} < 0,20$

85. a) De potentiële energie neemt af.

b) Potentiële energie wordt omgezet in kinetische energie.

c) De druk wordt groter, want zowel de dichtheid als de temperatuur nemen toe.

86.



De protoster stijgt in temperatuur door de gravitatiecontractie. Ook de oppervlaktetemperatuur zal stijgen tijdens de eerste evolutiefase, d.w.z. de ster bevindt zich oorspronkelijk rechts van de hoofdreeks en "beweegt" zich in het HRD naar links.

87. Weinig verandering in de afmeting van de ster: de ster wordt van  $1 \rightarrow 2$  iets groter (want  $L$  neemt toe, maar  $T_{\text{eff}}$  neemt af, dus het oppervlak moet toenemen - ook uit lijnen voor constante straal (vraag 67) te zien).

88. Het evolutiespoor is ongeveer horizontaal d.w.z.  $L/L_{\odot} = \text{constant}$ .

89. Vergelijk met de lijnen voor constante straal (vraag 67), maar beter opnieuw de kwalitatieve redenering: de temperatuur neemt sterk af, de lichtsterkte blijft vrijwel constant dus moet het oppervlak  $= 4\pi R^2$  sterk toenemen.

90.  $10^8 - 10^{11} \text{ kg/m}^3$  komt overeen met  $10^2 - 10^5 \text{ kg/cm}^3$  (massa per  $\text{cm}^3$  sluit meer aan bij de ervaringswereld); neutronenster:  $10^{12} \text{ kg/cm}^3$ !

91. a) Bij de vorming van een zware ster wordt meer gravitatie energie in kinetische energie omgezet. De afmetingen zijn ongeveer gelijk. Binnen de zware ster zal dan een grotere druk heersen en een hogere temperatuur.

b) De reactiesnelheid neemt zeer sterk toe met toenemende T (§ 5.2).

c) Door de hogere temperatuur verlopen alle kernfusieprocessen veel sneller. Ondanks het feit dat er meer brandstof is, is het toch sneller op, omdat de hoeveelheid brandstof recht evenredig is met de massa van de ster en de toeneming van de reactiesnelheid blijkbaar evenredig is met een hogere macht van de massa.

92. a)  $3 \text{ }^4_2\text{He} \rightarrow \text{ }^{12}_6\text{C}$  Massadefect:  $0,00780 \text{ ame} = 1,29 \cdot 10^{-29} \text{ kg}$

dit komt overeen met een energie:

$$\frac{1,29 \cdot 10^{-29} \cdot (3 \cdot 10^8)^2}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^6} \text{ MeV} = 7,3 \text{ MeV.}$$

1 kg  $^4_2\text{He}$  bevat  $\frac{1}{4} \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{23} = 1,5 \cdot 10^{26}$  deeltjes

per 3  $^4_2\text{He}$  deeltjes komt 7,3 MeV vrij dus per kilogram  $^4_2\text{He}$  komt vrij:  
 $\frac{1}{3} \cdot 1,5 \cdot 10^{26} \cdot 7,3 = 3,6 \cdot 10^{26} \text{ MeV.}$

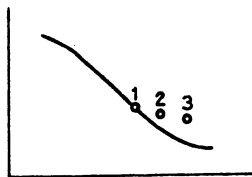
b) Waterstoffusie is 10x zo voordelig!

c) Uit figuur 34 zien we dat voor traject 6 - 9 de lichtsterkten vrijwel constant blijven. De heliumverbranding levert minder energie per kg dan waterstoffusie; er moet dus meer massa per tijdseenheid worden omgezet. De helium voorraad is dus sneller uitgeput.

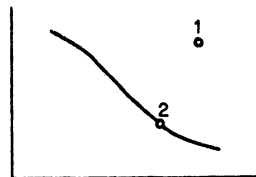
93. Door de snellere evolutie is de kans dat je ze als goed zichtbare sterren betrapt veel kleiner.

94. Grote massa veroorzaakt snelle evolutie (zie vraag 92).

95.

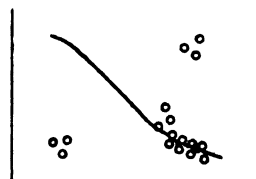


96.



97. a) 4; 2; 1; 3.

b)



98. a) O t/m K (detail: M nog niet: te lange contractietijd);  
 b) Zeker geen O-sterren, voor andere groepen geen O,B meer, voor nog andere geen O,B,A sterren meer, enz.
99. Door vast te stellen welke spectrale typen nog op de hoofdreeks voorkomen.
100. Oudste NGC 188; jongste h en  $\chi$  Persei.
101. Metaalgehalte van de zon is ongeveer 0,2 % (zie fig. 21).  
 Metaalgehalte in bolvormige sterhopen 0,01 - 0,001 %.

### Achtergronden

#### 1. Energie uit gravitatiecontractie:

De energie die vrijkomt als een element met massa  $m$  "valt van  $\infty \rightarrow R$ " in het veld van een massa  $M$  in  $r = 0$  bedraagt:

$$\int_R^{\infty} f \frac{M \cdot m}{r^2} dr = f \frac{M \cdot m}{R} \quad (D7)$$

Onderstellen wij dat de contraherende wolk voortdurend sferisch symmetrisch en homogeen blijft dan vinden wij, met  $M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$  en  $m = 4\pi r^2 \rho dr$  (bolschil), dat de energie die vrijkomt totdat de hele gaswolk samengetrokken is tot een bol met straal  $R$ :

$$\int_0^R f \cdot \frac{16}{3} \pi^2 r^4 \rho^2 dr = \frac{3}{5} f \frac{M^2}{R} \quad (D7a)$$

Voor niet-homogene bollen (doch wel met sferisch symmetrische massaverdeling  $\rho(r)$ ) vindt men dezelfde uitdrukking met een andere voorfactor. Voor de zon krijgt men  $1,5 f \frac{M^2}{R} = 5,5 \cdot 10^{41} \text{ J}$ .

De energie die de zon nu per jaar uitstraalt is  $1,2 \cdot 10^{34} \text{ J}$ . Indien de zon alle energie uit gravitatiecontractie zou winnen en altijd met het huidige vermogen zou hebben gestraald, dan zou de zon  $4,6 \cdot 10^7$  jaar oud zijn. In de tijd dat deze theorie werd opgesteld (Helmholtz, midden 19e eeuw en later Kelvin) achtte men deze leeftijd ruimschoots voldoende.

#### 2. Schatting van de centrale temperatuur van de zon:

Men kan op de volgende eenvoudige manier een orde van grootte schatting maken van de temperatuur in het centrum van de zon (dit zou met de leerlingen behandeld kunnen worden):

Ruwe benaderingen: bij deze schatting zijn:

- constante dichtheid;  $\rho(r) = \rho = 1,4 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
- gravitatieversnelling constant en gelijk aan de gravitatieversnelling aan het oppervlak van de zon;  $g(r) = g = 27 g_{\text{aarde}} = 265 \text{ m/s}^2$



PP II	$H^1 + H^1 \rightarrow D^2 + \beta^+ + \nu$	1,19 MeV
	$D^2 + H^1 \rightarrow He^3 + \gamma$	5,49
	$He^3 + He^4 \rightarrow Be^7 + \gamma$	1,58
	$Be^7 + e^- \rightarrow Li^7 + \gamma + \nu$	0,05
	$Li^7 + H^1 \rightarrow 2He^4$	17,34
	<hr/>	
	netto: $4H^1 \rightarrow He^4 + 2\beta^+ + 2\nu + 2\gamma$	25,65 (4 % $\nu$ -verliezen)

PP III	$H^1 + H^1 \rightarrow D^2 + \beta^+ + \nu$	1,19 MeV
	$D^2 + H^2 \rightarrow He^3 + \gamma$	5,49
	$He^3 + He^4 \rightarrow Be^7 + \gamma$	1,58
	$Be^7 + H^1 \rightarrow B^8 + \gamma$	0,14
	$B^8 \rightarrow B^{8*} + \beta^+ + \nu$	7,70
	$B^{8*} \rightarrow 2He^4$	3,00
	<hr/>	
	netto: $4H^1 \rightarrow He^4 + 2\beta^+ + 2\nu + 2\gamma$	19,10 (29 % $\nu$ -verliezen)

Voor temperaturen  $T > 1,5 \cdot 10^7$  K:

De CNO-cyclus

$C^{12} + H^1 \rightarrow N^{13} + \gamma$	( $10^7$ jaar)	1,95 MeV
$N^{13} \rightarrow C^{13} + \beta^+ + \nu$	(7 min)	1,50
$C^{13} + H^1 \rightarrow N^{14} + \gamma$	( $3 \cdot 10^6$ jaar)	7,54
$N^{14} + H^1 \rightarrow O^{15} + \gamma$	( $3 \cdot 10^6$ jaar)	7,35
$O^{15} \rightarrow N^{15} + \beta^+ + \nu$	(80 sec)	1,73
$N^{15} + H^1 \rightarrow C^{12} + He^4$	( $10^5$ jaar)	4,96

of (één op de 1000 keer):

$N^{15} + H^1 \rightarrow O^{16} + \gamma$	12,11 MeV
$O^{16} + H^1 \rightarrow F^{17} + \gamma$	0,59
$F^{17} \rightarrow O^{17} + \beta^+ + \nu$	1,76
$O^{17} + H^1 \rightarrow N^{14} + He^4$	1,20

15,66

Netto:  $4H^1 \rightarrow He^4 + 2\beta^+ + 2\nu + 2\gamma + 26,72$  MeV (inclusief  $\nu$ -energie)

Een deel van energie die bij de kernfusies vrijkomt wordt meegenomen door neutrino's  $\nu$ ; bij de PP III cyclus zelfs 29 %. De neutrino's (geen lading en rustmassa, wel impuls en energie) vliegen dwars door de zon heen, en ook door de aarde (in tegenstelling tot fotonen behorend bij de temperatuurstraling!).

Per seconde zet de zon om:  $\frac{4 \cdot 10^{26} \text{ J}}{6,5 \cdot 10^{14} \text{ J/kg}} = 6 \cdot 10^{11} \text{ kg H} = 4 \cdot 10^{37} \text{ H atoomkernen}$ .  
 Hierbij komen dus  $2 \cdot 10^{37}$  neutrino's vrij, deze gaan op de afstand van de aarde, per seconde door een bol met oppervlak  $4\pi R^2$  ( $R$  = afstand aarde - zon) =  $1,7 \cdot 10^{23} \text{ m}^2$ . Door elke  $\text{m}^2$  op aarde vliegen dus per seconde  $\frac{2 \cdot 10^{37}}{1,7 \cdot 10^{23}} \approx 1,2 \cdot 10^{14}$  neutrino's van de zon. Ze nemen ongeveer 5 % van de totaal opgewekte energie

mee ( $2 \cdot 10^{25}$  J/s).

Men tracht thans deze neutrino's te detecteren, door gebruik te maken van de reactie  $C1^{37} + \nu \rightarrow A^{37} + e^-$  welke in een zeer klein aantal gevallen zal optredne als gevolg van een (zeer zwakke) wisselwerking die de  $\nu$  toch nog bezitten t.o.v. C1-atoomkernen. Het argon is radioactief en kan met telbuizen worden gedetecteerd. Dit experiment, dat met een grote tank met C1 wordt uitgevoerd, in een oude kolenmijn in South Dakota is helaas nog steeds niet gelukt.

#### Belang der verschillende cycli in de zon:

In de zon wek PP I ongeveer 56 % van de energie op  
PP II ongeveer 41 %  
PP III ongeveer 0,01 %  
en de CNO-cyclus 3 %.

De neutrino's van PP III hebben de grootste energie en daarom, daar de reactiekans met C1 evenredig is met  $E^2$ , de grootste kans om te worden gedetecteerd.

#### De afhankelijkheid van de reactiesnelheid van T, $\rho$ en van de aanwezige hoeveelheid van een bepaald element:

Noem de dichtheid  $\rho$ , de temperatuur T en de gewichtspercentages van de reagerende elementen:  $X_A$  en  $X_B$  en hun moleculair-gewichten:  $\mu_A$  en  $\mu_B$ .  
Dan zal het aantal deeltjes  $N_A$  en  $N_B$ , per volume-eenheid van deze elementen,

gelijk zijn aan  $\frac{X_A \cdot \rho}{\mu_A}$  en  $\frac{X_B \cdot \rho}{\mu_B}$ .

De reactiesnelheid zal evenredig zijn met:

- (I) de botsingskans der twee soorten deeltjes,
- (II) de energie van de botsende deeltjes.

Het is duidelijk dat deze tweede factor van de temperatuur van het gas zal afhangen. We veronderstellen dat dit verband is weergegeven door een functie  $f(T)$ .

(I) De botsingskans is evenredig met

$$N_A \cdot N_B = \frac{X_A \cdot X_B \cdot \rho^2}{\mu_A \cdot \mu_B} \quad (D8)$$

We verwachten dus, dat de per volume-eenheid opgewekte hoeveelheid kernenergie (per seconde) gelijk zal zijn aan

$$\epsilon_{AB} = \frac{X_A \cdot X_B \cdot \rho^2}{\mu_A \cdot \mu_B} \cdot f(T) \quad (D9)$$

Uit berekeningen blijkt dat men  $f(T)$  goed kan benaderen door

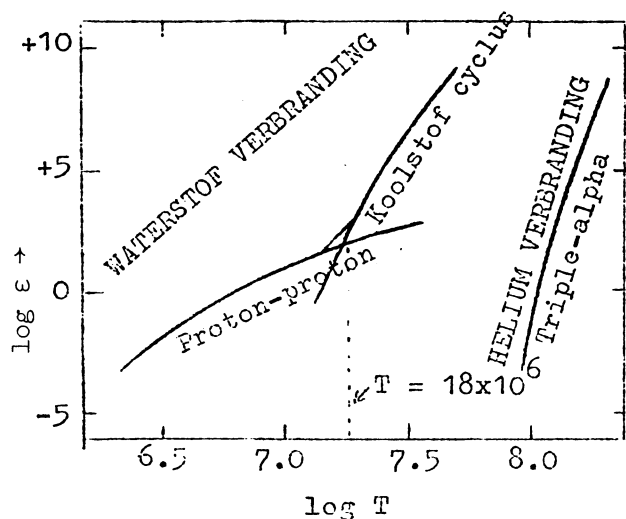
$$f(T) = kT^{\nu}$$

waarbij voor PP-cycli:  $\nu \approx 4$  } terwijl k een constante is die van de  
CNO-cyclus:  $\nu = 12$  } specifieke reactie afhangt.

We verwachten voor de PP-reeksen dus:

$$\epsilon_{PP} = X_H^2 \rho^2 T^4 \quad (D10)$$

en voor de CNO-cyclus:  $\epsilon_{CNO} = X_H X_C \rho^2 T^{12}$



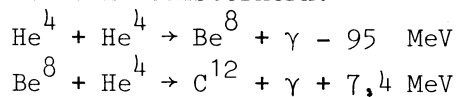
Beneden  $T = 18 \times 10^6 \text{ }^\circ\text{K}$  overheerst de p-p keten, daarboven overheerst de CNO-cyclus.

In de figuur is de afhankelijkheid van  $\underline{\epsilon}$  van de temperatuur weergegeven voor  $\rho X_H^2 = 100$  en

$$X_C = 0,005 X_H.$$

#### Het triple-alpha proces

Tevens ziet men in de figuur de energie-opwekking door middel van een derde reactie weergegeven, die pas voor  $T > 100 \times 10^6 \text{ }^\circ\text{K}$  een rol gaat spelen. Dit is het zgn. triple-alpha proces waarbij drie heliumkernen worden samengesmolten tot één koolstofkern.



$$\text{Netto: } 3 \text{ He}^4 \rightarrow \text{C}^{12} + 2\gamma + 7,305 \text{ MeV}$$

De  $\text{Be}^8$  kern is niet stabiel en valt weer uiteen in twee heliumkernen, waarbij 95 keV vrijkomt. Bij deze continue opbouw en afbraak van  $\text{Be}^8$  stelt zich een evenwicht in tussen heliumkernen en Be-kernen, waarbij er altijd een bepaalde evenwichtsconcentratie van  $\text{Be}^8$  aanwezig is. Deze  $\text{Be}^8$  kernen kunnen dan alpha-deeltjes vangen, waarbij ze overgaan in  $\text{C}^{12}$  waarbij energie vrijkomt.

Uit het voorgaande zal duidelijk zijn dat  $\epsilon_{3\alpha}$  evenredig zal zijn met  $\rho^3 Y^3$  en met een zekere macht van de temperatuur. ( $Y$  = gewichtsfractie helium). Er blijkt:

$$\epsilon_{3\alpha} = \text{const. } \rho^3 Y^3 T^{30}.$$

N.B.: alle hier genoemde snelheden van energie-opwekking zijn per volume-eenheid. Rekent men per gewichtseenheid, dan moeten alle snelheden met het volume van een gewichtseenheid vermenigvuldigd worden, hetgeen betekent dat men door  $\rho$  moet delen.

#### 4. Energietransport, vergelijkingen voor (dT/dr)

##### a) Energietransport uitsluitend door straling (stralingsevenwicht)

Wij volgen hier de terminologie zoals gebruikt in "elementen uit de theorie van het stralingstransport", gegeven als achtergrondinformatie bij hoofdstuk 2. Wij beperken de bespreking van het energietransport tot de delen van de ster waaruit fotonen niet direct kunnen ontsnappen (m.a.w.: voor vrijwel alle  $\lambda$  met optische diepten  $\tau_\lambda \gg 1$ ; in de zon is op ca. 100 km onder het niveau  $\tau$  (groen) = 1 al aan deze voorwaarde voldaan). Daardoor wordt het probleem van stralingstransport aanzienlijk vereenvoudigd. Doordat de fotonen niet direct kunnen ontsnappen is het mogelijk om een middelbare vrije weglengte  $\bar{l}$  voor het ensemble fotonen in te voeren. Daaruit kan een middelbare absorptiecoëfficiënt



$\bar{k} = 1/\bar{l}$  gedefinieerd worden. Met behulp daarvan definieert men een optische diepte  $\bar{\tau}(\mathbf{z}) = \int_0^{\infty} \bar{k} d\mathbf{z}$  (zodat de optische diepte eigenlijk een afstandschaal is, genormeerd met de vrije weglengte).

Voer verder in: de geïntegreerde intensiteit  $I \equiv \int_0^{\infty} I_{\lambda} d\lambda$ , de geïntegreerde flux  $E \equiv \int_0^{\infty} E_{\lambda} d\lambda$ ; wij hadden al  $B \equiv \int_0^{\infty} B_{\lambda} d\lambda = \sigma T^4$  (Stefan en Boltzmann).

Voor de geïntegreerde grootheden en voor  $\bar{\tau}$  kan de transportvergelijking (zie D1, hoofdstuk 2) als volgt geschreven worden

$$\mu \frac{dI(\bar{\tau}, \mu)}{d\bar{\tau}} = I(\bar{\tau}, \mu) - \frac{B(\bar{\tau})}{\pi} \quad \text{waarin } \mu = \cos \alpha \quad (D12)$$

Vermenigvuldig beide leden van (D12) met  $\mu$ , integreer over de hele ruimtehoek  $\frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \dots d\omega = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu$ , wissel differentiatie naar  $\bar{\tau}$  en integratie over  $\mu$  om:

$$\frac{d}{d\bar{\tau}} \left[ \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \mu^2 I d\mu \right] = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I \mu d\mu - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{B}{\pi} \mu d\mu \quad (D13)$$

$$\frac{d}{d\bar{\tau}} \left[ \frac{1}{2} \langle I \rangle \int_{-1}^{+1} \mu^2 d\mu \right] = \frac{1}{4} \frac{E}{\pi} - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{B}{\pi} \mu d\mu \quad (D14)$$

geschikte  
middelwaarde  $\langle I \rangle$

voor de definitie van  
E: zie monochromatische  
intensiteit hoofdstuk 2

B is isotroop

Op grotere diepte in de ster ( $E \gg 1$  is een voldoende voorwaarde) is het stralingsveld bijna isotroop en zuiver Plancks, dus de middelwaarde  $\langle I \rangle = B/\pi$ . Zo volgt uit (D14):

$$E_s(\bar{\tau}) = \frac{4}{3} \frac{dB(\bar{\tau})}{d\bar{\tau}} = - \frac{16 \sigma T^3(r)}{3 \bar{k}} \cdot \frac{dT(r)}{dr} = E_s(r) \quad (D15)$$

(Stefan en Boltzmann)

Aanschouwelijk is duidelijk dat de netto flux gedreven wordt door de anisotropie in het stralingsveld; d.w.z. door de gradient in bronfunctie of temperatuur.

Noemen wij de totale energiestroom (straling + convectie) door een bol met straal  $r$  om het middelpunt van de ster weer  $L_3$  dan is de netto energieflex per oppervlakte-eenheid:

$$E_t(r) \equiv \frac{L_r}{4\pi r^2} \quad (D16)$$

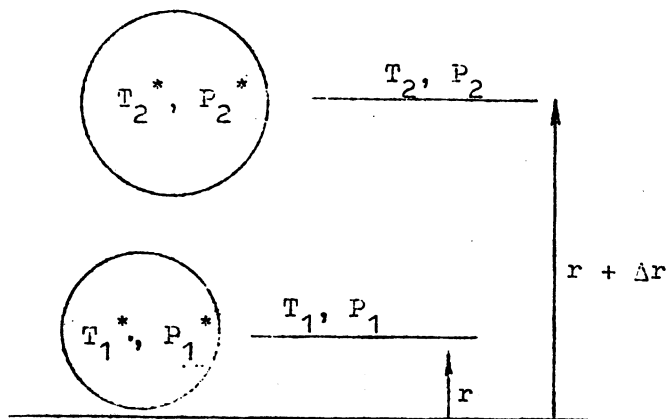
Bij stralingsevenwicht wordt energie uitsluitend door straling getransporteerd dus  $E_t = E_s$ , waaruit volgt:

$$\left( \frac{dT(r)}{dr} \right)_s = - \frac{3\bar{k}}{16\sigma T^3(r)} \cdot \frac{L_r}{4\pi r^2} \quad (D17)$$

(vergelijking van Eddington). Merk op dat de temperatuurgradient evenredig is met de middelbare absorptiecoëfficiënt  $\bar{k}$ .

b) Energietransport door straling of door convectie?

Aangezien gassen warmte slecht geleiden is convectie het belangrijkste alternatief voor transport door straling.



We willen nu onderzoeken of een gasbel die we iets naar boven verplaatsen, als gevolg van haar adiabatische uitzetting lichter dan haar omgeving zal worden of niet.

Op de hoogte  $r$  heersen druk  $P_1$  en temperatuur  $T_1$  in de atmosfeer, op de hoogte  $r + \Delta r$  heersen druk  $P_2$  en temperatuur  $T_2$  in de atmosfeer. We nemen aan dat op de hoogte  $r$  de bel aanvankelijk in temperatuur- en druk-evenwicht met haar omgeving is; dus  $T_{1*} = T_1$

$$P_{1*} = P_1.$$

Verder nemen we aan dat tijdens het omhoog brengen de bel steeds in druk-evenwicht met haar omgeving blijft:  $P_{2*} = P_2$ .

Daar we aannemen dat de bel adiabatisch uitzet kunnen we haar temperatuur  $T_{2*}$  berekenen met de adiabatenvergelijking:

$$\frac{T}{P^{(1-\frac{1}{\gamma})}} = \text{const.}, \text{ met } \gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (D18)$$

Dus:

$$T_{2*} = T_{1*} \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)} = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)} \quad (D19)$$

Als  $T_{2*} > T_2$ , dan is de bel lichter dan haar omgeving geworden en zal dus verder gaan stijgen. In dit geval is de laag dus instabiel en zal er convectie optreden. Analoog zal een eenmaal dalende bel in deze laag blijven dalen.

Als  $T_{2*} < T_2$ , dan is de omhoog gebrachte bel zwaarder dan haar omgeving geworden en zal dan weer gaan dalen. De laag is in dit geval stabiel (een naar beneden gebrachte bel zal bij loslaten weer stijgen).

(Deze regels gelden niet alleen voor sterren maar ook voor de aardse atmosfeer: bv. bij de vorming van convectieve cumulus bewolking op zomerdagen na verhitting van de ondergrond).

Algemene regel voor een stratosfeer is dus: er treedt convectie op als:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad} &> \frac{dT}{dr}, \text{ en als} \\ \left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad} &\leq \frac{dT}{dr} \text{ is er géén convectie} \end{aligned} \right\} \quad (D20)$$

Beide gradienten zijn negatief, er staat dus eigenlijk:

$$\left| \frac{dT}{dr} \right|_{ad} \leq \left| \frac{dT}{dr} \right|; \text{ (D20) wordt het Schwarzschild criterium genoemd.}$$

Hier is  $\left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad}$  de temperatuursgradient die in de bel optreedt tijdens het adiabatisch opstijgen. Deze gradient kan uit vgl. (D18) afgeleid worden:

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad} = \left(\frac{dT}{dP}\right)_{ad} \cdot \frac{dP}{dr} = \left(1-\frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr}$$

$$\text{dus } \left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} \quad (D21)$$

Men kan  $\left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad}$  dus uit het drukgradient in de laag berekenen.

Om te onderzoeken hoe in een bepaalde laag in het sterinwendige de energie getransporteerd wordt: of door straling of door de opstijgende convectiebellen (die hoger in de laag hun warmte afgeven) moet men dus beide gradienten

$\left(\frac{dT}{dr}\right)_s$  en  $\left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad}$  uitrekenen. Als  $\left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad} > \left(\frac{dT}{dr}\right)_{str}$  dan treedt convectief transport op (N.B.: beide gradienten zijn negatief).

Als  $\left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad} \leq \left(\frac{dT}{dr}\right)_{str}$  dan gaat het energietransport door middel van straling. Blijkt dat in een laag het energietransport door convectie geschiedt dan geldt voor sterinwendigen  $\left(\frac{dT(r)}{dr}\right)_{conv} = \left(\frac{dT(r)}{dr}\right)_{ad}$ , met (D21).

Treedt convectie reeds op in de steratmosfeer en in de lagen vlak daaronder dan neemt  $(dT/dr)_{conv}$  waarden aan die tussen  $\left(\frac{dT}{dr}\right)_s$  en  $\left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad}$  inliggen,  $(dT/dr)_{conv}$  kan dan op een ietwat ingewikkelder manier berekend worden.

#### Opmerkingen:

Voor lagen op  $\bar{\tau} \gg 1$  kan  $\bar{k}(T,P)$  uit  $k(T,P)$  berekend worden, wij geven de formule zonder bewijs:

$$\frac{1}{\bar{k}} = \int_0^{\infty} \frac{1}{k} \left[ \left(\frac{\partial B_{\lambda}}{\partial T}\right) / \left(\frac{\partial B}{\partial T}\right) \right] d\lambda \quad (D22)$$

Wij zien: een harmonisch gemiddelde: de kleine waarden  $k_{\lambda}$  dragen het sterkste bij tot  $\bar{k}$  bij. De gewichtsfunctie tussen de vierkante haken geeft het meeste gewicht aan het golflengtegebied waarin bij de temperatuur van de laag de meeste fotonen lopen.

Convectie treedt vooral daar op waar de middelbare absorptiecoëfficiënt  $\bar{k}$  groot is, want  $(dT/dr)_s$  is rechtevenredig met  $\bar{k}$ . De middelbare coëfficiënt is het grootst waar waterstof (en helium) gedeeltelijk geïoniseerd zijn want daar zijn ook de hogere energieniveaus goed bezet zodat er een sterke absorptie optreedt over een groot golflengtegebied. Indien H en He zeer volledig geïoniseerd zijn wordt  $\bar{k}$  klein. Gevolgen: in de binnenste delen heerst stralingsevenwicht. In de heetste sterren (O,B) treedt nergens convectie op. In de hoofdreekssterren F tot M komen convectiezones voor waarvan de bovenkant samenvalt met de diepste delen van de atmosfeer.

#### 5. De toestandsvergelijking der materie (naar E.P.J. van den Heuvel)

Het verband (op iedere plaats) tussen de druk P, de dichtheid  $\rho$  en de (absolute) temperatuur T - als derde toestandsgrootheid - noemt men de toestandsvergelijking. Voor normale gassen geldt de ideale gaswet van Boyle/Gay Lussac:

$$P_g = \rho \cdot \frac{RT}{\mu}$$

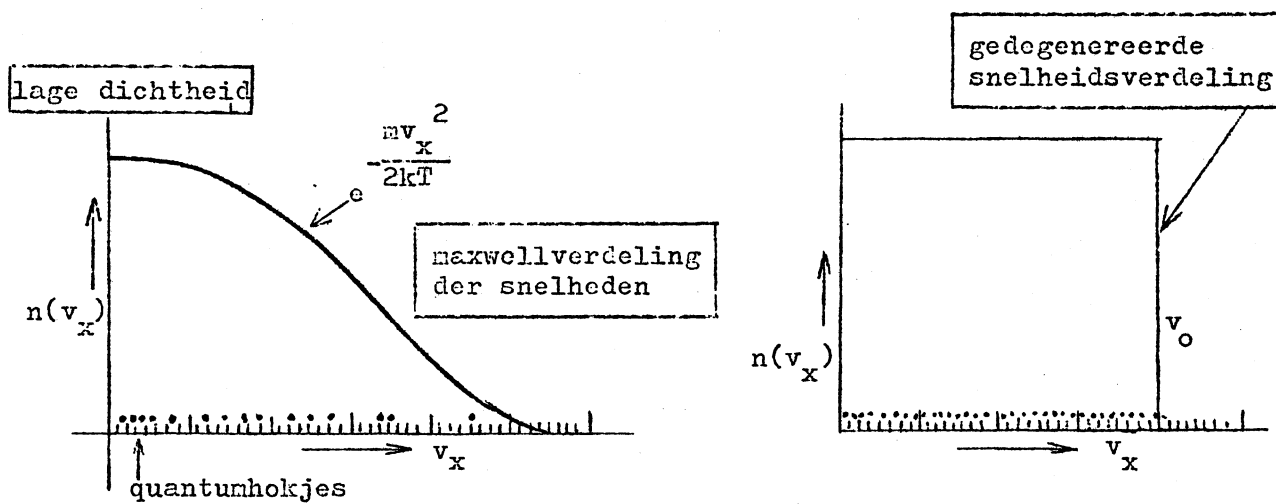
waarbij R = 8,314 J (graad.mol) de universele gasconstante is en  $\mu$  het gemiddeld moleculairgewicht aangeeft. Deze vergelijking geldt zolang de onderlinge krachten tussen de gasdeeltjes in het niet vallen bij de kinetische

(thermische) energie,

Het gemiddeld moleculair gewicht  $\mu$  is bij volledige ionisatie gelijk aan het atoomgewicht gedeeld door het aantal deeltjes, d.w.z.: kernen + elektronen. Voor geïoniseerd waterstof vindt men zo:  $\mu_H = \frac{1}{2}$ ; voor helium:  $\mu_{He} = \frac{4}{3}$  en voor alle zwaardere elementen:  $\mu \approx 2$ .

Pas bij  $\rho > 10^5$  à  $10^7$  kg/m<sup>3</sup> (enigszins afhankelijk van de temperatuur en chemische samenstelling verandert de vorm van de toestandsvergelijking van de materie in het sterinwendige door het optreden van ontaarding. Dit is het gevolg van het Pauli-principe, volgens welk geen enkele quantumtoestand door méér dan één elektron mag worden bezet (we zien dit ook in de verdeling van elektronen in schillen in een atoom). Fermi en Dirac hebben dit voor het eerst op de statistische mechanica toegepast (waarmee men de snelheidsverdeling der deeltjes in een gas bestudeert): in een ontaard gas zijn alle quantumtoestanden tot een bepaalde maximale energie volledig bezet:

In één dimensie van de de snelheidscomponenten voor het elektronengas:



De deeltjes zijn hier statistisch over de quantumhokjes verdeeld

Bij hoge dichtheid zijn alle quantumhokjes gevuld: de snelheidsverdeling ~~de~~degenereert

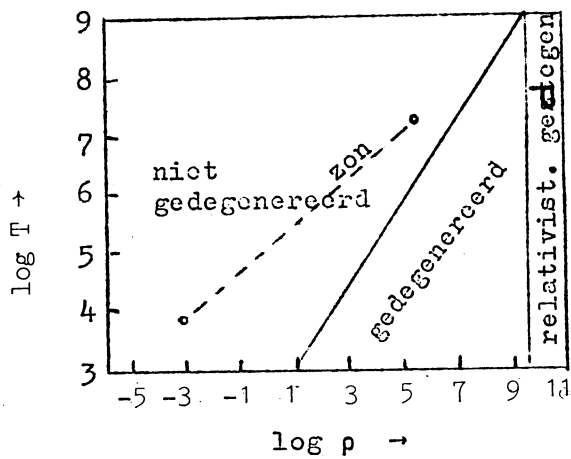
In een volledig gedegenererd elektronengas is het temperatuurbegrip zinloos; de elektronendruk  $P_e$  hangt nu nog slechts van de dichtheid  $\rho$  af, en wel volgens

$$P_e = K_1 \left(\frac{\rho}{\mu_E}\right)^{5/3} \quad (D24)$$

Hierbij is  $K_1 = 9,91 \cdot 10^8$  en geeft  $\mu_E$  de gemiddelde massa per elektron in a.m.e. aan. Dus: voor waterstof  $\mu_E = 1$ ; voor helium  $\mu_E = 2$ ; evenals voor vrijwel alle andere atoomsoorten.

Bij nog hogere dichtheden, voor  $\rho > 2 \cdot 10^9$  kg/m<sup>3</sup> wordt de maximum-energie der elektronen groter dan de rustmassa energie  $mc^2$  ( $v_0$  in bovenstaande figuur wordt van de orde  $c$ ). Men krijgt dan relativistische degeneratie, waarvoor geldt

$$P_e = K_2 \left(\frac{\rho}{\mu_E}\right)^{4/3} \quad (D25)$$



Grens tussen gedegeneerd en niet gedegeneerd vinden wij door (D23) en (D24) aan elkaar gelijk te stellen:

$$\rho \frac{RT}{\mu} = K_1 \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{5/3} \text{ dus } \rho^{2/3} \sim T \text{ en } \log T = \frac{2}{3} \log \rho + \text{constante. Dit is de grenslijn in de figuur. De}$$

grens tussen gewone en relativistische degeneratie vinden wij door (D24) en (D25) aan elkaar gelijk te stellen.

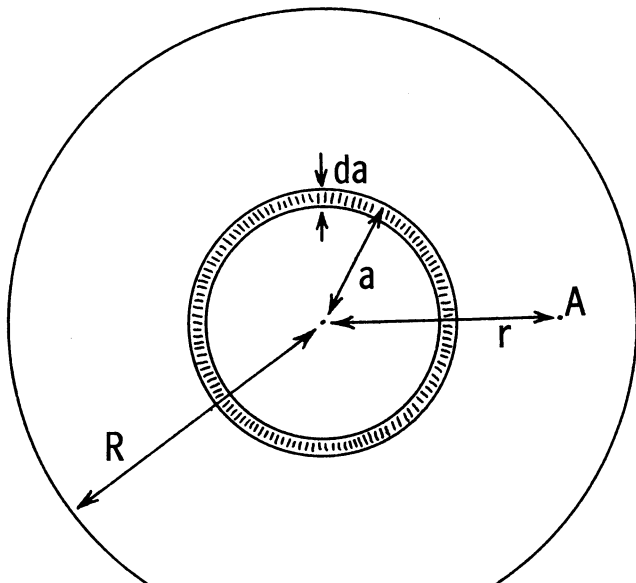
Voor zeer hoge dichtheden hangt de toestandsvergelijking dus af van de mate van (al dan niet relativistische) degeneratie van het elektronengas. Degeneratie-effecten zijn belangrijk in witte dwergen en in de kernen van sommige sterren gedurende bepaalde evolutiefasen (sterren met massa's kleiner dan  $2,5 m_{\odot}$  gedurende het laatste gedeelte van de enkele-schilbron fase!

Lopen de dichtheden nog veel hoger op dan de dichtheden passend bij relativistische degeneratie van het elektronengas dan treedt bovendien ontaarding van het kernen-(neutronen)gas op. Dit type van degeneratie is alleen van belang na de supernova catastrofe, dus voor neutronensterren.

Voor een iets meer uitgebreide behandeling verwijzen wij naar G.B. van Albada, in Sterrenkunde (red. C. de Jager) deel 3, § III.2.1 - III.2.3. Voorts verwijzen wij naar Kolleges Sterrekunde voor Afgestudeerden 1971: Extreem dichte materie in het Heelal (Sterrekundig Instituut, Utrecht).

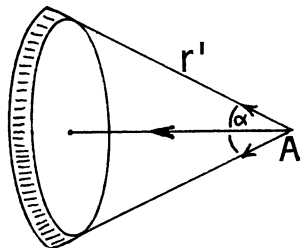
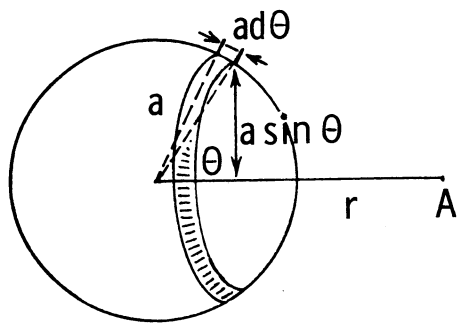
## 6. Gravitatie bij bolsymmetrische massaverdelingen

Wij willen bewijzen dat in een bol met een bolsymmetrische massaverdeling  $\rho(r)$  voor de gravitatieversnelling op afstand  $r$  van het centrum de relatie geldt:  $g(r) = \frac{f m(r)}{r^2}$  waarin  $m(r)$  de massa bevat binnen de bol met straal  $r$ .



Dit probleem lossen wij op de volgende manier op:

Eerst berekenen wij de gravitatieversnelling in A t.g.v. de massa van een bolschil en sommeren vervolgens over alle bolschillen van  $0 \rightarrow R$ .



Om de bijdrage tot de gravitatieversnelling in A van een bolschil te vinden beschouwen we eerst een ring op deze bolschil. Het volume van de ring is:  
 $dV = 2\pi a^2 da \sin \theta d\theta$ .  
 De massa van de ring is dan  
 $\rho(a) dV = 2\pi a^2 \rho(a) da \sin \theta d\theta$  (D26)

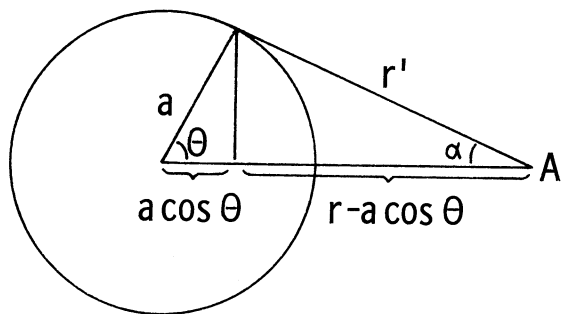
Ieder stukje van de ring heeft een afstand  $r'$  tot A. Uit symmetrieoverwegingen zien we dat uitsluitend componenten van de vektoren in de richting van het centrum een bijdrage aan de gravitatieversnelling leveren.

De gravitatieversnelling in A t.g.v. de ring bedraagt dus:

$$dg(r) = \int \frac{\rho(a) dV}{r'^2} \cos \alpha.$$

Voor de hele bolschil is bijdrage:

$$g(r)_{\text{schil}} = \int \frac{f\rho(a) dV}{r'^2} \cos \alpha. \quad (D27)$$



Uit de figuur volgt:  
 $\cos \alpha = \frac{r - a \cos \theta}{r'}$  en  
 $r'^2 = r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta$   
 met (D26) geeft dat

$$g(r)_{\text{schil}} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f 2\pi a^2 \rho(a) da \frac{(r - a \cos \theta) \sin \theta d\theta}{(r^2 - a^2 - 2ra \cos \theta)^{3/2}}$$

kiezen we als variabele  $u = r - a \cos \theta$  dan is

$$du = a \sin \theta d\theta \text{ en}$$

$$g(r)_{\text{schil}} = \int_{r-a}^{r+a} f 2\pi a^2 \rho(a) da \frac{udu}{a(a^2 - r^2 + 2ru)^{3/2}} \quad (D28)$$

De hele bol met straal R veroorzaakt een gravitatieversnelling in A van:

$$g(r) = \int_0^R \int_{r-a}^{r+a} f 2\pi a \rho(a) da \frac{udu}{(a^2 - r^2 + 2ru)^{3/2}} \quad (D29)$$

Om deze integraal te berekenen splitsen we het interval  $0 \rightarrow R$  in twee gebieden

$$g(r) = \int_0^r f 2\pi a \rho(a) da \underbrace{\int_{r-a}^{r+a} \frac{udu}{(a^2 - r^2 + 2ru)^{3/2}}}_{A} + \int_r^R f 2\pi a \rho(a) da \underbrace{\int_{r-a}^{r+a} \frac{udu}{(a^2 - r^2 + 2ru)^{3/2}}}_{B} \quad (D30)$$

Berekening van de termen A en B:

$$\int_{r-a}^{r+a} \frac{udu}{(a^2-r^2+2ru)} = \frac{1}{2r^2} \left( \sqrt{a^2-r^2+2ru} - \frac{r^2-a^2}{\sqrt{a^2-r^2+2ru}} \right) \Big|_{r-a}^{r+a}$$

In geval A is  $r > a$  en dus  $\sqrt{r^2+a^2-2ra} = r-a$ .

De uitkomst van de integraal wordt dan:

$$\frac{1}{2r^2} [(r+a) - (r-a) - (r^2-a^2) \left( \frac{1}{r+a} - \frac{1}{r-a} \right)] = \frac{2a}{r^2} \quad (D31)$$

In geval B is  $r < a$  en  $\sqrt{r^2+a^2-2ra} = a-r$

dus:

$$\frac{1}{2r^2} [(a+r) - (a-r) - (r^2-a^2) \left( \frac{1}{a+r} - \frac{1}{a-r} \right)] = 0 \quad (D32)$$

waarmee bewezen is dat het deel van de bol  $r' > r$  geen bijdrage levert tot  $g(r)$ .

Toepassen van (D31) en (D32) in (D30) geeft:

$$g(r) = \int_0^r f 2\pi a \rho(a) da \quad \frac{2a}{r^2} = \frac{f}{r^2} \int_0^r 4\pi a^2 \rho(a) da$$

$$\boxed{g(r) = \frac{f m(r)}{r^2}} \quad \text{immers } m(r) = \int_0^r 4\pi a^2 \rho(a) da.$$

Opmerkingen:

- Voor een punt A met afstand  $r$  tot het centrum maar buiten de bol vinden we analoog  $g(r) = \frac{fM}{r^2}$  waarin  $M$  de totale massa van de bol voorstelt.
- Uit bovenstaande blijkt dat wij uit de gravitatiebewegingen van dubbelsterren geen aanwijzingen krijgen omtrent de bolsymmetrische massaverdeling binnen de ster.

De overwegingen die geleid hebben tot het opnemen van een aantal ongelijksoortige onderwerpen in een appendix zijn reeds vermeld in de inleiding van deze handleiding en in de suggesties bij hoofdstuk 4.

Uit de paragraafnummering ...A blijkt de voorkennis die noodzakelijk is om het onderwerp aan de orde te stellen. Paragraaf 2.7A kan op elk tijdstip na de behandeling van § 2.7 aan de leerlingen voorgelegd worden. De meest substantiële gedeelten uit dit aanhangsel zijn § 4.5A en § 4.6A. De vragen zijn doorlopend genummerd.

Hieronder volgen enkele opmerkingen en suggesties bij elk der paragrafen.

### 2.7A Thermische straling van planeten

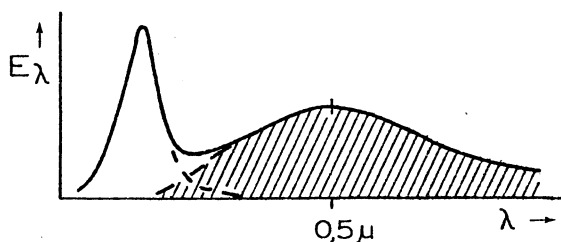
Deze paragraaf is een astrofysische toepassing van de stralingswetten voor ondoorzichtige oppervlakken. Deze stof kan vrijwel zonder inleiding als huiswerk worden opgegeven; de behandeling van de antwoorden hoeft weinig tijd te vergen.

Deze paragraaf kan bijvoorbeeld heel geschikt gebruikt worden als intermezzo, wanneer na behandeling van hoofdstuk 2 of tijdens het eerste gedeelte van hoofdstuk 3 de sterrekunde erg ver weg lijkt.

#### Antwoorden bij de vragen, opmerkingen:

1. De scherpe piek bij de kleinste golflengten ( $0 < \lambda < 2 \mu\text{m} \hat{=} 2000 \text{ nm}$ ) wordt veroorzaakt door verstrooid zonlicht, de "berg" in het infrarood is thermische straling van de planeet.

2.



Het oppervlak onder de "infrarood-berg" geeft  $E_{\text{totaal}} = \sigma T_{\text{merc}}^4$ .

3.  $\lambda_m \approx 5,0 \times 10^{-6} \text{ m} \rightarrow T = \frac{2,9 \times 10^{-3}}{5,0 \times 10^{-6}} = 5,8 \times 10^2 \text{ K}.$

4. Het oppervlak is "zwart in het infrarood" (absorptiecoëfficiënt van planeetoppervlak of wolken in IR inderdaad zeer hoog: karakteristiek voor moleculen met 3 of meer atomen).

5. De toppen schuiven naar grotere golflengten  $\rightarrow T$  neemt af. Het vermogen van de zonnestraling per  $\text{m}^2$  planeetoppervlak neemt af (evenredig met  $r^{-2}$ ).

6. [a) het totale vermogen uitgestraald door de zon: vast gegeven;]

b) de afstand tot de zon (zie vraag 5);

c) de middelbare absorptiecoëfficiënt van de planeet voor zonnestraling



$\bar{k}$  (voor  $\lambda \leq 2000$  nm). De temperatuur van de planeet  $T_p$  neemt toe met toenemende  $\bar{k}$ ;

[ d. de hoek waaronder de zonnestraling invalt. ]

Uitweiding van docenten: aannemend dat in het infrarood het planeetoppervlak zwart is, d.w.z.  $k_{IR} \equiv 1$  vindt men voor het planeetoppervlak bij loodrechte bestraling door de zon:  $1 \text{ m}^2$  opp. absorbeert per tijds-eenheid aan zonnestraling

$$\frac{4\pi R_{\odot}^2 \cdot \sigma T_{\text{eff}\odot}^4}{4\pi r^2} \times \bar{k}.$$

( $R_{\odot}$ : straal zon,  $r$ : afstand zon-planeet). Dit geabsorbeerde vermogen wordt door de planeet weer uitgestraald:

$$\sigma T_p^4 = \sigma T_{\odot}^4 \cdot \frac{R_{\odot}^2}{r^2} \cdot \bar{k}.$$

(Indien de planeet zeer snel roteert, of indien een atmosfeer de dag- en nachtverschillen vereffent, of beide dan onderschept de planeet zonnestraling met een effectief oppervlak  $\pi R_p^2$ , terwijl het hele planeetoppervlak  $4\pi R_p^2$  straalt. De middelbare planeettemperatuur wordt daarmee  $4^{-1/4} = 0,7$  maal de met bovenstaande formule berekende  $T_p$ ). Het is niet onmogelijk de theoretische bepaling van de planeettemperatuur met behulp van bovenstaande evenwichtsbeschouwing door de leerlingen te laten afleiden (met enige hulp of in klassegerek).

In verband met vraag 6 zijn ook zonder bovenstaande uiteenzetting nog aanvullende vragen te stellen: Hoe kun je uit stralingskrommen iets afleiden over de absorptiecoëfficiënt voor zonnestraling? Vergelijk bijvoorbeeld Mercurius/Venus en Aarde/Maan. Verklaar kwalitatief de verschillen.

Antw.: Reflectiepiek is evenredig met  $(1-\bar{k})$ ; thermische straling evenredig met  $\bar{k}$ ;  $\bar{k}$  is zeer hoog voor vulkanisch gesteente, laag voor wolken, zeeën, poolkappen en zandvlakten).

7. Het door de zon bestraalde maanoppervlak is veel heter.

### 3.1A Fraunhofer's grote ontdekking

Deze paragraaf geeft "leesstof" om iets van de historische ontwikkeling van de spectroscopie te laten zien. De Duitse citaten zijn bewust gehandhaafd. Deze tekst kan aanleiding geven tot een klassegerek.

Genoemde instrumenten:

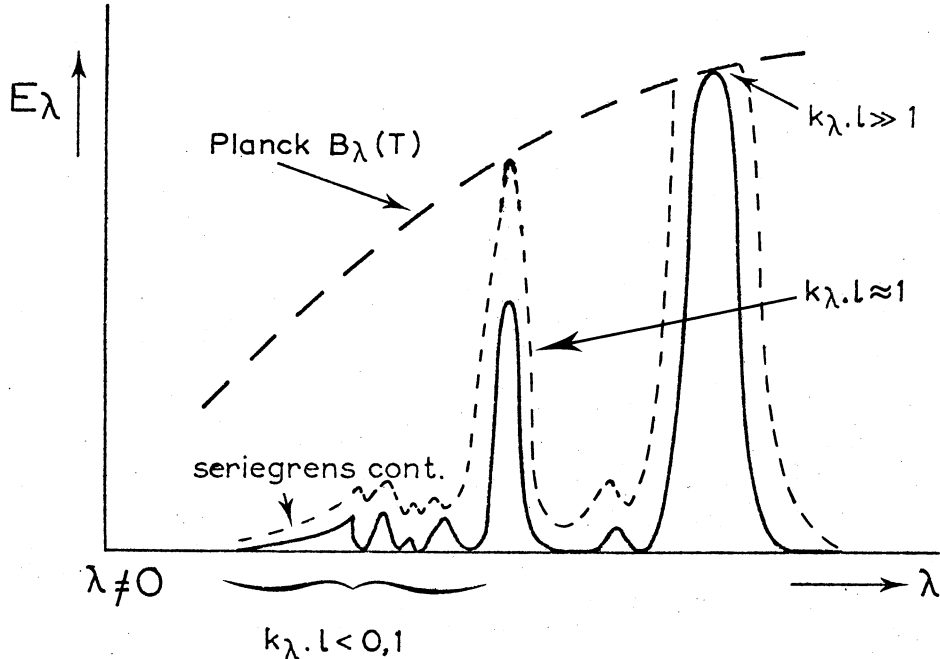
Kwadrant: een instrument dat vroeger (omstreeks 1600) in de astronomie werd gebruikt om de hoogte van de sterren te meten. Het bestaat uit een kwart cirkel met een gradenverdeling (W.P.).

Theodoliet: Een instrument om zeer nauwkeurig hoeken te meten; het wordt zowel in de astronomie als in de landmeetkunde gebruikt (W.P.).

### 3.6A.1 Spectrum van een gedeeltelijk ondoorzichtig gas

Deze paragraaf zet de in § 2.4 en § 3.6 behandelde theorie over de straling uit gedeeltelijk doorzichtige gassen nog eens op een rijtje, nu met de nadruk op spectra verkregen in laboratoria. Deze tekst kan heel geschikt gebruikt worden om de moeilijkste fysica uit deze keuzegroep (stralende gaslagen) te herhalen vanuit een iets andere gezichtshoek.

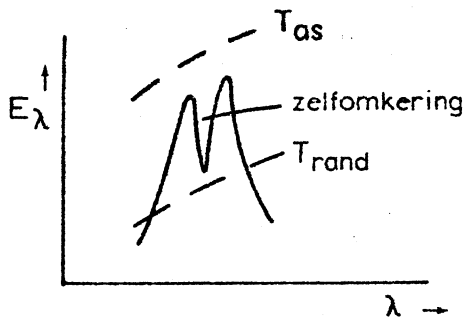
Antwoord vraag 8:



Alle delen van het spectrum waarvoor oorspronkelijk  $k_{\lambda} \cdot l < 0.02$  worden 5 x zo helder. Bij lijnen met verzadigde kernen ( $k_{\lambda} \cdot l \gg 1$ ) verandert in de kernen niets, de lijnen worden alleen iets breder. Lijnkernen met oorspronkelijk  $k_{\lambda} \cdot l \approx 1$  worden nu verzadigd,  $\sim B_{\lambda}(T)$ .

(Deze vraag is een goede test voor begrip).

Indien u beschikt over wat meer tijd en enige moed kunt u ingaan op de



omkering in sterke emissielijn ( $k_{\lambda} \cdot l > 1$  in de lijnkern). De omkering treedt op doordat de temperatuur aan de rand van de lichtbron (vlam, gasontlading) lager is dan bij de as. U kunt er dan op wijzen dat de verklaring van deze centrale om-

kering analoog is aan de verklaring voor het optreden van absorptielijnen in spectra van zon en sterren.

### 3.6A2 De continue absorptiecoëfficiënt in de zonne-atmosfeer: de corona van de zon

In de leerlingentekst is de grote betekening van het  $H^{-}$  ion voor het begrip van het continue spectrum van de zon en van sterren met  $T_{\text{eff}} \ll 7000 \text{ K}$  weloverwogen weggelaten om de kern van het betoog niet schuil te laten gaan achter bijkomstigheden. De aanvulling wordt in deze paragraaf

Opmerkingen:

De  $H^-$  concentratie kan uiteraard uit het evenwicht  $H^- \rightleftharpoons H + e^-$  met Saha berekend worden:

$$\frac{n_H \cdot n_e}{n_{H^-}} = \beta T^{3/2} e^{-E_i(kT)}$$

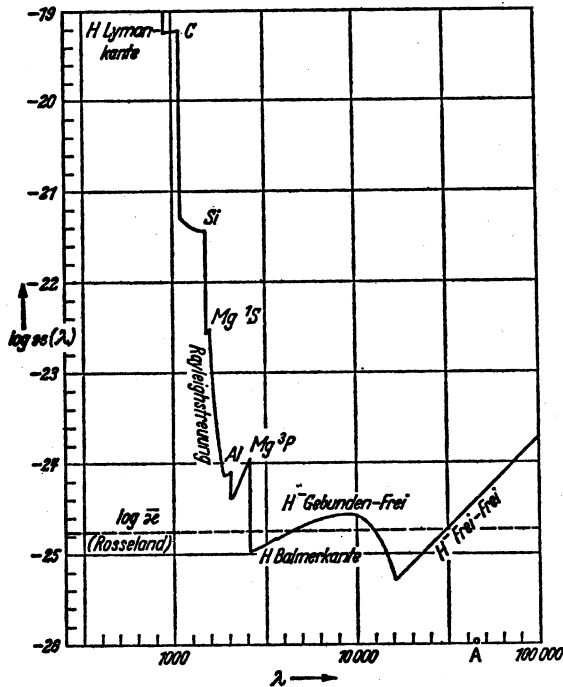


Abb. 18.2. Kontinuierlicher Absorptionskoeffizient  $x(\lambda)$  in der Atmosphäre der Sonne (G2 V) bei  $\tau_0 = 0.1$  ( $\tau_0$  entspricht  $\lambda 5000 \text{ \AA}$ ), d. h.  $T = 5040 \text{ }^\circ\text{K}$  bzw.  $\Theta = 1$  und  $P_0 = 3.2 \text{ dyn}\cdot\text{cm}^{-2}$  bzw.  $P_0 = 5.8 \cdot 10^4 \text{ dyn}\cdot\text{cm}^{-2}$

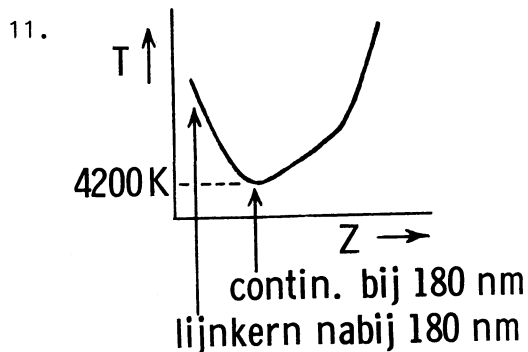
Het ligt voor de hand in deze paragraaf ook even uit te wijden over het verloop van de continue absorptiecoëfficiënt in het UV en het verre IR. Wij zijn hier wederom niet voor de verleiding bezwaken om op absorptie en emissie door vrij-vrij overgangen in te gaan. Maar u kunt dat (als uitweiding) gerust doen, u wint daarmee niet alleen begrip voor de ondoorzichtigheid van het zonnegas in het IR en radiogebied, maar u kunt tevens het onderwerp atoommodel en spectra mooi afronden.

Voor een grafiek van  $k_\lambda$  in de zonne-atmosfeer zie Unsöld: Der Neue Kosmos, fig. 18.2.

Antwoorden bij de vragen, opmerkingen:

9.  $\lambda = hc/E = 1657 \text{ nm}$ .

10. Voor  $T \approx 5000 \text{ K}$  is  $n_3/n_1 = 5,8 \times 10^{-12}$ . Daaruit volgt dat het Paschen-continuüm vele orden van grootte zwakker is dan het  $H^-$  continuüm.



(Wanneer leerlingen deze vraag zelfstandig kunnen oplossen, dan hebben zij het principe van lijnvorming met het drie-lagen model goed begrepen. Leid de vraag in met een schematisch  $T(Z)$  verband. Voor  $\lambda \leq 180 \text{ nm}$  komt de straling in de lijnen uit meer naar buiten

gelegen hetere lagen dan de straling in het continuüm.

#### 4.1A1 Verscheidenheid van sterspectra; plaat XIV

Deze plaat geeft een gedoseerde verscheidenheid van sterspectra die onder meer als volgt te gebruiken is:

- om leerlingen zelf te laten ontdekken dat sterspectra in een reeks te rangschikken zijn; wij verwijzen naar de alternatieve behandeling van hoofdstuk 4, eerder in deze handleiding beschreven (4bis). Wij wijzen erop dat leerlingen (althans aanvankelijk) niet verteld hoeft te worden dat er een reeks bestaat - vraag eerst of zij enig systeem kunnen ontdekken! Om deze opdracht te vergemakkelijken kan één van de platen worden uitgescheurd en aan stroken geknipt.
- om zelf sterspectra te classificeren aan de hand van plaat XIII., bijvoorbeeld bij een proefwerk.

Wij geven hier de spectrale klasse van de spectra die voorkomen op plaat XIV:

<u>ster</u>	<u>sp.klasse</u>	<u>ster</u>	<u>sp. klasse</u>
61 Cyg A	K5 V	HD 37129	B2 V
$\beta$ Vir	F8 V	Coma T 183	A3 V
Coma T 60	A7 V	61 Cyg B	K7 V
HD 36936	B5 V	45 Boo	F5 V
16 Cyg A	G2 V	$\sigma$ Dra	K0 V
$\gamma$ U Ma	A0 V	$\beta$ Com	G0 V
HD 95735	M2 V	61 U Ma	G8 V
HD 36865	B8 V	HD 46149	O8,5
78 U Ma	F2 V	HD 109011	K2 V

De aanduiding V wil zeggen dwergster (hoofdreeks)

#### 4.1A2 Korte historie van de spectrale analyse

Deze paragraaf geeft in de eerste plaats "leesstof" die vooral aan zal spreken als de leerlingen zelfstandig de spectrale reeks hebben ontdekt aan de hand van plaat XIV in § 4.1A1.

De korte uiteenzetting over het objectief prisma brengt nog eens de noodzaak onder de aandacht om efficiënt grote hoeveelheden sterren spectroscopisch waar te nemen.

Antw. vraag 12:

Als spectra verschuiven in de dispersierichting worden de spectrale lijnen wazig en al gauw onherkenbaar (om te vermijden dat kleine volgfouten de spectra verwazigen zorgt men dat de dispersierichting loodrecht op de dagelijkse beweging staat).

#### 4.5A Classificatie van sterren naar lichtsterkte en temperatuur

Deze paragraaf rondt de toepassing van de wetten van Boltzmann en van

Saha voor sterclassificatie af: aangezien volgens Saha de ionisatie-evenwichten niet alleen van de temperatuur maar (in veel geringere mate) ook van de elektronendruk  $P_e$  afhangen valt hier een criterium voor de dichtheid in de steratmosfeer mee af te leiden. Deze paragraaf vraagt wel enige begripsinspanning.

Drukverbreding bij spectrale lijnen levert een andere methode om dichtheden af te lezen uit spectra. Spectrale lijnen worden niet alleen verbreed door het Dopplereffect ten gevolge van de thermische snelheden van de atomen of ionen maar ook doordat naburige deeltjes de energieniveaus van het absorberende (emitterende) atoom of ion doen verschuiven of zelfs doen splitsen. Statistisch ontstaat zo een druk-afhankelijke lijnverbreding. Het effect is vooral bijzonder sterk bij waterstof. In een constant elektrisch veld  $E$  splitsen alle waterstoflijnen zich in een aantal componenten; de verschuiving is evenredig met  $E$  voor niet al te grote  $E$  (Stark effect). Ten gevolge van het fluctuerende microveld van ionen en elektronen in een steratmosfeer worden de waterstoflijnen verbreed. In opmerking 2 aan het einde van § 4.5A wordt hiernaar verwezen.

Antwoorden op vragen:

13.  $\rho_{HR} : \rho_R : \rho_{SR} = 1 : 2 \cdot 10^{-3} : 5 \cdot 10^{-7}$ .
14. De gasdruk neemt sterk af van hoofdreeksster naar reus naar super-reus. Iets dergelijks geldt voor elektronendruk (bij compressie van een isotherm gehouden gas neemt  $P_e$  in het algemeen wat minder dan evenredig met  $P_g$  toe: hogere dichtheden werken recombinitie in de hand volgens Saha. Alleen op ingaan indien leerlingen u daartoe dwingen).
15. De verhouding Fe II / Fe I neemt toe met afnemende  $P_e$  (Saha); Fe II / Fe I neemt toe met toenemende  $L / L_\odot$  (vragen 13 en 14) (deze redenering is alleen juist voor sterren met dezelfde  $T_{eff}$ ).
16. Bij een reus zijn de ionlijnen relatief wat sterker omdat  $P_e$  relatief lager is; m.a.w. het spectrum van een reus lijkt op het spectrum van een hoofdreeksster met iets hogere  $T_{eff}$ .
17. De helderheid is evenredig met  $r^{-2}$ .

#### 4.6A Spectra van nevels

Dit onderwerp staat sterrekundig wat los van de overige onderwerpen. De in hoofdstuk 2 en 3 ontwikkelde fysica stelt ons echter in staat dit astrofysisch interessante gebied mee te nemen. Paragraaf 3.6A1 vormt een goede inleiding.

Ten gevolge van de ijlheid der materie (weinig botsingen) en het feit

dat de zeer hete ster betrekkelijk ver weg staat (een "verdund" doch zeer "heet" stralingsveld) heerst er in de nevel geen lokaal thermodynamisch evenwicht, m.a.w. de snelheidsverdelingen der elektronen, de ionisatie-evenwichten en de bezettingsverhoudingen kunnen niet met de bekende wetten met één temperatuur beschreven worden. Het spectrum kan nu ook niet met Kirchhoff-Planck, Saha en Boltzmann bij één unieke  $T$  verklaard worden: men moet nu voor de verschillende spectrale lijnen gedetailleerd de mechanismen nagaan die tot emissie aanleiding geven. Op het probleem van de afwijkingen van lokaal thermodynamisch evenwicht hoeft met de leerlingen niet te worden ingegaan tenzij iemand met de vraag komt waarom wij hier in tegenstelling met spectra van sterren nu wel op verschillende mechanismen moeten ingaan. Uw opmerking dat het niet lukt om het volledige spectrum, met H, He I, He II en "nebulium"-lijnen tegelijkertijd met één stel ( $T, P_e$ ) waarden te verklaren is dan waarschijnlijk een voldoende antwoord.

Deze paragraaf vraagt wel enige "inzet" zowel van docent als leerlingen, maar de materie is op zichzelf niet moeilijk als de voorafgaande fysica goed begrepen is. Bij tijdgebrek kunt u het 2e gedeelte: B Planetaire nevels ... laten vallen. Sterk gemotiveerde leerlingen kunnen (met enige hulp) deze paragraaf zelf doorwerken, bijvoorbeeld naast hoofdstuk 5.

Antwoorden bij vraagstukken, opmerkingen:

18. a) fout:sterren worden te rood gezien, dus de temperatuur wordt onderschat (deze fout kan ontdekt en tot op zekere hoogte gecorrigeerd worden door in plaats van in twee, in drie of meer kleurgebieden te meten);

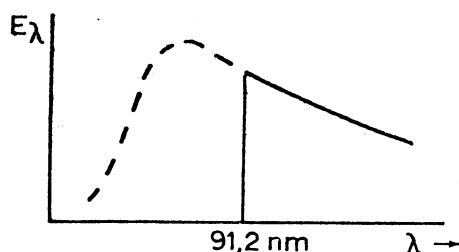
b) géén effect op bepaling van het spectrale type (belangrijk voordeel!; interstellaire lijnen zijn goed te herkennen).

Veel boeken en plaatwerken geven mooie opnamen van donkere en heldere nevels - laten zien!

19.  $T > 31500 \text{ K}$ .

20. In ieder geval één (en niet meer dan één) Lymanquant (lijn- of continuüm).

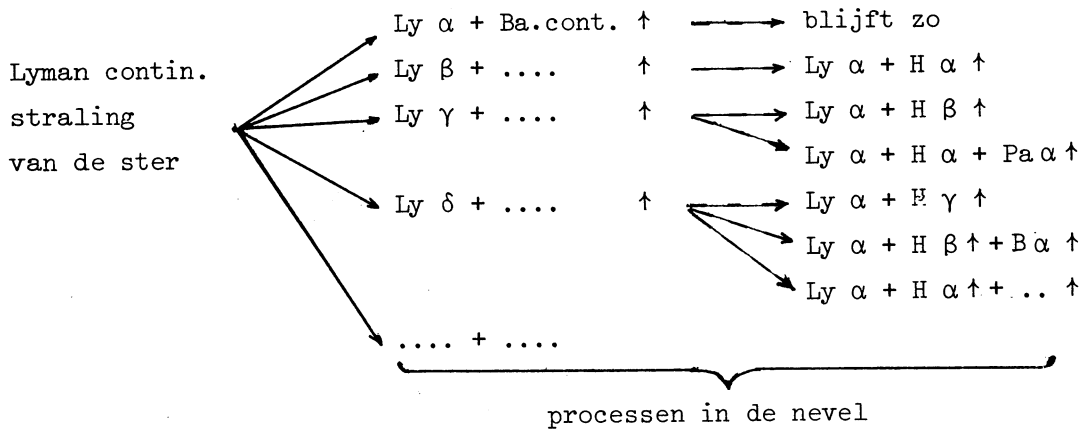
21.



Volstrekt geen straling voor  $\lambda < 91,2 \text{ nm}$ .

22. Elk Lyman  $\beta$ ,  $\gamma$ , ... continuümquant wordt door de nevel eventueel vele malen geabsorbeerd tot er tenslotte één Lyman  $\alpha$ -quant + één Balmerquant ( $H\alpha$ ,  $H\beta$ , ... continuüm) + eventueel Paschen, Bracket ... quant.

Vertikale pijl: ontsnapt aan nevel.



De Ly  $\alpha$  fotonen kunnen niet verder worden "afgebroken".

(Het is van groot belang dat leerlingen dit zelf al puzzelend uitvinden, (term)schema's laten tekenen. Moedig iemand aan een alternatief te vinden en vraag andere leerlingen om commentaar).

Zodra vraag 22 (en § 2.6.) goed zijn begrepen zal de Zanstramethode geen problemen meer geven. Het probleem is een goede ijking (Zanstra nam destijds aan dat de stralingskromme door een Planck kromme benaderd mag worden).

23. De verhouding  $N_{Ly}^* / N_{BV}^* = N_{Ba} / N_{BV}^*$  neemt zeer sterk toe met toenemende  $T_{eff}$  (zie ook de oplossing bij vraag 33 uit de leerlingentekst).

24.  $H^+$  gebieden is de correcte naam voor de geïoniseerde materie om hete sterren. In de literatuur treft u vrijwel altijd de aanduiding H II gebieden aan.

De uitgebreidheid van een nevel: neemt zeer snel met  $T_{eff}$  toe;

neemt af met toenemende dichtheid.

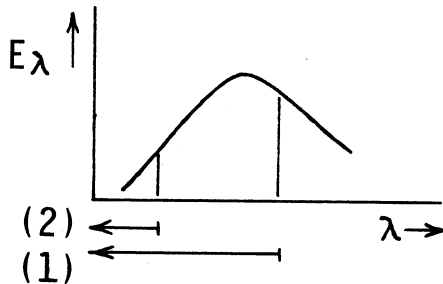
(De straal van een  $H^+$  gebied is evenredig met  $n_H^{-2/3}$  ( $n_H$ : aantal protonen + atomen). De helderheid van een nevel (in Balmerlicht) is evenredig met de zogenaamde emissiegraad  $\int n_e^2 dl$  (langs de gezichtlijn) want: de emissiecoëfficiënt is evenredig met  $n_e \times n_{protonen} \approx n_e^2$ . Dit verklaart ook dat een  $H^+$  gebied toch helderder is naarmate de dichtheid  $n_H$  groter is: weliswaar neemt de straal volgens  $n_H^{-2/3}$  af, maar de emissiegraad neemt toe, ongeveer met  $n_H^{4/3}$ . Ook bij de verboden lijnen is de emissie per volume-eenheid evenredig met het

product van ionendichtheid en elektronendruk ( $E \propto N_i \times P_e$ ).

25. Het zijn toevallige en daarom onregelmatige verdichtingen van de interstellaire materie.

Bij de mechanismen van lichtgeven hebben wij één mechanisme weggelaten dat vooral bij planetaire nevels toch wel belangrijk is: het fluorescentie mechanisme dat een aantal toegestane O III en N III lijnen tot abnormaal sterk lichten brengt. De He II resonantielijijn bij 30,4 nm die uit recombinitie  $\text{He}^{++} + e^- \rightarrow \text{He}^+$  plus cascade in de nevel ontstaat valt "toevallig" samen met een O III lijn zodat  $\text{O}^{++}$  uit de grondtoestand tot een hoge energietoestand wordt aangeslagen. De daaruit volgende cascade in  $\text{O}^{++}$  veroorzaakt een aantal O III lijnen in het nabije UV. Daarbij ontstaat ook de resonantielijijn O III  $\lambda = 37,4$  nm die toevallig weer  $\text{N}^{++}$  uit de grondtoestand kan aanslaan waaruit weer door cascade een aantal N III lijnen in het fotografeerbare spectrale gebied worden veroorzaakt. Men kan met de drie mechanismen de spectra van nevels kwantitatief geheel begrijpen; uit bepaalde lijnsterkteverhoudingen kan men de elektronentemperaturen en de deeltjesdichtheden in de nevel afleiden.

26.



1) gebied waar de ionisatie  $\text{H} \rightarrow \text{H}^+$  kan plaatsvinden

2) gebied waar de ionisatie  $\text{He}^+ \rightarrow \text{He}^{++}$  kan plaatsvinden

Om  $\text{He}^+$  te ioniseren zijn fotonen nodig met een energie van minstens 54,4 eV ( $\lambda < 437$  nm).

Deze straling is op veel kleinere afstand van de ster al door absorptie in de nevel uitgeput dan het Lymancontinuüm ( $\text{He}^{++}$  gebied kleiner dan  $\text{H}^+$  gebied).

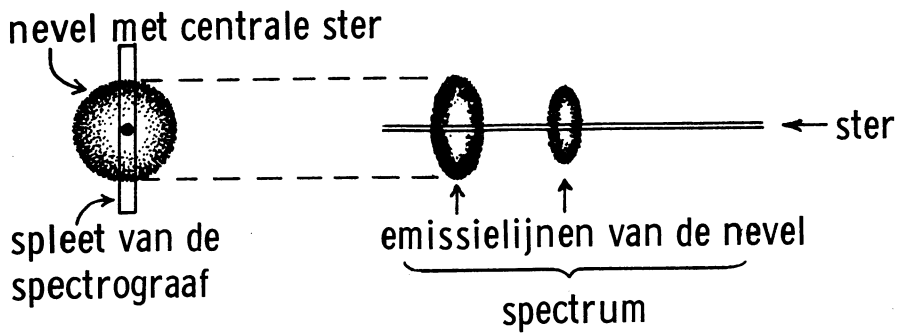
(Laten meten!).

27. De emissie vindt plaats in een bolschil.

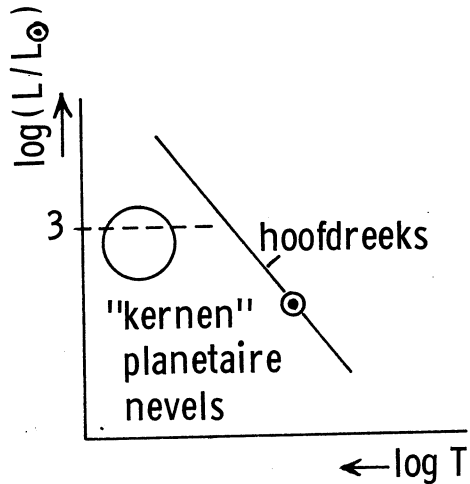
28. Weer met de Zanstramethode (eigenlijk voor planetaire nevels uitgedacht! Zo ontdekte men dat de "kernen" een heel bijzonder type hete sterren is.

Het is misschien interessant om de samenhang tussen de expansie en het spectrum van een planetaire nevel te bespreken. U kunt òf het spectrum laten "raden" (de expansie geven), òf uit het spectrum tot expansie laten besluiten. Strikt genomen kan men uit spectra "expansie" en "instorting" niet onderscheiden, want wat is "voor" en "achter"?





29.



Links van de hoofdreeks,

boven de lijn  $L = L_{\odot}$ .

(een wel heel bijzondere soort schaarse sterren die opvalt door de aanwezigheid van de planetaire nevel. Het spectrum van de sterren toont in het optisch venster een continuüm en hoogstens heel vage emissie en/of absorptielijnen).

### 5.3.2A Ontaarde materie

Deze paragraaf geeft enige "leerstof" als samenvatting van hetgeen in hoofdstuk 5 over gedegenererde materie te berde wordt gebracht. Docenten vinden enige achtergrond in deze handleiding (bij hoofdstuk 5).