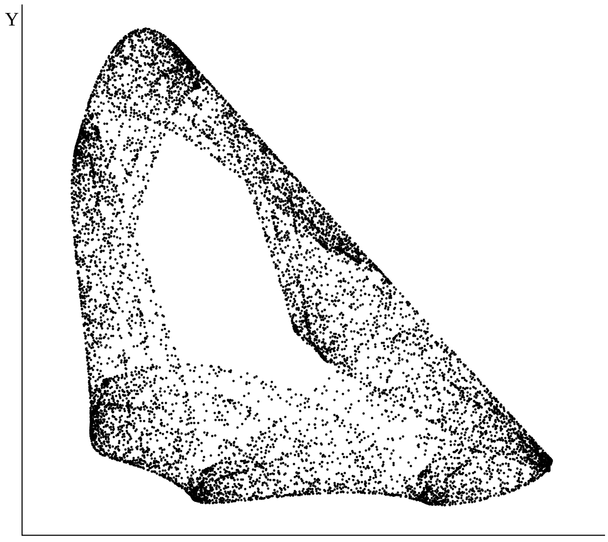


Universiteit Utrecht

Department
of Mathematics

Wiskundige Modellen, deel 1

door

F. Beukers en G. Sleijpen

Voorjaar 1998

Inhoudsopgave

Voorwoord

Het voor je liggende diktaat is een eerste introduktie tot modelvorming, het probleem om in wiskundige taal een beschrijving te geven van verschijnselen die we rond ons waarnemen. Het doel hiervan is enerzijds wetenschappelijk, we proberen een beter begrip te krijgen van alles wat om ons heen gebeurt. Een tweede, maar niet minder belangrijk doel is gebruikersgericht. Met de opgedane kennis van een proces kunnen we trachten dit proces te sturen, het liefst in ons voordeel.

Schematisch bestaat het proces *modelvorming* uit de volgende stappen

i) Het herkennen van de relevante grootheden in een proces en hiervoor algemeen geldende regels opstellen. Dit stelsel van regels noemen we een *model*.

ii) De regels in mathematische vorm formuleren. Er ontstaat dan een wiskundig probleem.

iii) Het wiskundige probleem oplossen

iv) De gevonden resultaten toetsen aan de werkelijkheid.

Mochten de gevonden resultaten niet overeenkomen met de werkelijkheid, dan is er iets mis met ons model en moeten we wat nieuws bedenken. Een eventuele vijfde stap die strikt genomen niet tot de modelvorming hoort maar vaak wel erg belangrijk is,

v) Vindt methoden om het proces optimaal te sturen, of om er optimaal gebruik van te maken.

Het voorbeeld bij uitstek, waarin deze stappen goed te herkennen zijn, is de mechanica van Newton. Lange tijd heeft modelvorming zich zo'n beetje afgespeeld op het gebied van de exakte wetenschappen, natuurkunde, sterrekunde en ook chemie. In de 20e eeuw heeft men echter tal van andere mogelijkheden tot modelvorming herkend. De moeilijkheidsgraad van de diverse stappen ligt in deze gevallen totaal anders dan bij de mechanica, maar niettemin zijn ze allen aanwezig. Zo is er de theoretische biologie bijgekomen waarin modellen voor populatiegroei, evolutie en biochemische processen bestudeerd worden. Een ander bekend voorbeeld van is dat van de Operations Research, een gebied dat pas na 1945 tot ontwikkeling kwam door de noodzaak om het gedrag van grote organisaties te beschrijven en te sturen. Tegenwoordig is dit vak niet meer weg te denken bij besluiten over efficiëntie van grote bedrijven en instellingen. Een belangrijk probleem bij veel van deze nieuwe modellen is de toetsing. Veelal gaat het om systemen die niet in laboratorium omstandigheden bestudeerd kunnen worden. Ze kunnen alleen maar in hun 'natuurlijke omgeving' geobserveerd worden. Nadeel is dat ze ook vaak in wisselwerking staan met die omgeving (open systemen). In dergelijke gevallen kunnen oorzaken van buitenaf een verstorende rol spelen. Bij het aflezen van meetwaarden en voorspellingen op grond van een model moet hier terdege rekening mee worden gehouden.

In dit diktaat proberen we aan de hand van diverse onderwerpen de bovengenoemde stappen weer te geven. Daarbij hebben wij ons vooral bij de wiskundige achtergronden (stap iii)) en de sturing (stap v)) regelmatig moeten inhouden. Enerzijds omdat we ons in dit diktaat toch op modelvorming willen richten anderzijds omdat we colleges als systeenm theorie niet te veel in de wielen willen rijden. Toch is in een aantal gevallen de minimaal benodigde wiskunde achtergrond bij eerstejaars studenten nog niet aanwezig en moet samen met het model behandeld worden. De stijl die we hier zullen hanteren is echter heel anders is dan de gebruikelijke in de wiskundelektuur. Stellingen worden hier vaak niet bewezen, of het bewijs wordt alleen maar geschetst. De reden hiervoor is, dat we ons in deze cursus opstellen als gebruikers van de wiskunde en niet als de mensen die dit allemaal moeten bedenken. Dit neemt geenszins weg dat de bewijzen van deze stelling uiterst boeiend kunnen zijn, maar wij hebben er eenvoudig de tijd niet voor hierop in te gaan.

Tenslotte nog een woord over de Computer, die ook in de titel van deze tekst voorkomt. We zullen deze gebruiken als instrument bij de stappen iii) en iv). Zoals gezegd kunnen modellen aanleiding geven tot wiskundige problemen die niet expliciet op te lossen zijn, zodat ook de toetsing niet kan plaatsvinden. Wat vaak wel mogelijk is de computer een simulatie laten uitvoeren op grond van het wiskundig model. Dit levert enzerzijds een indruk van de voorspellingen die het model doet, maar als bonus leren we ook nog wat interessante dingen over ons wiskunde probleem. In een aantal gevallen vinden we zelfs zeer verrassende verschijnselen die we zonder computer nooit gezien zouden hebben. Met pakketten als MATLAB en Mathematica hebben we calculatoren tot onze beschikking die gemakkelijk eigenwaarden en -vektoren van 10 bij 10 matrices uitrekenen zonder bang te zijn voor rekenfouten. Hopelijk leer je in de loop van het praktikum de computer waarderen als nuttig instrument bij het bedrijven van wiskunde.

1 Populatiegroei van één soort en recursies

1.1 Inleiding

In deze paragraaf bestuderen we recursies of iteraties in één dimensie die ten grondslag liggen aan modellen voor de groei van populaties bestaande uit één soort. We kunnen hierbij denken aan menselijke populaties of andere dieren, maar ook aan bacterieën of zelfs radioaktieve atomen die vervallen. De laatste twee voorbeelden zijn natuurlijk eenvoudiger onder laboratorium omstandigheden te bestuderen. Neem als voorbeeld een populatie bacterieën waarvan we het aantal om de minuut, of een ander vast tijdvak, tellen. Zij N_n het aantal bacterieën aan het begin van het n-de tijdvak. We beginnen bij tijdvak 0. De volgende eenvoudige aannamen leveren al gauw een model:

Aannamen 1.1 *Per tijdvak sterft een fractie s van de populatie en komt er door celdeling een fraktie g bij.*

Het verband tussen N_{n+1} en N_n wordt dus gegeven door

$$N_{n+1} = N_n - s\,N_n + g\,N_n, \tag{1.1}$$

ofwel

$$N_{n+1} = \kappa\,N_n \tag{1.2}$$

waarin we $\kappa = 1 - s + g$ de **groeifactor** van de populatie noemen.
Stel $N_0 > 0$, m.a.w. er zijn in het begin bacterieën aanwezig. Voor N_n geldt dan

$$N_n = \kappa^n N_0. \tag{1.3}$$

Als $s > g$ (sterfte groter dan 'geboorte') dan is $\kappa < 1$ en $N_n \to 0$ als $n \to \infty$: de populatie sterft uit. Is daarentegen $s < g$, dan is $\kappa > 1$ en $N_n \to \infty$ als $n \to \infty$. We hebben dan te maken met de **exponentiële groei**, ook wel Malthus' groei genoemd. De recursie (1.2) staat bekend als het **Malthus model**.

Thomas Robert Malthus (1766-1834) was een Engelse dominee die een aantal politiek economische geschriften publiceerde waarvan '*Essay on the principle of population*' (1798) de bekendste en controversieelste was. Hierin betoogde Malthus dat de bevolking van Engeland exponentieel toenam terwijl de voedselproduktie dat slechts lineair deed. Het verschil tussen voedselbehoefte en -aanbod zou daardoor in zeer korte tijd dramatische vormen kunnen aannemen, tenzij er ingrijpende maatregelen als geboortebeperking genomen zouden worden. Dit laatste zorgde voor de controverses over de inhoud van het boek. Vast staat dat het boek invloed heeft gehad op het denken van veel mensen, waaronder Darwin en Wallace, de grondleggers van de evolutietheorie. De grote verdienste van Malthus is dat hij als één van de eersten heeft gewezen op het belang van demografische modellen bij het nemen van politieke beslissingen.

Iedereen die wel eens een exponentiële funktie heeft bekeken weet dat exponentiële groei in feite betekent, explosieve groei. Darwin zag dit als een belangrijk mechanisme bij de natuurlijke selectie, beter aangepaste diersoorten vermenigvuldigen zich met een hogere groeifactor dan de minder aangepaste, krijgen dus na relatief korte tijd de overhand en verdringen zelfs de minder aangepasten. Het zal echter duidelijk zijn dat exponentiële groei zich niet over al te lange perioden kan uitstrekken, de sterke aanwas zal allerlei tegeneffekten in het leven roepen die de groeifaktor verkleinen en de populatiegroei zelfs tot stilstand kunnen brengen. Voorbeelden van dergelijke tegeneffekten bij de bacterie populatie kunnen zijn, de hoeveelheid voedsel per bacterie neemt af, giftige stofwisselingsprodukten werken remmend op de groei, de diertjes ontmoeten elkaar vaker waarbij de één de ander opeet, etc. In menselijke populaties kunnen we dergelijke verschijnselen soms ook waarnemen. Wat de aard van de tegeneffekten ook moge zijn, het is erg eenvoudig om in het wiskundige model zo'n tegeneffekt in te bouwen. Een voorbeeld,

$$N_{n+1} = \kappa\, N_n \left(1 - \frac{N_n}{N}\right). \tag{1.4}$$

Dit staat bekend als het **model van Verhulst**. Merk op dat de groeifaktor nu niet κ is maar $\kappa(1 - N_n/N)$, m.a.w. als N_n groter wordt, neemt de groeifaktor af. Een dergelijk groeigedrag noemen we ook wel **logistische groei**. Het getal N noemen we de **draagcapaciteit** van het model, het is het maximale aantal mogelijke individuen in onze populatie.

Pierre-François Verhulst (1804-1849) was een hoogleraar uit Brussel die dit model in 1840 bestudeerde als verfijning van de ideeën van Malthus. Eén van zijn conclusies was dat de bevolking van België niet veel groter kon worden dan 9.400.000 zielen. In 1967 bedroeg dit aantal 9.570.000 (?!).

Het model van Verhulst kunnen we vereenvoudigen door N_n te **schalen**: we kunnen aan beide zijden door N delen en $x_n = N_n/N$ stellen. We krijgen dan de recursie

$$x_{n+1} = \kappa\, x_n\,(1 - x_n)$$

welke we in een aparte paragraaf (§1.3) bestuderen. Het blijkt dat we voor $\kappa > 3$ met vreemde effekten te maken krijgen. In veel praktische gevallen zal κ echter ruim onder de 3 liggen.

Een andere manier om de groeifaktor af te remmen wordt in het model van Ricker (visserijbioloog) uit 1976 gegeven,

$$N_{n+1} = \kappa\, N_n\, e^{-N_n/N}. \tag{1.5}$$

In het algemeen is het moeilijk om in de natuur voorbeelden te vinden waar modellen als die van Verhulst en Ricker op van toepassing zijn. Op de achtergrond zijn ze misschien aanwezig, maar allerlei variabele storingen zoals seizoens- of weerinvloeden of populaties concurrerende organismen kunnen dit beeld verstoren. En 'last but not least', aantallen van populaties kunnen niet altijd even precies bepaald worden (vergelijk de populatie haringen in de Noordzee). Er zijn gunstige uitzonderingen, zoals de zaailing (*Erophila verna*), een éénjarig plantje dat algemeen in onze duinen voorkomt. Beschouw het aantal N_n plantjes op een vast oppervlak. Door oorzaken die niet geheel bekend zijn, hangt het aantal jaarlijks geproduceerde zaden sterk van N_n af volgens een funktie die lijkt op $\kappa N_n e^{-N_n/N}$ voor geschikte κ, N. Het model van Ricker is hier dus goed van toepassing.

Om het model van Ricker wiskundig te kunnen bestuderen delen we eerst aan beide zijden door N en stellen vervolgens $x_n = N_n/N$. We vinden

$$x_{n+1} = \kappa\, x_n\, e^{-x_n}. \tag{1.6}$$

Biologen die insektenpopulaties, als coloradokevers en schapenvliegen, bestuderen gebruiken nog al eens het model van Hassel, Lawton en May (1976)

$$N_{n+1} = \kappa\, \frac{1}{(1 + N_n/N)^c}\, N_n \tag{1.7}$$

waarin c een positieve konstante is die afhangt van het insektensoort. Ook in dit model neemt de groeifaktor af als N_n groter wordt.

We kunnen via de methoden uit de volgende paragraaf op zoek gaan naar 'evenwichtspunten', 'stabiliteit', etc. In veel opzichten vertonen de recursies van Ricker en van Hassel, Lawton, May in gedrag overeenkomsten met de recursie van Verhulst (periodieke banen, chaos, etc.). Deze laatste zullen we in een aparte paragraaf (§1.3) bespreken.

1.2 Recursies in één variabele, theorie

De verbanden die we in de vorige paragraaf gezien hebben tussen de populatie aantallen in opeenvolgende tijdvakken kunnen allemaal geschreven worden als

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{voor } n = 0,\ 1,\ 2, \ldots, \tag{1.8}$$

waarbij f een reëel waardige funktie is gedefinieerd op een deel V van $\mathbb{R}$ en x_n de populatie grootte (eventueel geschaald) voorstelt in het begin van het n-de tijdvak. Met $x_n = N_n/N$ is bijvoorbeeld

- $f(x) = \kappa\, x$ voor het Malthus model,
- $f(x) = \kappa\, x\,(1-x)$ voor het Verhulst model,
- $f(x) = \kappa\, x\, e^{-x}$ voor het Ricker model,
- $f(x) = \kappa\, \frac{x}{(1+x)^c}$ voor het Hassel, Lawton en May model.

Hierin zijn κ en c bekende (door metingen verkregen) konstanten. In al deze voorbeelden is $f(x)$ berekenbaar voor ieder reeel getal x, maar x heeft alleen biologische betekenis voor niet negatieve waarden: hier is $V = \{x \mid x \geq 0\}$.[1]

Een relatie van de vorm (1.8) noemen we een **recursie**. Een rij (x_n) die voldoet aan (1.8) noemen we een **recursieve rij** of **baan**. Merk op dat een baan wordt vastgelegd door de keuze van x_0: x_0 is de **startwaarde** of beginwaarde van de baan.
Een recursie wordt ook wel *differentievergelijking* genoemd. Vergelijking (1.1) vertelt bijvoorbeeld hoe groot het verschil —de differentie— is tussen de grootte van de populatie in twee opeenvolgende tijdvakken: $N_{n+1} - N_n = -sN_n + gN_n$. Wordt (1.8) gebruikt om x_1 te berkenen uit x_0, en vervolgens x_2 uit x_1, etc., dan spreekt men van een *iteratief* proces.

De vraag is nu, hoe gedraagt een baan (x_n) zich **op den duur**, d.w.z.

hoe gedraagt x_n zich als $n \to \infty$?

We bekijken eerst een tweetal eenvoudige voorbeelden.

Voorbeeld 1.1 Stel $V = \mathbb{R}$ en $f(x) = \kappa x$ met $\kappa > 0$. De recursie luidt dus

$$x_{n+1} = \kappa\, x_n, \qquad n \geq 0$$

en de algemene oplossing is natuurlijk

$$x_n = \kappa^n\, x_0.$$

Merk nu op:

$\kappa < 1$,	dan gaat	$x_n = \kappa^n x_0$	naar 0 als $n \to \infty$;	
$\kappa = 1$,	dan geldt	$x_n = x_0$	voor alle $n \geq 0$;	
$\kappa > 1$,	dan gaat	$x_n = \kappa^n x_0$	naar ∞ als $x_0 > 0$	en naar $-\infty$ als $x_0 < 0$.

[1] Verder leidt, in bijvoorbeeld het Verhulst model, een waarde voor x_n groter dan 1 tot een negatieve 'onbiologische' waarde voor x_{n+1}: de 'Verhulst' f zou in feite gedefinieerd moeten zijn als

$$f(x) = \max(\kappa\, x\,(1-x), 0) \quad \text{voor} \quad x \geq 0.$$

We werken echter met de formule $f(x) = \kappa\, x\,(1-x)$ omdat die wiskundig beter handteerbaar is en houden in ons achterhoofd dat we konklusies moeten bijstellen als er negatieve x_n een rol spelen.

Voorbeeld 1.2 Stel $V = \mathbb{R}$ en $f(x) = \kappa x + \beta$ met $\kappa > 0$. De recursie luidt dus

$$x_{n+1} = \kappa\, x_n + \beta, \qquad n \geq 0,$$

met als oplossing

$$x_n = \begin{cases} \kappa^n \left(x_0 - \dfrac{\beta}{1-\kappa} \right) + \dfrac{\beta}{1-\kappa} & \text{als} \quad \kappa \neq 1 \\ x_0 + n\beta & \text{als} \quad \kappa = 1, \end{cases}$$

hetgeen we gemakkelijk controleren door in de recursie in te vullen. Evenals in voorbeeld 1 zijn er, afhankelijk van κ, diverse gedragingen te zien:

$\kappa < 1$, dan $\lim_{n\to\infty} x_n = \beta/(1-\kappa)$;
$\kappa > 1$, dan $|x_n| \to \infty$ als $n \to \infty$, tenzij $x_0 = \beta/(1-\kappa)$.

Grafische analyse. We zullen nu laten zien hoe we, voor iedere startwaarde x_0, de opeenvolgende x_n'en van een baan gemakkelijk kunnen tekenen in een plaatje met de grafiek van f en de lijn $y = x$. Deze grafische aanpak levert vaak waardevolle informatie over het gedrag van de x_n voor, bijvoorbeeld, $n \to \infty$. Ter illustratie hebben we in de linker figuren in FIG. 1 de procedure voor het Verhulst model uitgevoerd voor twee waarden van κ. x_0 is hier het meeste linkse streepje langs de x-as.

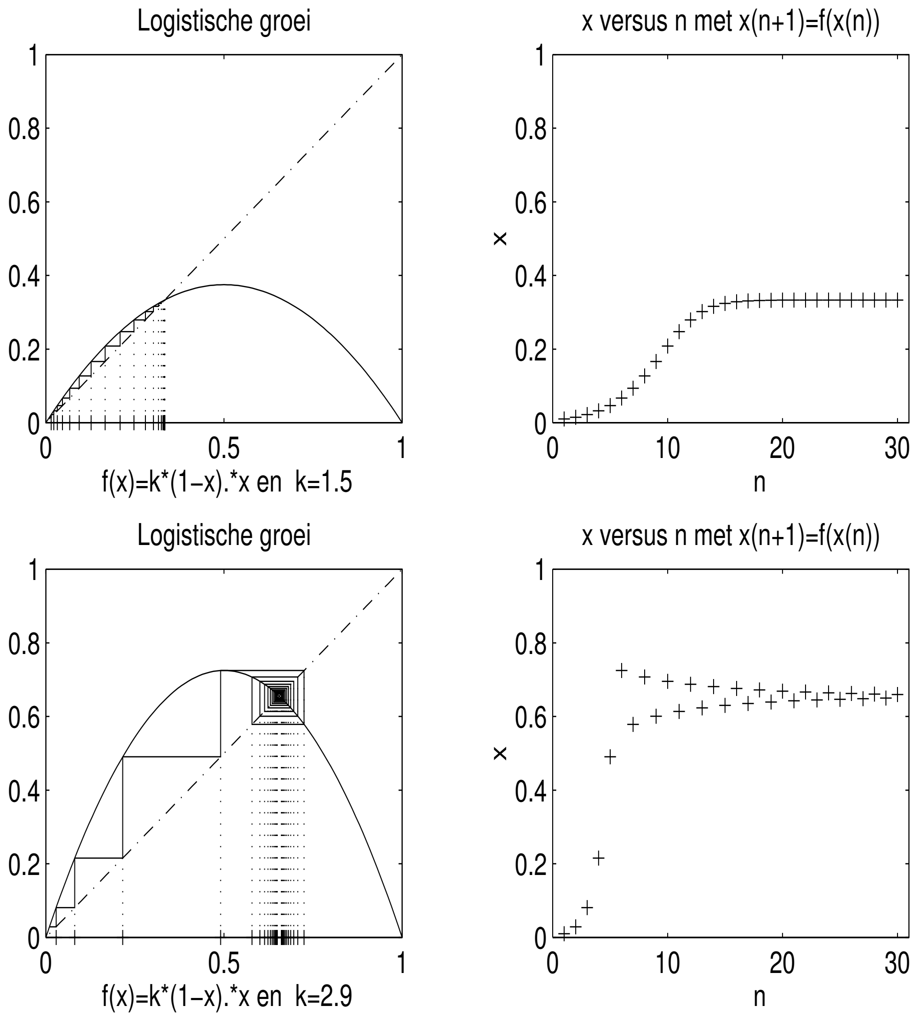
Voor een x_0 vinden we x_1 als volgt.
Ga van de x-as vanaf x_0 vertikaal naar de grafiek van f, ga dan horizontaal naar de lijn $y = x$ en vervolgens vertikaal terug naar de x-as. We komen dan precies in x_1. Dit kunnen we gemakkelijk inzien door de procedure uit te schrijven in koördinaten van het (x, y)-vlak: we gingen van $(x_0, 0)$ (dit is x_0 op de x-as) naar $(x_0, f(x_0))$ (het punt op de grafiek van f boven x_0). Omdat $(x_0, f(x_0)) = (x_0, x_1)$ is (x_1, x_1) het punt op de lijn $y = x$ horizontaal naast $(x_0, f(x_0))$. Het punt onder (x_1, x_1) op de x-as is precies $(x_1, 0)$.
Door vervolgens weer vertikaal naar de grafiek van f te gaan, horizontaal naar $y = x$, vertikaal naar de x-as, vinden we x_2, etc..

De trappetjes en spinnenwebben (zie FIG. 1) die zo ontstaan vertellen ons hoe de x_n'en zich op de duur gedragen. In bijvoorbeeld FIG. 1 snijdt de lijn $y = x$ de grafiek van f in twee punten, in $(0, 0)$ en in, zeg, $(\alpha, f(\alpha))$. We zien dat de x_n konvergeren naar α: in het figuur links boven lopen de x_n monotoon omhoog naar α. Voor kleine n is de groei *relatief* tamelijk sterk (exponentieel), voor grotere n vlakt de groei af en stagneert zelfs (op nivo α): de groei is *logistisch*. In het figuur links onder slingeren de x_n'en voor grotere n rond α. Het verschil met α wordt wel steeds kleiner. Strikt genomen is dit geen logistisch groei, maar wordt wel vaak zo genoemd.

Nu kijken we naar algemenere funkties f.
Een baan (x_n) van de recursie $x_{n+1} = f(x_n)$ is in **evenwicht** als $x_0 = x_1 = x_2 = \ldots$.

Stelling 1.2 *Een baan (x_n) van de recursie $x_{n+1} = f(x_n)$ is in evenwicht precies dan als er een α in V is waarvoor $\alpha = f(\alpha)$ en $x_n = \alpha$ voor alle n.*

Een punt α in V waarvoor $\alpha = f(\alpha)$ (zie stelling) is een **evenwichtspunt** van de recursie. De constante rij $\alpha, \alpha, \alpha, \ldots$ is dan een oplossing van de recursie. Grafisch worden evenwichtspunten aangegeven door de snijpunten van de grafiek van f met de rechte lijn $y = x$ (zie bv.



FIGUUR 1. *De linker plaatjes tonen de grafiek van* $f(x)=\kappa\, x\,(1-x)$ *(—) en de lijn* $y=x$ *(– · –) voor* $\kappa = 1.5$ *(links boven) en* $\kappa = 2.9$ *(links onder). De vertikale streepjes langs de* x*-as geven voor een baan* (x_n) *van de recursie* $x_{n+1} = f(x_n)$ *de positie weer van de* x_n*'en. De* x_n*-waarden zijn ook in de vertikale richting terug te vinden: de tree van het trappetje links van de stippel lijn door* x_n *heeft precies hoogte* x_n*. In de rechter plaatjes staan die* x_n*-waarden uitgezet langs de vertikale as als funktie van* n*,* n *langs de horizontale as.*

FIG. 1).
Een baan (x_n) is *op den duur in evenwicht* α als α een evenwichtspunt is en

$$x_n \to \alpha \quad \text{voor} \quad n \to \infty.$$

Een evenwichtspunt α noemen we **stabiel** of **attractief**, als iedere baan (x_n), die 'in de buurt' van α start, op den duur in evenwicht α is, of wat wiskundig precieser geformuleerd:

er is een $\varepsilon > 0$ *zodat*
voor iedere baan (x_n) *met* $|x_0 - \alpha| < \varepsilon$ *geldt dat* $x_n \to \alpha$ *als* $n \to \infty$.

Een evenwichtspunts α noemen we **labiel** of **repulsief** als geen enkele baan (x_n), die 'dicht bij' α start, bij α 'in de buurt' blijft, of, wiskundiger:

er is een $\varepsilon > 0$ *zodat*
voor iedere baan (x_n) *met* $0 < |x_0 - \alpha| < \varepsilon$ *is* $|x_n - \alpha| > \varepsilon$ *voor zekere* n.

De begrippen "evenwicht", "stabiel" en "labiel" hebben een ruimere, intuïtieve, betekenis die niet alleen maar geldig is voor recursies. De definities hierboven geven slechts een mathematische invulling van die intuïtieve begrippen:

> *Een systeem is in evenwicht als de situatie van tijdstip op tijdstip niet vernadert. Het evenwicht is stabiel als na een willekeurige niet al te grote verstoring de oude situatie zich op den duur weer herstelt.*

Denk, ter illustratie, aan een knikker in een bolvormige kom. Ligt de knikker stil op de bodem dan ligt de knikker in evenwicht. Het evenwicht is bovendien stabiel, immers: na een zetje zal de knikker na wat heen en weer gerol op den duur weer op dezelfde plaats min of meer stil komen te liggen. Dit voorbeeld laat zien waarom we geen grote verstoring toelaten: is de zet te groot dan vliegt de knikker uit de kom. Verder is nu duidelijk wat we bedoelen met 'op den duur': de knikker zal na het zetje nooit meer echt stil liggen, maar na een tijdje zullen we de beweging met het blote oog niet meer kunnen zien. Een knikker die stil ligt op een tafelblad, ligt in een labiel evenwicht: na een zetje komt de knikker niet meer terug naar dezelfde positie.

Voor het Malthus model (zie Voorbeeld 1) is 0 een stabiel evenwicht precies dan als $\kappa < 1$. Voor $\kappa > 1$ is het evenwicht labiel.

Een ander eenvoudig voorbeeld van labiel/stabiel evenwicht vinden we in Voorbeeld 2 als $\kappa \neq 1$. De funktie is in dat geval $f(x) = \kappa\, x + \beta$ en het punt $\alpha = \beta/(1-\kappa)$ is het unieke evenwichtspunt dat gevonden kan worden door oplossing van $\alpha = f(\alpha)$.
Als $\kappa < 1$ dan zagen we dat elke rij naar dit evenwichtspunt konvergeert. We hebben te maken met stabiliteit.
Is daarentegen $\kappa > 1$, dan divergeert x_n tenzij $x_0 = \beta/(1-\kappa)$. In dit geval hebben we te maken met een labiel evenwicht.

Met behulp van de volgende stelling kunnen we gewoonlijk gemakkelijk beslissen of een evenwicht stabiel of labiel is.

Stelling 1.3 *Stel dat f differentieerbaar is in een evenwichtspunt α.*
Als $|f'(\alpha)| < 1$ dan is α een stabiel evenwichtspunt.
Als $|f'(\alpha)| > 1$ dan is α een labiel evenwichtspunt.

Bewijsschets. Voer de nieuwe variabele ε in door $x = \alpha + \varepsilon$. Als ε voldoende klein is geldt (zie FIG. 2)

$$f(\alpha+\varepsilon) = f(\alpha) + f'(\alpha)\,\varepsilon + \text{ orde } \varepsilon^2\text{-termen.} \tag{1.9}$$

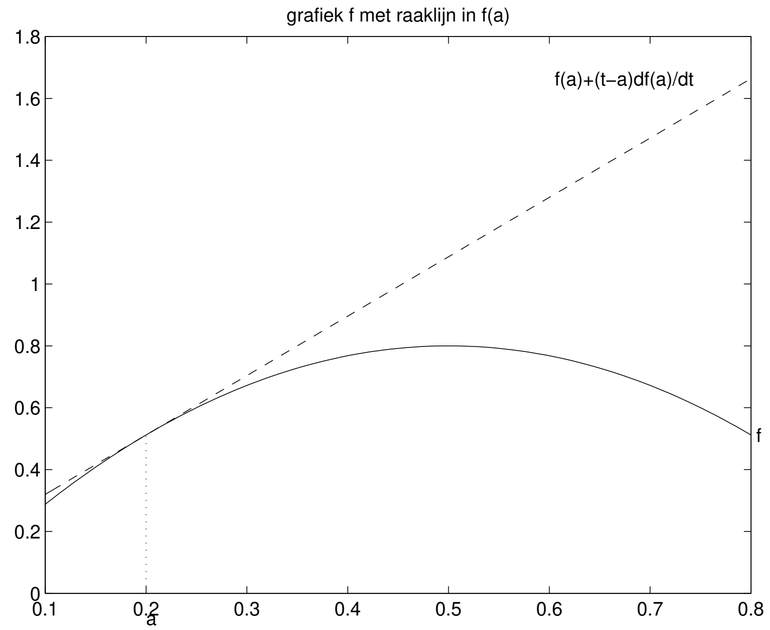
Stel $x_n = \alpha + \varepsilon_n$. We schrijven nu onze recursie om als recursie in ε_n en verwaarlozen daarbij de hogere orde termen,

$$\alpha + \varepsilon_{n+1} = f(\alpha+\varepsilon_n) \approx f(\alpha) + f'(\alpha)\varepsilon_n.$$

De termen α en $f(\alpha)$ vallen tegen elkaar weg ($f(\alpha) = \alpha!$) en we houden over,

$$\varepsilon_{n+1} \approx f'(\alpha)\,\varepsilon_n \tag{1.10}$$

waarbij de benadering goed is voor ε_n voldoende klein. Recursie (1.10) is, nu voor de ε_n, precies de recursie voor het Mathus model en de recursie uit Voorbeeld 1.
We zien dus nu dat, als $|f'(\alpha)| < 1$ en ε_0 voldoende klein, de rij (ε_n) naar nul konvergeert. Met andere woorden $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \alpha + \varepsilon_n = \alpha$ voor alle x_0 voldoende dicht bij α, en dus is α stabiel.
Als daarentegen $|f'(\alpha)| > 1$ dan kan de rij (ε_n) nooit naar nul konvergeren, en het evenwichtspunt is nu labiel. □



FIGUUR 2. *Een funktie f (—) en de lineaire benadering van f in het punt $a = 0.2$ (– –). In de buurt van a, voor $x = a + \varepsilon$ met ε klein, vallen de funktie f en de lineaire benadering vrijwel samen: voor bijvoorbeels $\varepsilon = -0.1$ ($x = 0.1$) is het verschil tussen de twee funktiewaarden $\approx 0.02 = 2\varepsilon^2$.*

In (1.9) benaderen we $f(\alpha + \varepsilon)$ als funktie van ε door de lineaire funktie $f(\alpha) + f'(\alpha)\varepsilon$. Deze procedure noemen we **lineairizeren** rond α. In het bewijs hebben we gezien dat we, door te lineairizeren rond een evenwicht, het algemene gekompliceerde probleem terug kunnen brengen tot het zeer eenvoudige Malthus model. De truuk om via lineairisatie gekompliceerde problemen terug te brengen naar eenvoudigere lineaire, is een standaard wiskundige analyse techniek en zullen we nog vaak toepassen niet alleen voor recursies van één variabele.

Als $|f'(\alpha)| = 1$ kunnen we geen uitspraak doen (zie Stelling 1.3), het gedrag hangt dan ook af van de hogere afgeleiden van f, indien ze bestaan.

Voorbeeld 1.3 Beschouw de recursiea

$$x_{n+1} = x_n(1 - x_n) \qquad \text{en} \qquad x_{n+1} = x_n(1 + x_n).$$

In beide gevallen is 0 een evenwicht en is de afgeleide van de bijbehorende funktie f gelijk aan 1. Voor de linkse recursie is 0 stabiel, immers als $x_n \in (0, 1)$ dan is $x_{n+1} < x_n$ voor alle n. Voor de rechtse recursie is 0 labiel: $x_{n+1} > x_n$ als $x_0 > 0$.

Grafisch kunnen we evenwichtspunten en hun aard illustreren door de grafiek van f te snijden met de rechte lijn $y = x$. We hebben al gezien dat de snijpunten de evenwichtspunten aangeven. De helling van de grafiek van f in deze punten bepaalt hun aard. In de figuur links onder in FIG. 1 is $f(x) = 2.9\,x\,(1 - x)$ en we hebben de evenwichtspunten 0 en $\frac{1.9}{2.9}$. Het eerste is labiel, immers de helling van f in 0 is stijler dan die van de lijn $y = x$ (zie FIG. 1). Omdat de lijn $y = x$ afgeleide 1 heeft moet $f'(0)$ groter dan 1 zijn. Het tweede evenwicht is stabiel: uit de prent zien we dat $f'(\frac{19}{29})$ negatief is en (met wat meer moeite) groter dan -1 (vergelijk de helling van de raaklijn met de helling van de schuine diagonal van links boven naar rechts onder).

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 10.00000000000000000000000000\\
x_1 &= 7.100000000000000000000000000\\
x_2 &= 6.507746478873239436619718309\\
x_3 &= 6.480796732565069020333449675\\
x_4 &= 6.480740698650101031261565712\\
x_5 &= 6.480740698407860230970494742\\
x_6 &= 6.480740698407860230965967435\\
x_7 &= 6.480740698407860230965967435
\end{aligned}
$$

TABEL 1. *Numeriek resultaten voor Voorbeeld 3*

Voorbeeld[vb3] In het volgende voorbeeld beschouwen we de recursie

$$x_{n+1} = \tfrac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right)$$

met $A > 0$ en kiezen $x_0 > 0$. Dan geldt: $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{A}$. We kunnen dit als volgt inzien. Allereerst geldt, omdat het minimum van $\frac{1}{2}(x + A/x)$ precies $\sqrt{A}$ is, dat $x_n \geq \sqrt{A}$ voor alle $n \geq 1$. Verder geldt voor elke $n \geq 1$,

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} - \sqrt{A} &= \tfrac{1}{2}\left(x_n - 2\sqrt{A} + \frac{A}{x_n}\right) = \frac{1}{2x_n}\left(x_n - \sqrt{A}\right)^2 \qquad (1.11)\\
&= \tfrac{1}{2}\,\frac{x_n - \sqrt{A}}{x_n}\left(x_n - \sqrt{A}\right) < \tfrac{1}{2}\left(x_n - \sqrt{A}\right)
\end{aligned}
$$

Dus, met volledige induktie,

$$0 \leq x_n - \sqrt{A} \leq (\tfrac{1}{2})^n\left(x_0 - \sqrt{A}\right).$$

Gevolg, $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{A}$ en het punt $\sqrt{A}$ is een stabiel evenwichtspunt van onze recursie.

De zojuist beschreven recursie levert ons tevens een methode om op razend snelle wijze een wortel uit een getal te berekenen. Dit moge blijken uit de numerieke ressultaten in TABEL. 1 die we krijgen voor $A = 42$ en startwaarde $x_0 = 10$. In 6 stappen hebben we $\sqrt{42}$ tot 27 cijfers achter de komma nauwkeurig!

Bovenstaand voorbeeld was een schoolvoorbeeld van een recursie waarvan het lange termijn gedrag volkomen voorspelbaar is, wat de keuze van A en x_0 ook is. In het volgende voorbeeld laten we zien dat de zaken op lange termijn ook wel eens onvoorspelbaar kunnen zijn. Er treden ondermeer banen (x_n) op die periodiek zijn met periode 2, dat zijn banen die niet in evenwicht zijn maar wel voor geldt dat $x_{n+2} = x_n$ voor iedere n: in iedere tweede stap herhaalt de situatie zich. De recursie heeft ook periodieke banen met een andere periode: een baan is **periodiek** als voor zekere p geldt

$$x_{n+p} = x_n \quad \text{voor iedere} \quad n. \qquad (1.12)$$

De kleinste p waarvoor (1.12) geldt is de **periode**. In plaats van 'periodiek met periode p' zeggen we ook wel p-**periodiek** en noemen we een p-periodieke baan ook wel p-**baan**. Een baan in evenwicht is 1-periodiek.

Voorbeeld 1.4 Neem, op $V = [0, 1]$, de recursie (Verhulst model)

$$x_{n+1} = \kappa\, x_n(1 - x_n) \quad \text{met} \quad 0 < \kappa \leq 4.$$

	$\kappa = 2.5$	$\kappa = 3.2$	$\kappa = 3.7$	$\kappa = 3.838$
x_{50}	0.6000	0.7995	0.3784	0.1505
x_{51}	0.6000	0.5130	0.8703	0.4907
x_{52}	0.6000	0.7995	0.4176	0.9592
x_{53}	0.6000	0.5130	0.8999	0.1503
x_{54}	0.6000	0.7995	0.3334	0.4902
x_{55}	0.6000	0.5130	0.8222	0.9591
x_{56}	0.6000	0.7995	0.5408	0.1504
x_{57}	0.6000	0.5130	0.9188	0.4905
x_{58}	0.6000	0.7995	0.2759	0.9592
x_{59}	0.6000	0.5130	0.7392	0.1504
x_{60}	0.6000	0.7995	0.7133	0.4903

TABEL 2. *Numeriek resultaten voor Voorbeeld 4*

De studie hiervan stellen we even uit tot de volgende paragraaf, maar we geven wel een aantal numerieke resultaten. In de volgende tabel hebben we vier verschillende waarden van κ gekozen en startwaarde $x_0 = 0.2$. Om een indruk te krijgen wat er in deze gevallen uiteindelijk met x_n gebeurt hebben we de waarden van x_{50} tot x_{60} uitgezet in TABEL. 2.

Als $\kappa = 2.5$ dan zien we dat de rij naar het evenwichtspunt 0.6 gaat. Als $\kappa = 3.2$ dan springt de rij op den duur tussen twee waarden heen en weer. We hebben een (stabiele) periodieke baan van orde 2 gevonden. In het geval $\kappa = 3.7$ valt er geen regelmaat te ontdekken en in het geval $\kappa = 3.838$ lijken we te maken hebben met een stabiele periodieke baan van orde 3. Het blijkt dat we bij praktisch iedere keuze van x_0 voor elk van deze κ-waarden een zelfde soort gedrag zien. Hieruit blijkt dat bij verschillende waarden van κ de rij zich zeer verschillend kan gedragen.

Het is pas sinds kort dat men zich bewust is geworden van het feit dat eenvoudige recursies met een simpele f al aanleiding kunnen geven tot een hoogst onvoorspelbaar lange termijn gedrag. Dit kunnen we al met een simpel voorbeeld illustreren.
In dit voorbeeld gebruiken we de notatie $f \circ f$. Hiermee bedoelen we de funktie die gedefinieerd is door

$$f \circ f(x) = f(f(x)).$$

Voor bijvoorbeeld het Verhulst model, met $f(x) = \kappa\, x\, (1 - x)$, is

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = \kappa\, f(x)\, (1 - f(x)) = \kappa\kappa x(1 - x)(1 - \kappa x(1 - x)).$$

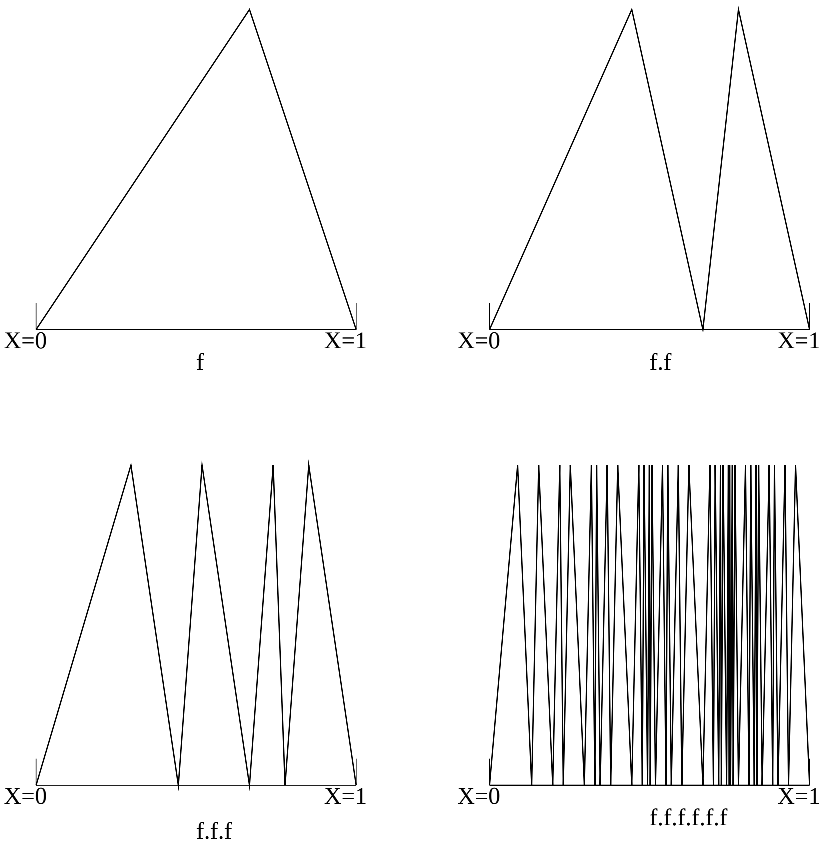
De notatie $f \circ f$ is handig bij het zoeken naar bijvoorbeeld 2-periodieke banen. Immers als (x_n) 2-periodiek is, dan is

$$x_n = x_{n+2} = f(x_{n+1}) = f(f(x_n)) = f \circ f(x_n).$$

Dus dan is (x_{2n}), maar ook (x_{2n+1}), een evenwichtsbaan voor de funktie $f \circ f$.
Analoog hieraan gebruiken we ook de notatie $f \circ f \circ f(x)$ voor $f(f(f(x)))$, etc..

Voorbeeld 1.5 Beschouw de funktie

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\, x, & \text{if} \quad x \in [0, \frac{2}{3}] \\ 3 - 3x, & \text{if} \quad x \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$



FIGUUR 3. *De grafieken van de funkties f, $f \circ f$, . . . uit Voorbeeld 5.*

De recursie $x_{n+1} = f(x_n)$ zou model kunnen staan voor de geremde groei van een populatie organismen. Bekijk nu de grafieken van f en de geïtereerden $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$ en $f^6 = f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f$ in FIG. 3.

In de grafiek van f^6 lezen we af dat $f^6(244/729) = 1$ en $f^6(246/729) = 0$. Met andere woorden een kleine verandering van de startwaarde x_0 met $2/729$ geeft al een dramatische verandering in de waarde van x_6: de recursie is zeer gevoelig voor de startwaarden.

Een grote gevoeligheid van een systeem voor de startwaarden, als in Voorbeeld 5*, noemt men tegenwoordig chaos* en komt in vele gedaanten in de natuur (biologie, chemie, fysica, meteorologie, etc.) voor. Het weer bijvoorbeeld gedraagt zich chaotisch. Bekend is de uitspraak dat het fladderen van een vlinder in de Amazone 14 dagen later in Europa een orkaan kan veroorzaken. Het fladderen van de vlinder verstoort de luchtstroming een beetje maar dat kan al grote gevolgen hebben. Zonder dat fladderen (daar en toen) zou er geen orkaan zijn ontstaan. Verder komen er chaotische systemen voor in de economie.

Een recursie is **chaotisch** als er voor iedere baan (x_n) willekeurig kleine verstoringen zijn op x_0 die op den duur tot grote afwijkingen leiden.
In §1.3 zullen we wat langer stilstaan bij chaotisch gedrag van recursies.

Een belangrijk hulpmiddel bij het bestuderen van complexere recursies is het zoeken naar periodieke banen.

Stelling 1.4 *Een baan (x_n) is p-periodiek precies dan als er verschillende punten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ zijn zó dat*

$$\begin{cases} \alpha_1 = f(\alpha_p), \quad \alpha_{i+1} = f(\alpha_i), \quad \textit{voor } i = 1, \ldots, p-1, \\ \textit{en} \quad x_{i+jp} = \alpha_i \quad \textit{voor } i = 1, \ldots, p \quad \textit{en alle } j. \end{cases}$$

Het is duidelijk dat elk van de punten α_i uit de stelling een evenwichtspunt is van de p-de geïtereerde funktie $f^p = f \circ \cdots \circ f$ (p maal f toepassen). Een p-periodieke baan heet **stabiel** resp. **instabiel** als α_1 een stabiel respectievelijk instabiel punt is van f^p. Om stabiliteit van een p-baan te controleren kunnen we natuurlijk weer gebruik maken van Stelling 1.3. Je hebt dan de waarde van $(f^p)'(\alpha_1)$ nodig. Het berekening van deze waarde lijkt een gekompliceerde zaak. Maar dat valt erg mee. Met behulp van de kettingregel kan je aantonen dat

$$(f^p)'(\alpha_1) = f'(\alpha_1) \cdot f'(\alpha_2) \cdot \ldots \cdot f'(\alpha_p). \tag{1.13}$$

Voor bijvoorbeeld $p = 2$ is $(f \circ f)'(\alpha_1) = f'(f(\alpha_1)) \cdot f'(\alpha_1) = f'(\alpha_2) \cdot f'(\alpha_1)$.
Dit leidt tot de volgende stelling.

Stelling 1.5 *Een p-periodieke baan (x_n) voor de recursie $x_{n+1} = f(x_n)$ is stabiel als*

$$|f'(\alpha_1) \cdot f'(\alpha_2) \cdot \ldots \cdot f'(\alpha_p)| < 1, \tag{1.14}$$

waarbij $\alpha_i = x_i = x_{i+jp}$ voor $i = 1, \ldots, p$ en iedere j.

Tenslotte vermelden we nog een zeer frappante stelling.

Stelling 1.6 (Sarkovski, 1964) *Als een continue afbeelding $f : [0,1] \to [0,1]$ een periodieke baan van orde 3 heeft, dan heeft f een periodieke baan van iedere andere periode.*

Chaos hadden we gekarakteriseerd als de situatie waarin kleine verstoringen op het begin op den duur grote gevolgen hebben. Voor recursies kunnen we het begrip chaos wat scherper formuleren (weer zonder bewijs):

Stelling 1.7 *Een recursie is chaotisch in de buurt van een punt a in V als er voor iedere periode p willekeurig dicht in de buurt van a p-periodieke banen starten.*

Deze formulering impliceert een grote gevoeligheid voor startwaarden $x_0 = a$, immers een 3-periodieke en een 7-periodieke baan zijn totaal verschillend, terwijl er wel van dit soort banen vlakbij a starten.

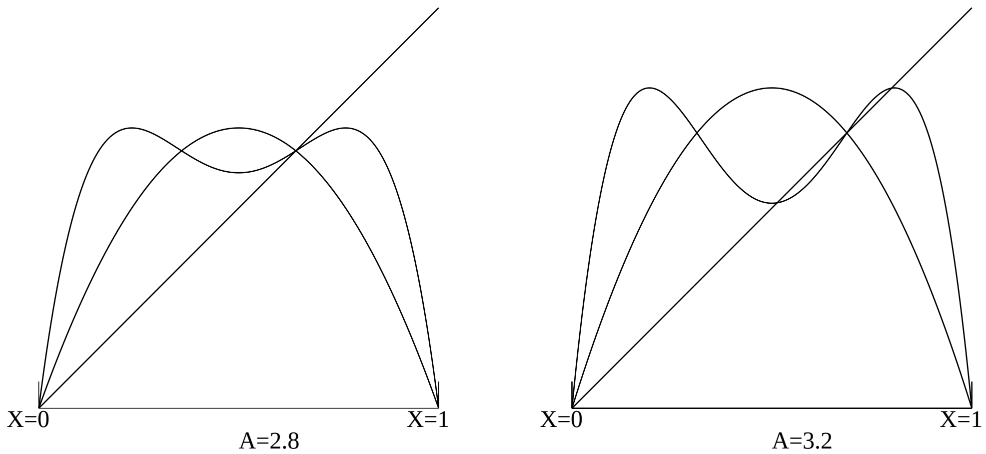
1.3 Logistische groei

In deze paragraaf bestuderen we de wiskundige achtergrond van het Verhulst model. We zien daarbij zeer snel periodieke banen en chaos optreden kortom, verrassende effecten die we niet van zo'n eenvoudig model zouden verwachten. Het is ook opmerkelijk deze verschijnselen onopgemerkt zijn gebleven tot de verschijning van goedkope rekenkracht in de vorm van zakcalculators en PC's. Tamelijk recent dus.

Beschouw de recursie

$$x_{n+1} = \kappa\, x_n(1 - x_n) \quad \text{met} \quad 0 < \kappa \leq 4. \tag{1.15}$$

We onderzoeken hoe de evenwichten en hun stabiliteit veranderen bij toenemende κ.



FIGUUR 4. *De grafieken van de lijn $y = x$ en van f en $f \circ f$ voor het Verhulst model voor $\kappa = 2.8$ (links) en voor $\kappa = 3.2$ (rechts)*

Stabiele en instabiele evenwichten
We berekenen eerst de evenwichtspunten.
Los hiertoe de vergelijking

$$\alpha = \kappa\,\alpha(1 - \alpha)$$

op. We vinden de oplossingen $\alpha_1 = 0$ en $\alpha_2 = 1 - 1/\kappa$.
Merk op dat het evenwichtspunt α_2 alleen in aanmerking komt als $\kappa \geq 1$. Als $\kappa < 1$ dan zou α_2 negatief zijn, en we bekijken alleen punten ≥ 0.

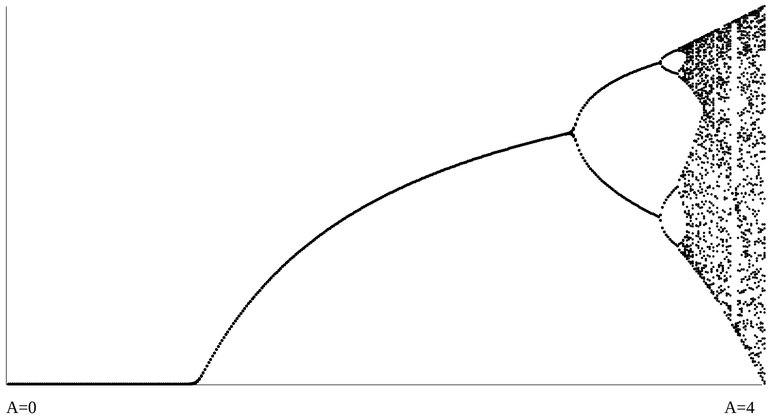
We bepalen nu de stabiliteit van α_1, α_2 met behulp van Stelling 1.3.
De funktie f is $f(x) = \kappa x(1 - x)$ en $f'(x) = \kappa(1 - 2x)$.
Er geldt $f'(\alpha_1) = f'(0) = \kappa$ en dus is α_1 stabiel als $\kappa < 1$ en labiel als $\kappa > 1$.
Verder, $f'(\alpha_2) = f'(1 - 1/\kappa) = 2 - \kappa$ en dus is α_2 stabiel als $2 < \kappa < 3$ en labiel als $\kappa > 3$.

Bifurkatie en chaos
Bekijk nu de situatie voor $\kappa > 3$.
Er zijn dan geen stabiele evenwichtspunten meer. De vraag is waar x_n naar toe gaat als $n \to \infty$.
We schetsen in FIG. 4 de grafieken van x, f en $f^2 = f \circ f$ voor $\kappa = 2.8$ (links) en voor $\kappa = 3.2$ (rechts).

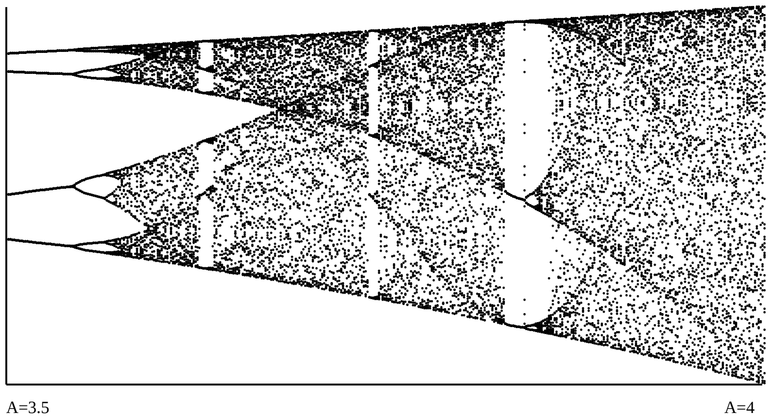
In het plaatje voor $\kappa = 2.8$, links in FIG. 4, herkennen we de evenwichtspunten 0, $1 - 1/\kappa$ en van het punt $1 - 1/\kappa = 0.64\ldots$ zien we ook de stabiliteit. In het plaatje voor $\kappa = 3.2$ zien we dat beide evenwichtspunten instabiel zijn. Er zijn echter twee stabiele evenwichtspunten voor f^2 bijgekomen! Het stabiele evenwicht bij $\kappa < 3$ is blijkbaar overgegaan in een stabiele 2-baan bij $\kappa > 3$. Dit overgangsverschijnsel noemen we een **bifurcatie**.

Het blijkt dat als we κ verder laten toenemen, er nog meer bifurcaties plaatsvinden. Deze kunnen we echter beter op de volgende manier plotten. Zet op de horizontale as de waarden 0 tot en met 4 van κ uit. Op de vertikale as zetten we het interval $[0, 1]$ uit. Voor elke waarde van κ kiezen we $x_0 = 0.2$ en laten de recursie lopen. Vervolgens plotten we boven de gekozen κ de waarden van $x_{50}, x_{51}, \ldots, x_{100}$. De eerste 50 waarden van x_i worden niet geplot om de recursie ‘gelegenheid te geven’ tot een evenwichtstoestand te komen, als die er is. Dit levert het “bifurkatie-diagram” op dat te vinden is in FIG. 5.

De stabiele evenwichten bij $\kappa < 3$ evenals de bifurcatie bij $\kappa = 3$ zijn duidelijk zichtbaar. We zien ook verdere bifurcaties in stabiele 4-banen, 8-banen, etc. tot er voor $\kappa \geq \kappa_c \approx 3.6$ een chaotische brij van punten ontstaat. Bij deze κ-waarden hebben we inderdaad te maken met



FIGUUR 5. *Evenwichtspunten en periodieke banen (langs de vertikale as) voor het Verhulst model voor waarden van $\kappa = A$ tussen 0 en 4 (langs de horizontale as).*



FIGUUR 6. *Een vergroting voor $\kappa = A$ tussen 3.5 en 4 van het "bifurkatie plaatje" in* FIG. 5.

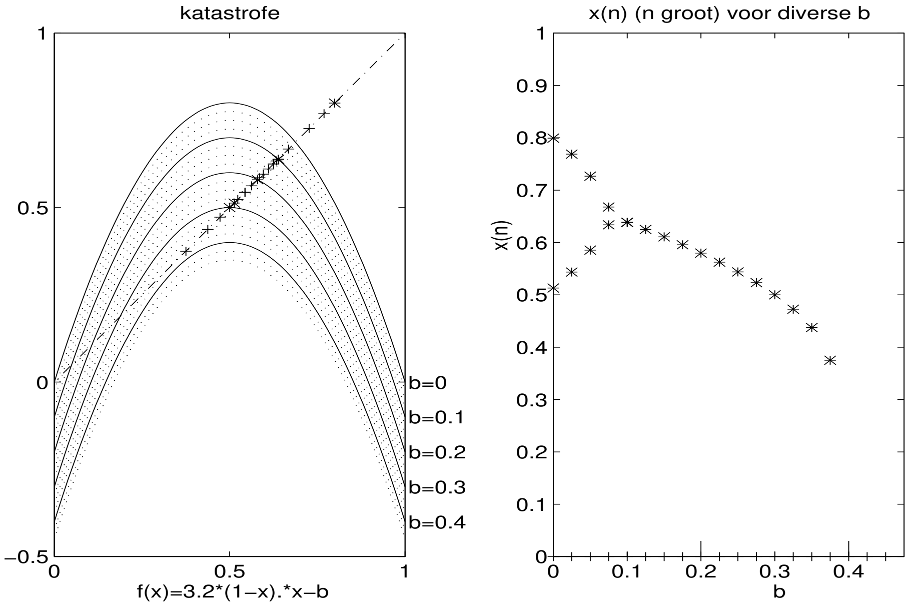
chaos. Verder vallen de κ-waarden bij $3.838\ldots$ op, waar een stabiele 3-baan optreedt. Voor de duidelijkheid vergrootten we het gebied $3.5 < \kappa < 4$ in FIG. 6.

De instabiele evenwichten en de instabiel periodieke banen zien we niet in de figuren FIG. 5 en FIG. 6 (waarom niet?).

Chaos

Voor het Verhulst model met $\kappa < 3$ weten we voor iedere baan met start in $(0, 1)$ wat er op den duur gebeurt: de x_n konvergeren naar het stabiele evenwicht. Ook voor κ tussen 3 en de kritische waarde κ_c weten we wat er op den duur gebeurt: de baan zal in de buurt komen van een stabiele periodieke baan. Als voor $\kappa = 3.2$, x_{50} in buurt van het 2-periodieke punt $\alpha_1 \approx \frac{1}{2}$ ligt dan zullen $x_{100}, x_{102}, \ldots$ vrijwel gelijk zijn aan α_1.[2] Voor iedere specifieke κ kan die baan goed bepaald worden. Voor κ in het chaotisch gebied, $\kappa > \kappa_c$, kunnen we *niet* voorspellen wat x_n op den duur zal zijn. Dat neemt niet weg dat de chaotische situatie toch bestudeerd kan worden. Uit de plaatjes (FIG. 5 en 6) zien we bijvoorbeeld dat voor een 'chaotische' κ x_n niet alle waarden tussen $[0, 1]$ kan hebben. x_n komt, afhankelijk van κ, in sommige delen van $[0, 1]$

[2]Zelfs als we in een instabiele evenwicht of instabiele periodieke baan starten zal *in de praktijk* de baan toch naar een stabiel evenwicht of naar een stabiele periodieke baan konvergeren: in de praktijk zal immers x_0 en de andere x_n met storinkjes belast raken.



FIGUUR 7. *Links de lijn $y = x$ $(- \cdot -)$ en de grafiek van $f(x) = 3.2\,x(1-x) - \beta$ voor verschillende waarde van β. Een doorgetroken lijn (—) is de grafiek voor de waarde van $\beta = b$ die links langs de grafiek staan, een stippellijn $(\cdots)$ is de grafiek voor 'n tussen liggende waarde. Rechts voor de verschillende waarde van β de evenwichtstoestanden van de banen; β langs de horizontale as, $x_{50}, \ldots, x_{100}$ langs de vertikale as.*

vaker dan in andere. De vraag die wie hier kunnen stellen is niet "welke waarde heeft x_n op den duur", maar bijvoorbeeld wel "wat is de kans dat x_n tussen 0.8 en 0.9 zit", of "hoe lang duurt het voordat er, door verstoringen van x_0 ter grootte van 10^{-8}, geen enkel cijfer van x_n meer betrouwbaar is" en "hangt dat nog van x_0 af".[3] Voor de praktijk is de 'chaotische' situatie vaak van belang en de gestelde vragen zijn zeer zinnig. Het beantwoorden van dit soort vragen valt echter buiten het bestek van dit college.

Catastrofe

Beschouw nu de recursie

$$x_{n+1} = \kappa\, x_n(1 - x_n) - \beta \quad \text{met} \quad 0 < \kappa \leq 4 \quad \text{en} \quad \beta \geq 0. \tag{1.16}$$

Deze recursie kan gezien worden als een model voor de groei van een populatie waarop "geoogst" of "gejaagd" wordt; β is de oogst term. In ieder tijdvak verdwijnen βN inviduen (als x_n door schaling met N uit N_n ontstaan is) door oogst of jacht.

We onderzoeken nu hoe de evenwichten en hun stabiliteit veranderen bij toenemende β. We nemen voor κ een vaste waarde: $\kappa = 3.2$. In de rechter prent in FIG. 7 hebben we voor verschillende waarde van β tussen 0 en 0.5 (langs de horizontale as) de waarde van $x_{50}, \ldots, x_{100}$ geplot (langs de vertikale as, als in het bifurkatie diagram in FIG. 5). In de linker prent staat voor verschillende waarde van β de grafiek van $3.2\,x(1-x) - \beta$ geplot samen met de lijn $y = x$.

We kijken alleen naar de limiet-situatie: naar de x_n voor grote n.
We hebben al gezien dat er voor $\beta = 0$ een stabiele 2-periodieke baan is en zien dat bevestigd de rechter prent van FIG. 7. Bij groeiende β komen de punten op de 2-periodieke baan dichter bij

[3] Voor het weer laten deze vragen zich vertalen als "hoe groot is de kans dat er in Europa jaarlijks een orkaan voorkomt", "hoe lang vooruit kunnen we het weer voorspellen als we de gegevens voor vandaag tot op twee cijfers nauwkeurig kennen", "maakt het daarvoor verschil of het vandaag stormachtig weer is of een mooie zomerse dag".

elkaar te liggen totdat er voor $\beta \approx 0.08$ geen 2-periodieke baan meer is (zie de prent rechts). De periodieke baan is dan overgegaan in een stabiel evenwicht. Laten we β geleidelijk nog meer toenemen dan blijven we aanvankelijk een stabiel evenwicht houden en de waarde van dat evenwicht wordt geleidelijk kleiner. Dit komt overeen met wat we intuïtief verwachten: een kleine toename van de oogst zal tot een kleine afname van de populatie-grootte leiden. Echter bij $\beta = 0.378125$ gebeurt er iets onverwachts. Het stabiel evenwicht is dan inmiddels gezakt naar de waarde 0.34375, maar laten we β dan nog verder toenemen dan zien we (in de rechter prent) geen stabiel evenwicht meer. En bij nader beschouwing blijkt er geen evenwicht te zijn, zelfs geen instabiel (de lijn $y = x$ snijdt de grafiek van $3.2\,x(1-x)-\beta$ voor deze β's niet; zie de linker prent). Dus voor $\beta = 0.378125$ is 0.34375 een stabiel evenwicht, voor de ietjes grotere $\beta = 0.378126$ is er überhaupt geen evenwicht.

> *Het verdwijnen van een stabiel evenwicht door een kleine verandering van de parameter waarde noemt men een* **catastrofe**.

De catastrofe speelt zich hier af voor die β waarvoor de lijn $y = x$ *raakt* aan de grafiek van $3.2\,x\,(1-x)-\beta$, dus als α (evenwicht) en β de oplossing is van

$$\alpha = 3.2\,\alpha\,(1-\alpha)-\beta \quad \text{(snijen)} \quad \text{en} \quad 3.2 - 6.4\,\alpha = 1 \quad \text{(raken)}.$$

Uit de 'raakvergelijking' volgt dat $\alpha = 2.2/6.4 = 0.34375$. Invullen van deze waarde in de 'snijvergelijking' levert de kritische waarde $\beta_c = 0.378125$ voor β.
Wat betekent deze catastrofe voor de populatie? De populatie zal niet onmiddelijk verdwijnen als β de kritische waarde β_c overschrijdt. Telkens als de β veranderd wordt duurt het even voordat de recursie in een evenwichtstoestand komt (als die er is). Als β vanuit β_c met $\varepsilon > 0$ vergroot wordt ($\beta = \beta_c + \varepsilon$) is het oude evenwicht de startwaarde voor de baan voor de nieuwe rekursie. De x_n in de nieuwe baan zakt bij stijgende n totdat hij negatief is (maak een "trappetjesplaatje"); dan is de populatie uitgestorven. Het zakken van de x_n gaat voor de eerste paar n langzaam en het gaat langzamer naarmate ε kleiner is. Als we naar de ontwikkeling van de populatie-grootte kijken en niet de recursie analyseren dan is het, zeker voor kleine ε, in de eerste paar tijdstappen nog niet duidelijk dat er een catastrofale ontwikkeling gaande is.

Andere recursies
De verschijnselen bifurkaties, chaos en catastrofe, die we hierboven voor het Verhulst model bestudeerd hebben, komen ook voor bij andere niet-lineaire recursies. De waarde voor bijvoorbeeld de konstanten κ en c in het Hassel, Lawton en May model (1.7) voor de schapenvlieg zitten in het chaotisch regiem, terwijl de waarden voor de coloradokever 2-periodieke banen leveren.

1.4 Oefeningen

Oefening 1.1 Stel dat de groei van een zekere populatie, als die met rust gelaten wordt, gemodelleerd kan worden met het Verhulst model (1.4). Op deze populatie wordt echter geoogst. Het effekt hiervan op de groei van de populatie willen we in het model inbouwen.

a. Stel dat de oogst bestaat uit het wegnemen van eenzelfde aantal individuen in ieder tijdvak (denk aan een vissenpopulatie waaruit jaarlijks een vast aantal (quotum) gevist mag worden). Modelleer deze situatie.

b. Stel dat de oogst bestaat uit het wegnemen van eenzelfde percentage van de totale populatie (denk aan een bak met water en algen waaruit dagelijks 10 liter water met algen vervangen wordt door 10 liter schoon water). Hoe modelleer je dit?

Oefening 1.2 Beschouw de funktie

$$f(x) = \kappa\, x^2(1-x) \quad \text{met} \quad 0 \leq \kappa \leq 27/4$$

op het interval $[0,1]$.

a. Laat zien dat de waarden van f ook in $[0,1]$ liggen.

Beschouw de recursie

$$x_0 \in [0,1], \quad x_{n+1} = f(x_n), \qquad n \geq 0.$$

b. Bepaal voor willekeurige κ de evenwichtspunten van de recursie en ga na of ze stabiel of instabiel zijn.

Oefening 1.3 Beschouw nu de recursie

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{A}{x_n^2}\right)$$

met $A > 1$ en kies $x_0 > 0$.

a. Schets in een plaatje de grafiek van f en de lijn $y = x$. De lijn en de grafiek snijden (voor $x > 0$) elkaar in precies een punt. Laat zien dat dit punt bepaald wordt door $\sqrt[3]{A}$. Onderzoek grafisch of x_n naar $\sqrt[3]{A}$ konvergeert.

b. Stel dat de x_n naar een geta α konvergeren. Laat zien dat $\alpha = \sqrt[3]{A}$.

c. Bewijs tenslotte dat $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt[3]{A}$.

Oefening 1.4 Beschouw voor een continu differentieerbare f de recursie

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Stel de rij $\alpha, \beta, \alpha, \beta, \alpha, \ldots$ een oplossing is van de recursie (een 2-periodieke baan).
Dan geldt dat $\alpha = f(\beta)$ en $\beta = f(\alpha)$.

a. Ga na dat de constante rijen $\alpha, \alpha, \alpha, \ldots$ en $\beta, \beta, \beta, \ldots$ oplossingen zijn van de recursie

$$x_{n+1} = (f \circ f)(x_n).$$

b. Bewijs met behulp van de kettingregel voor differentiatie dat

$$(f \circ f)'(\alpha) = (f \circ f)'(\beta) = f'(\alpha)f'(\beta).$$

De 2-periodiek baan $\alpha, \beta, \alpha, \beta, \ldots$ is dus stabiel als $|f'(\alpha)f'(\beta)| < 1$ en labiel als $|f'(\alpha)f'(\beta)| > 1$ (waarom?)

Kies nu $f(x) = \kappa x(1-x)$ met $1 < \kappa < 4$.

c. Schrijf de vergelijking $(f \circ f)(x) = x$ uit en merk op dat er al twee oplossingen bekend zijn (welke ??).

d. Bewijs dat er voor $\kappa = 2$ geen 2-periodieke baan bestaat en voor $\kappa = 7/2$ wel. Bepaal de laatste en ga na of deze (in)stabiel is.

Oefening 1.5 Beschouw de recursie

$$x_{n+1} = 4x_n(1-x_n),$$

de Verhulst recursie met $\kappa = 4$. Kies ϕ_0 zó dat $x_0 = (\sin(\phi_0))^2$. Bewijs dat dan geldt

$$x_n = (\sin(2^n \phi_0))^2 \quad \text{voor elke} \quad n.$$

Voor welke waarden van ϕ_0 kunnen we een periodieke baan verwachten? Zijn die banen stabiel?

Oefening 1.6 Beschouw de recursie

$$x_{n+1} = 10\, x_n \bmod 1$$

waarbij $\bmod 1$ wil zeggen dat[4] we alleen het getal achter de komma nemen: bijvoorbeeld $3.7956 \bmod 1 = 0.7956$.

a. Geef een 3-periodiek baan voor deze recursie.

b. Laat zien dat er voor iedere x in $[0, 1)$ een x_0 is met $|x - x_0| \leq 10^{-7}$ die een baan genereert die op den duur 3-periodiek is (d.w.z., voor alle grotere n geldt $x_{n+3} = x_n$).

Oefening 1.7 Op een groot landgoed leeft een populatie herten. Het aantal herten aan het einde het n-de jaar geven we aan met N_n. Het blijkt dat de grootte van de hertenpopulatie in een bepaald jaar afhangt van de populatie in het voorgaande jaar volgens een recursie van de vorm

$$N_{n+1} = \kappa N_n(1 - N_n/1000), \tag{1.17}$$

waarin κ een nader aan te geven constante is. Als we in een zeker jaar n op $N_n \leq 0$ terecht zouden komen, dan zeggen we dat de populatie is uitgestorven. Dit wil zeggen dat $N_n = 0$ voor alle $n \geq n$.

We normeren de recursie door de nieuwe variabele $x_n = N_n/1000$ in te voeren.

a. Laat zien dat de getallen x_n voldoen aan de recursie

$$x_{n+1} = \kappa x_n(1 - x_n). \tag{1.18}$$

Omdat x_n en N_n een factor 1000 schelen, is het, als we x_n weten, makkelijk te zien hoeveel herten er zijn in jaar n. Zo betekent $x_n = 0.14$ dat er 140 herten zijn.

We bekijken nu eerst de recursie (1.18) zelf, zonder daarbij aan herten- of zelfs maar dierpopulaties te denken.

b. Bepaal voor elke waarde van κ met $0 \leq \kappa \leq 4$ de evenwichtspunten van (1.18) en ga na of deze stabiel zijn of niet. Maak een grafiek waarin a op de horizontale as is uitgezet tegen het/de (evt.) evenwichtspunt(en) op de vertikale as. Geef in het plaatje ook aan welke evenwichtspunten stabiel zijn en welke niet.

Uit onderzoek is gebleken dat voor onze hertenpopulatie geldt dat $\kappa = \frac{3}{2}$.

c. Is er een stabiel evenwicht bij $\kappa = \frac{3}{2}$ en zo ja, wat is de waarde?

Ons landgoed is niet zo vreedzaam als wij aanvankelijk dachten, de eigenaar en zijn vrienden jagen er namelijk op herten, deels uit populatieonderhoud, deels uit morbide vermaak. De eigenaar besluit dat er jaarlijks een vast aantal herten, zeg J, kunnen worden afgeschoten. Dit betekent dat de populatie zich nu ontwikkelt volgens de formule

$$N_{n+1} = \tfrac{3}{2} N_n(1 - N_n/1000) - J. \tag{1.19}$$

[4] Formeel: $y = x \bmod p$ als $y \in [0, p)$ en $x = np + y$ voor zeker geheel getal n: y is de rest bij deling van x door p.

Hier nemen we aan dat de factor $3/2$ niet is afgenomen door de grotere stress op de dieren.

d. Laat zien dat de getallen $x_n = N_n/1000$ nu voldoen aan de recursie

$$x_{n+1} = \tfrac{3}{2}x_n(1 - x_n) - b, \tag{1.20}$$

waarin $b = J/1000$.

e. De eigenaar van het landgoed besluit dat een constant aantal herten van 200 op zijn landgoed wenselijk zou zijn. Is het mogelijk om J, en dus b, zo kiezen dat er ieder jaar 200 herten zijn? Is dit aantal stabiel?

f. Beantwoord deze vragen nogmaals voor een aantal van 100 herten.

g. Onderzoek nu voor $0 \leq b \leq 0.05$ de recursie (1.20) op evenwichtspunten. Onderzoek of deze stabiel zijn. Zet ten slotte in een grafiek de evenwichtpunten uit tegen de waarden van b tussen 0 en 0.05 en geef aan waar we te maken hebben met stabiliteit en waar met instabiliteit.

2 Intermezzo

Wiskunde levert technieken waarmee moeilijke onbekende problemen teruggebracht kunnen worden tot vertrouwde relatief gemakkelijke problemen. In het vorige hoofdstuk hebben we al gezien hoe door te lineairizeren een 'moeilijk' niet-lineair probleem teruggebracht kan worden tot een 'gemakkelijk' lineair probleem. De problemen in dat hoofdstuk waren 1-dimensional (recusies voor getallen en nog niet voor vectoren). In de volgende hoofdstukken zullen we hoger dimensionale problemen analyseren. Lineaire hoger dimensionale problemen kunnen met behulp van eigenvectoren gereduceerd worden tot 1-dimensionale problemen. Hoger dimensionale niet-lineaire problemen kunnen ook weer (deels) via lineairisatie gereduceerd worden tot hoger dimensionale lineaire problemen.

Eigenwaarden en eigenvectoren spelen dus een belangrijke rol in onze analyse technieken. We zetten in dit intermezzo nog wat eigenschappen en definities op een rijtje (zie ook Kreyszig, §7.10).

2.1 Eigenwaarden en eigenvectoren

Een skalair λ is een **eigenwaarde** van $\mathbf{A}$ met **eigenvektor** $\mathbf{v}$ als $\mathbf{v} \neq 0$ en

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}. \tag{2.1}$$

Stelling 2.1 *Als $\mathbf{v}$ een eigenvektor is van $\mathbf{A}$ bij eigenwaarde λ dan is ieder skalair veelvoud van $\mathbf{v}$ ook een eigenvektor bij dezelfde eigenwaarde:*

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{v}) = \lambda(\alpha\mathbf{v}) \quad \textit{voor iedere skalair} \quad \alpha \neq 0.$$

Stelling 2.2 *De eigenwaarden λ zijn de oplossingen van de* **eigenwaardenvergelijking**

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0. \tag{2.2}$$

De eigenwaardenvergelijking heet ook wel *karakteristeieke vergelijking* van $\mathbf{A}$.

Stelling 2.3 *Als $\mathbf{v}$ een eigenvektor is van een inverteerbare matrix $\mathbf{A}$ met eigenwaarde λ dan is $\mathbf{v}$ ook een eigenwaarde van $\mathbf{A}^{-1}$. De bijbehorende eigenwaarde is dan $\frac{1}{\lambda}$.*

2×2 **matrices.** De determinant $\det(\mathbf{C})$ van een 2×2 matrix

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \beta \end{bmatrix}$$

kan gemakkelijk uitgerekend worden:

$$\det(\mathbf{C}) = \alpha\beta - \gamma\delta.$$

De eigenwaardenvergelijking voor deze matrix $\mathbf{C}$ wordt dus

$$\det\left(\begin{bmatrix} \alpha - \lambda & \gamma \\ \delta & \beta - \lambda \end{bmatrix}\right) = (\alpha - \lambda)(\beta - \lambda) - \gamma\delta = \lambda^2 - (\alpha + \beta)\lambda + (\alpha\beta - \gamma\delta).$$

In deze vergelijking spelen de determinant $\alpha\beta - \gamma\delta$ en het spoor $\alpha + \beta$ een rol. Het **spoor** van een matrix is de som van alle diagonaal elementen.

$$\det(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 - \text{spoor}(\mathbf{C})\lambda + \det(\mathbf{C}). \tag{2.3}$$

Als λ_1 en λ_2 de wortels zijn van de eigenwaardenvergelijking, de eigenwaarden dus, dan is

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - \text{spoor}(\mathbf{C})\lambda + \det(\mathbf{C}).$$

Schrijven we het eerste product uit dan zien we dat

$$\lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = \lambda^2 - \text{spoor}(\mathbf{C})\lambda + \det(\mathbf{C}).$$

Omdat deze vergelijking korrekt is voor iedere λ volgt dat

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{spoor}(\mathbf{C}) = \alpha + \beta \quad \& \quad \lambda_1\lambda_2 = \det(\mathbf{C}) = \alpha\beta - \gamma\delta. \tag{2.4}$$

Vaak kunnen we zonder de eigenwaarden expliciet te berekenen uit de formules in (2.4) al geschikte informatie halen.
Stel dat we willen weten of alle eigenwaarden van de matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

positief zijn. De determinant is $1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$. Dus $\lambda_1\lambda_2 < 0$ en een van de eigenwaarden moet dan wel negatief zijn en de andere positief.

Voor 2×2 matrices kunnen we de determinant gemakkelijk uitrekenen. Hieronder geven we een procedure voor 3×3 matrices. Voor matrices van grotere afmeting blijft het echter lastig werk. Bovendien valt het niet mee om de wortels van een n-de graads vergelijking te bepalen. (Professionele computerprogramma's gebruiken voor het berekenen van de eigenwaarden niet de eigenwaardenvergelijking.)

3×3 **matrices.** Bij het berekenen van determinanten is het altijd lastig de korrekte volgorde van vermenigvuldigen, optellen en aftrekken te onthouden. Voor 3×3 matrices is er een schema dat lijkt op het berekeningsschema van determinanten van 2×2 matrices. Helaas bestaat er niet zo'n overzichtelijk schema voor matrices van afmeting 4×4 en hoger.

De determinant van een 3×3 matrix $\mathbf{C}$ is gegeven door

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{C}) = &+\alpha_1 \cdot \beta_2 \cdot \gamma_3 - \gamma_1 \cdot \beta_2 \cdot \alpha_3 \\ &+\beta_1 \cdot \gamma_2 \cdot \alpha_3 - \alpha_1 \cdot \gamma_2 \cdot \beta_3 \\ &+\gamma_1 \cdot \alpha_2 \cdot \beta_3 - \beta_1 \cdot \alpha_2 \cdot \gamma_3 \end{aligned} \quad \text{als} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix}.$$

Het schema hieronder, waarin achter de kolommen van $\mathbf{C}$ de eerste en de tweede kolom van $\mathbf{C}$ gekopieerd zijn, geeft de berekeningsvolgorde weer:

$$\begin{array}{ccccccccccc} + & & + & & + & & - & & - & & - \\ & \alpha_1 & & \beta_1 & & \gamma_1 & & \alpha_1 & & \beta_1 & \\ & & \searrow & & \times & & \times & & \swarrow & & \\ & \alpha_2 & & \beta_2 & & \gamma_2 & & \alpha_2 & & \beta_2 & \\ & & \swarrow & & \times & & \times & & \searrow & & \\ & \alpha_3 & & \beta_3 & & \gamma_3 & & \alpha_3 & & \beta_3 & \end{array} \tag{2.5}$$

Vermenigvuldig langs iedere *komplete* diagonaal de getallen; tel de resultaten langs de noordwest-zuidoost diagonalen op; trek de resultaten langs de zuidwest-noordoost diagonalen af en het resultaat is precies $\det(\mathbf{C})$.

Voor somige type matrices kunnen we, ook als de matrix grote afmetingen heeft, de eigenwaarden gemakkelijk bepalen.

Driehoeksmatrices. De matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3.5 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

is een **bovendriehoeks matrix**: alle elementen onder de diagonal zijn nul. Voor dit soort matrices hoeven we niet te rekenen om de eigenwaarden te vinden, dat zijn precies de diagonaal elementen. Eenzelfde opmerking geldt voor **benedendriehoeks matrices**, matrices waarvan alle elementen boven de diagonaal nul zijn. Dus 3, 2 en 3.5 zijn de eigenwaarden van de matrix in (2.6). Voor een $m \times m$ driehoeks matrix $\mathbf{A}$ met elementen a_{ij} geldt namelijk

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{mm}$$

en dus

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdot \cdots \cdot (a_{mm} - \lambda)$$

en stelling 2.2 vertelt ons dat de a_{ii} de eigenwaarden zijn.

Stelling 2.4 *Als $\mathbf{A} = (a_{ij})$ een $m \times m$ boven (of beneden) driehoeks matrix is dan zijn $\lambda_i = a_{ii} \quad (i = 1, \ldots, m)$ de eigenwaarden van $\mathbf{A}$.*

Van een ander type matrices die veel in de praktijk voorkomen kunnen de eigenwaardenvergelijkingen gemakkelijk opgesteld worden (zonder de determinantenformule!) en de eigenvektoren kunnen gemakkelijk berekend worden als de eigenwaarden bekend zijn.

Leslie matrices. We werken eerst een voorbeeld uit. Als

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

en λ is een eigenwaarde dan is

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

Door links en rechts van het =-teken uit te vermenigvuldigen ga je gemakkelijk na dat de tweede en de derde koördinaat klopt. De eerste koördinaat klopt ook als λ tenminste voldoet aan

$$3\lambda^2 + 7\lambda + 2 = \lambda^3. \tag{2.8}$$

Deze derde graads vergelijking heeft drie oplossingen en iedere oplossing is kennelijk een eigenwaarde (in (2.7) staat een uitdrukking van de vorm $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$!) en levert tevens de bijbehorende eigenvektor (twee vliegen in een klap!). Omdat $\mathbf{A}$ maar drie eigenwaarden heeft moet (2.8) de eigenwaardenvergelijking zijn op een andere manier opgeschreven (het is in ieder geval een vergelijking die de eigenwaarden levert).

De truuk werkt algemener. Bijvoorbeeld

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^3 \\ \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \lambda^3 \\ \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{bmatrix}$$

is korrekt als

$$\alpha\lambda^3 + \beta\lambda^2 + \gamma\lambda + \delta = \lambda^4. \tag{2.9}$$

Weer kloppen de laatste 3 koördinaten vanzelf en als λ voldoen aan (2.9) klopt ook de eerste koördinaat.

Het feit dat voor iedere $i > 1$ de i-de rij van $\mathbf{A}$ overal nullen heeft behalve in de $i-1$-ste kolom maakt de berekening zo gemakkelijk. Dit niet-nul element hoeft niet noodzakelijk 1 te zijn. Laten we eens proberen de matrix vektor vergelijking

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^3 \\ a\lambda^2 \\ b\lambda \\ c \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \lambda^3 \\ a\lambda^2 \\ b\lambda \\ c \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

kloppend te krijgen. De tweede koördinaat klopt als $5\lambda^3 = \lambda a\lambda^2$. Voor $a = 5$ is dat het geval. Voor de derde koördinaat moet gelden dat $9a\lambda^2 = \lambda b\lambda$. Met $a = 5$ is dat goed voor $b = 9 \cdot 5 = 45$. Voor de vierde koördinaat moet $3b\lambda = \lambda c$. Met $b = 45$ is $c = 135$. Met deze waarden voor a, b en c klopt de eerste koördinaat als

$$3\lambda^3 + 35\lambda^2 + 270 = 3\lambda^3 + 7a\lambda^2 + 2c = \lambda^4.$$

We kunnen de volgende stelling formuleren (voor 4×4 matrices; formuleer zelf de variant van de stelling voor $m \times m$-matrices)

Stelling 2.5 *Er geldt*

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^3 \\ s_1\lambda^2 \\ s_2s_1\lambda \\ s_3s_2s_1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \lambda^3 \\ s_1\lambda^2 \\ s_2s_1\lambda \\ s_3s_2s_1 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

als λ de oplossing is van de vergelijking

$$g_1\lambda^3 + g_2c_1\lambda^2 + g_3c_2c_1\lambda + g_4c_3c_2c_1 = \lambda^4. \tag{2.12}$$

Het type matrices dat we in deze subparagraaf bekeken hebben speelt een belangrijke rol in de populatie dynamica; de matrices worden **Leslie** matrices genoemd. In het volgende hoofdstuk zullen we processen met dit soort matrices uitgebreid bestuderen.

Tenslotte in dit intermezzo over eigenwaarden en eigenvektoren bekijken we nog een speciaal type matrices die in de praktijk ook nogal eens gebruikt worden.

Eerst voeren we een notatie in.
Als $\mathbf{A}$ een matrix is met elementen a_{ij} dan is $\mathbf{A}^T$ de matrix met elementen a_{ji}: de matrix elementen worden gespiegeld t.o.v. de diagonaal. Bijvoorbeeld

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 3.5 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 9 & 7 & 3.5 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{A}^T$ is de **getransponeerde** van $\mathbf{A}$.
$\mathbf{A}$ en $\mathbf{A}^T$ hebben dezelfde eigenwaarden: er is helaas geen mooi verband tussen de eigenvektoren.

Stelling 2.6 *Als λ een eigenwaarde is van $\mathbf{A}$ dan is λ een eigenwaarde van $\mathbf{A}^T$*

Bewijs. Omdat $\det(\mathbf{C}^T) = \det(\mathbf{C})$ voor iedere vierkante matrix $\mathbf{C}$ is

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^T) = \det(\mathbf{A}^T - \lambda\mathbf{I}).$$

Stelling2.2 vertelt ons nu dat λ een eigenwaarde van $\mathbf{A}$ precies dan als λ een eigenwaarde is van $\mathbf{A}^T$. $\square$

Als de elementen van iedere rij van $\mathbf{A}$ optellen tot 1 dan is 1 een eigenwaarde van $\mathbf{A}$. De vekor $\mathbf{1}$ van allemaal 1'tjes is dan de bijbehorende eigenvektor. De volgende stelling laat zien dat 1 ook een eigenwaarde is van $\mathbf{A}$ als de elementen van iedere kolom optellen tot 1. Dit resultaat is minder makkelijk te bewijzen en de bijbehorende eigenvektor hoeft ook niet $\mathbf{1}$ te zijn.

Stelling 2.7 *Als van iedere kolom van $\mathbf{A}$ de elementen optellen tot 1 dan is 1 een eigenwaarde.*

Bewijs. Omdat de kolom-elementen van $\mathbf{A}$ optellen tot 1 tellen de rij elementen van $\mathbf{A}^T$ ook op tot 1. Dus is de vektor $\mathbf{1}$ van allemaal 1'tjes een eigenvektor van $\mathbf{A}^T$ met eigenwaarde 1. Uit stelling 2.6 volgt dat 1 een eigenwaarde is van $\mathbf{A}$. $\square$

2.2 Oefeningen

Oefening 2.1 Gegeven is de matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.4 & 2 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix}.$$

a. Bereken de eigenwaarden en de eigenvektoren van $\mathbf{A}$.

b. Schets de vektoren $\mathbf{A}^n\mathbf{x}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$, waarbij $\mathbf{x}$ een eigenvektor is (maak de schets voor beide eigenvektoren).

c. Dezelfde vraag als in (b), maar nu voor $\mathbf{x} = e_1$.

Oefening 2.2 Gegeven is de matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.9783 & 0.0083 \\ -0.0083 & 1.0217 \end{bmatrix}.$$

a. Bereken de eigenwaarden en de eigenvektoren van $\mathbf{A}$.

b. Schets de vektoren $\mathbf{A}^n\mathbf{x}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$, waarbij $\mathbf{x}$ een eigenvektor is (voor beide eigenvektoren).

c. Dezelfde vraag als in (b), maar nu voor $\mathbf{x} = e_1$.

Oefening 2.3 Gegeven is de matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a. Bereken de eigenwaarden en de eigenvektoren van $\mathbf{A}$.

b. Schets de vektoren $\mathbf{A}^n\mathbf{x}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$, waarbij $\mathbf{x}$ een eigenvektor is (voor beide eigenvektoren).

c. Dezelfde vraag als in (b), maar nu voor $\mathbf{x} = e_1$.

Oefening 2.4 Bereken de eigenwaarden en de eigenvektoren van de matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 12 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Oefening 2.5 Gegeven is de matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 14 & 5 \\ -10 & -1 \end{bmatrix}.$$

a. Bepaal de eigenwaardenvergelijking van $\mathbf{A}$.

b. Bereken de eigenwaarden λ_1 en λ_2 van $\mathbf{A}$.

c. Bereken de eigenvektoren $\mathbf{v}_1$ en $\mathbf{v}_2$ van $\mathbf{A}$.

d. Teken de eigenlijnen van $\mathbf{A}$ (de lijnen waarop de eigenvektoren liggen).

e. Neem $\mathbf{w}_0 = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ en teken $\mathbf{w}_i = (\frac{1}{4}\mathbf{A})^i\mathbf{w}_0$ voor $i = 1, 2, \ldots, 6$. Wat valt je op?
Doe nu hetzelfde voor enkele vektoren die niet op de eigenlijnen liggen.

f. Neem $\mathbf{w}_0 = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ en teken $\mathbf{w}_i = (\frac{1}{9}\mathbf{A})^i\mathbf{w}_0$ voor $i = 1, 2, \ldots, 6$. Wat valt je op?
Doe nu hetzelfde voor enkele vektoren die niet op de eigenlijnen liggen.

g. Neem $\mathbf{w}_0 = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ en teken $\mathbf{w}_i = (\frac{1}{10}\mathbf{A})^i\mathbf{w}_0$ voor $i = 1, 2, \ldots, 6$. Wat valt je op?
Doe nu hetzelfde voor enkele vektoren die niet op de eigenlijnen liggen.

Oefening 2.6 Gegeven is de matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

a. Bepaal de eigenwaardenvergelijking van $\mathbf{A}$.

b. Bereken de eigenwaarden λ_1 en λ_2 van $\mathbf{A}$.

c. Bereken de eigenvektoren $\mathbf{v}_1$ en $\mathbf{v}_2$ van $\mathbf{A}$.

d. Neem nu enkele vektoren $\mathbf{w} \in \mathbf{R^2}$ en schets het gedrag van deze vektoren als je itereert met $\frac{1}{3}\mathbf{A}$, d.w.z. teken $w_i = (\frac{1}{3}\mathbf{A})^i w$ voor $i = 1, 2, \ldots, 6$. Wat valt je op?

e. Doe hetzelfde, maar nu met $\frac{1}{5}\mathbf{A}$. Wat valt je op?

Oefening 2.7 Bewijs stelling 2.3.

Oefening 2.8 Laat zien dat de matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.5 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$

een eigenwaarde 1 heeft.

Oefening 2.9 Als van iedere rij van een matrix $\mathbf{A}$ de elementen optellen tot 1 dan is de vektor $\mathbf{1}$ van allemaal 1'tjes een eigenvector en 1 is de bijbehorende eigenwaarde. Bewijs dit.

Oefening 2.10 Voor welke soort $m \times m$ matrices kan het analogon van Stelling2.5 geformuleerd woren? Formuleer zo'n stelling.

3 Leslie matrices en Markov ketens

3.1 Inleiding

In hoofdstuk 1 hebben we gekeken naar de groei van populaties bestaande uit één soort. In het algemeen is dit een te simpele voorstelling van zaken. In meer realistische modellen moeten we bijvoorbeeld rekening houden met het feit dat verschillende populaties met elkaar in interactie zijn (bijvoorbeeld roofdier-prooidier). Een ander effekt is dat de individuen in één populatie zich verschillend kunnen gedragen, bijvoorbeeld, alleen geslachtsrijpe individuen kunnen reproduceren, terwijl de jongeren alleen maar opgroeien. We beginnen met een lineair model dat in feite beschouwd kan worden als een Malthus model, maar dan uitgesplitst naar leeftijdsgroepen.

Als concreet voorbeeld nemen we de populatie grote sterns in het Waddengebied. Deze populatie fluctueerde de afgelopen jaren sterk als gevolg van de vervuiling met gifstoffen, die voor een groot deel uit het Rijnmondgebied afkomstig bleken te zijn.

jaar	1940	1955	1960	1965	1966	1967	1968	1969	1970
broedparen	4000	2600	1200	65	170	100	150	200	250

Nadere bestudering leert dat er drie fasen in het leven van de stern onderscheiden kunnen worden. De fase tot het uitkomen van het ei, de fase waarin de jongen uitgroeien tot volwaardige sterns, en de fase van de volwassen stern. De tweede fase is de leerfase met alle risco's die daaraan verbonden zijn. We beperken ons model tot de eerste drie levensjaren en tot de vrouwtjes-populatie. Met dit laatste vermijden we enkele problemen zoals het boekhouden van de gemengde 2e/3e jaarsparen. In een gezonde populatie vindt het volgende plaats.

Aannamen 3.1 *Van het eerste jaar, uitkomen van het ei plus leerfase, overleeft een kwart. In het tweede levensjaar overleeft de helft.*
De een-jarige vrouwelijk sterns produceren gemiddeld een jaar later twee levensvatbare vrouwelijke kuikens, terwijl de twee-jarige vrouwelijke sterns gemiddeld een jaar later vier vrouwelijke kuikens voortbrengen.

We kijken naar de populatie sterns aan het eind van jaar n. Stel $N_n(1)$ is het aantal kuikens (vrouwelijke sterns in hun eerste jaar) dat in jaar n uitgekomen is, $N_n(2)$ het aantal sterns dat de leerfase heeft overleefd (bezig zijn aan hun 2-de levensjaar), en $N_n(3)$ het aantal sterns dat het derde jaar haalt. De gemelde overlevingspercentages leiden tot de volgende relaties

$$N_{n+1}(2) = \tfrac{1}{4}N_n(1) \quad \text{en} \quad N_{n+1}(3) = \tfrac{1}{2}N_n(2)$$

en produktie van vrouwelijke kuikens laat zich vertalen tot

$$N_{n+1}(1) = 2N_n(2) + 4N_n(3).$$

We kunnen deze drie relaties beknopt in matrixvorm weergeven:

$$\begin{bmatrix} N_{n+1}(1) \\ N_{n+1}(2) \\ N_{n+1}(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_n(1) \\ N_n(2) \\ N_n(3) \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

Een grote achteruitgang van het aantal levend geboren jongeren zou worden gegeven door een matrix als

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Bij geringe vergiftiging van het milieu komen de jongen wel uit, maar blijken de jongen erg kwetsbaar. Dit kan beschreven kan worden met een matrix als

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{16} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

De vraag is natuurlijk wat er in deze verschillende modellen met de sternpopulatie gebeurt als $n \to \infty$. De theorie hiervoor wordt in de volgende paragraaf besproken.

We gaan nu van sterns over naar willekeurige populaties.
We delen deze op in m leeftijdsgroepen genummerd van 1 tot en met m. Als éénheid van opdeling in deze leeftijdsgroepen nemen we het tijdvak waarover we onze populatie elke keer tellen. Als dit tijdvak een jaar is, dan zijn de leeftijdsgroepen de 1-jarigen, 2-jarigen etc. Het aantal individuen in de k-de leeftijdsgroep en aan het begin van het n-de tijdvak geven we aan met $N_n(k)$. Voor het opstellen van het model maken we twee aannamen.

Aannamen 3.2 Allereerst, *gedurende elk tijdvak overleeft een fraktie s_k van leeftijdsgroep k.* In formulevorm:

$$N_{n+1}(k+1) = s_k N_n(k).$$

Ten tweede, *het aantal individuen dat per tijdvak 'geboren' wordt, d.w.z. $N_{n+1}(1)$, hangt af van de vruchtbaarheid van de diverse leeftijdsgroepen volgens,*

$$N_{n+1}(1) = g_1 N_n(1) + g_2 N_n(2) + \cdots + g_m N_n(m).$$

De getallen g_i kunnen gezien worden als een maat voor de produktiviteit van de verschillende leeftijdsgroepen. We hebben nu als model gevonden,

$$\begin{bmatrix} N_{n+1}(1) \\ N_{n+1}(2) \\ N_{n+1}(3) \\ \vdots \\ N_{n+1}(m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_{m-1} & g_m \\ s_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & s_{m-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_n(1) \\ N_n(2) \\ N_n(3) \\ \vdots \\ N_n(m) \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

of, afgekort,

$$\mathbf{N}_{n+1} = \mathbf{L}\,\mathbf{N}_n. \tag{3.5}$$

Een matrix L van de gedaante zoals in (3.4) noemen we een **Leslie matrix**. Het is duidelijk dat bij gegeven beginpopulatie N_0 de populatie na het n-de tijdvak gegeven wordt door

$$\mathbf{N}_n = \mathbf{L}^n\,\mathbf{N}_0.$$

Grote vraag is natuurlijk weer hoe $\mathbf{L}^n$ zich gedraagt als $n \to \infty$. Sterft de bevolking uit? Groeit de bevolking explosief? Hoe veranderert de leeftijdsopbouw? Blijft de verhouding tussen tussen het aantal individuen van leeftijdsklasse n en van $n+1$ hetzelfde? In onze maatschappij is het bijvoorbeeld van belang te weten of de verhouding tussen het aantal bejaarden en het aantal mensen tussen 20 en 65 (de 'werkende groep') gelijk blijft. In de volgende paragrafen zullen we dit soort vragen vertalen naar wiskunde en beantwoorden.

Natuurlijk geldt ook hier dat het gebruik van Leslie matrices voor beschrijving van populatiegroei vele beperkingen heeft. Enerzijds ligt dit aan storende effekten die de toepasbaarheid kunnen beperken, anderzijds is er de impliciete aanname dat het model uitgaat van grote populaties. Zou onze populatie namelijk uit één of twee individuen bestaan dan is de toekomst van deze populatie natuurlijk sterk afhankelijk van toevallige gebeurtenissen. Eén van de dieren kan bijvoorbeeld verongelukken waardoor verdere voortzetting van de populatie uitgesloten is. Door statistische analyse moet eigenlijk nagegaan worden wanneer een model met een Leslie matrix betrouwbaar kan worden geacht in dit opzicht. Een ander mogelijkheid is dat men de invloed van statistische fluktuaties bekijkt door het uitvoeren van simulaties. Deze opmerkingen lijken misschien wat overbodig, maar het zou niet de eerste keer zijn dat een model met Leslie matrices wordt toegepast op de bestudering van 0.1 beest!

Een ander voorbeeld van matrix iteraties bespreken we in §3.5.

3.2 Matrixrecursies, theorie

In de vorige sectie zijn we problemen tegengekomen van het volgende type.
Zij $\mathbf{A}$ een $m \times m$ matrix en beschouw de rij vektoren $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \ldots$ gegeven door de recursie

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n, \qquad n \geq 0. \tag{3.6}$$

De oplossing luidt natuurlijk,

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0.$$

Grote vraag is echter wat er gebeurt met $\mathbf{A}^n \mathbf{x}_0$ als $n \to \infty$.

Evenwichtssituaties zijn weer van special belang.
Een baan $(\mathbf{x}_n)$ van de matrix recursie (3.6) is in **evenwicht** als $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n$ voor alle n, dus als

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{v}, \tag{3.7}$$

en $\mathbf{v} = \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \ldots$: $\mathbf{v}$ is dan een evenwichtsvektor.
De matrix recursie heeft natuurlijk een triviaal evenwicht, namelijk $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, de nul vektor. Maar we herkennen in (3.7) ook een eigenvektorvergelijking: $\mathbf{v}$ zou ook een eigenvektor kunnen zijn bij eigenwaarde 1.

Stelling 3.3 *De nul vektor* $\mathbf{0}$ *is een evenwichtsvektor voor de matrix recursie* (3.6)*. Als bovendien 1 een eigenwaarde is van de matrix* $\mathbf{A}$ *dan is de bijbehorende eigenvektor (en ieder skalair veelvoud) een evenwichtsvektor.*

Voorbeeld 3.1 [Sterns] We onderzoeken of de stern populatie een evenwicht heeft. Uiteraard is de nul vektor $\mathbf{0}$ een evenwicht, maar we zijn geïnteresseerd in een niet-triviaal (= niet nul) evenwicht.

Voor model (3.1) voldoen de eigenwaarden λ aan

$$0 = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 2 & 4 \\ \frac{1}{4} & -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{bmatrix} = \begin{aligned} &((-\lambda)^3 + 4 \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{2}) - (2 \cdot \tfrac{1}{4} \cdot (-\lambda)) \\ &= -\lambda^3 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\lambda. \end{aligned} \tag{3.8}$$

(Bij de bereking van de determinant hebben we gebruik gemaakt van het schema in (2.5)). Het oplossen van een derde graads vergelijking is niet altijd gemakkelijk. Gelukkig hoeven we, om te weten of er een niet-triviaal evenwicht is, maar alleen na te gaan of 1 een eigenwaarde is, dus of $\lambda = 1$ een oplossing is van (3.8). Dat kunnen we gemakkelijk checken door $\lambda = 1$ in te vullen; $-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1$ is inderdaad $= 0$. Dus er is een niet-triviale evenwichtsvektor $\mathbf{v}$.
Voor deze vektor geldt

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(1) \\ v(2) \\ v(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(1) \\ v(2) \\ v(3) \end{bmatrix}, \quad \text{dus} \quad \begin{aligned} 2v(2) + 4v(3) &= v(1) \\ \tfrac{1}{4}v(1) &= v(2) \\ \tfrac{1}{2}v(2) &= v(3). \end{aligned}$$

Als $\mathbf{v}$ een eigenvektor is, is $\alpha\mathbf{v}$ voor iedere $\alpha \neq 0$ dat ook, dus ook $\frac{1}{v(1)}\mathbf{v}$. We mogen dus wel $v(1) = 1$ nemen anders vervangen we $\mathbf{v}$ gewoon door $\frac{1}{v(1)}\mathbf{v}$.[5] Dus $v(2) = \frac{1}{4}v(1) = \frac{1}{4}$ (2-de verg.), $v(3) = \frac{1}{2}v(2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ (3-de verg.). Dus $\mathbf{v}$ is van de vorm

$$\mathbf{v} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \frac{\alpha}{4} \\ \frac{\alpha}{8} \end{bmatrix}. \tag{3.9}$$

Als we bijvoorbeeld weten dat de totale populatie grootte van vrouwtjes sterns in hun eerste jaar gelijk is aan 220 dan kunnen we α uitrekenen: immers $\mathbf{v} = \mathbf{x}_0$ en dus staat $v(1)$ voor het totaal aantal kuikens in jaar 0, $v(2)$ voor het aantal in hun tweede jaar, etc., en $220 = \alpha + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{8} = \alpha(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) = \alpha\frac{11}{8}$ en $\alpha = 160$.

Ook als we niets over het begin weten, kunnen we interessante konklusies trekken.
In evenwicht verhouden het aantal kuikens (in hun 1ste jaar), het aantal in hun 2de jaars en het aantal in hun 3de jaars zich als $\alpha : \frac{\alpha}{4} : \frac{\alpha}{8} = 8 : 2 : 1$. Anderszijds als binnen een zekere populatie, waarvoor (3.1) geldt, de verhouding tussen de aantallen per leeftijdsklasse gelijk is aan $8 : 2 : 1$ dan is die populatie in evenwicht.

Voor de matrix (3.2), waarin een grote achteruitgang van het aantal levend geboren jongeren wordt gemodelleerd is, luidt de eigenwaardenvergelijking $-\lambda^3 + \frac{1}{16} + \frac{1}{8}\lambda = 0$. Het is duidelijk (weer door invullen) dat 1 geen oplossing is. De populatie kan voor geen enkele startwaarde in evenwicht zijn, tenzij de populatie uitgestorven is. We zullen verderop in deze paragraaf zien hoe we kunnen achterhalen of de totale bevolking groeit of in grootte afneemt.

Bekijk een populatie waar de ontwikkeling van de grootte beschreven wordt door (3.5). Als de populatie in evenwicht is dan is het aantal 1-jarige in ieder tijdvak hetzelfde en hetzelfde geldt voor de andere leeftijdsklassen. Als de populatie niet in evenwicht is veranderen die aantallen, maar de *verhouding* tussen die aantallen zou wel hetzelfde kunnen zijn in opeenvolgende tijdvakken, dus $N_n(1) : N_n(2) : \ldots : N_n(m)$ zou gelijk kunnen zijn aan $N_{n+1}(1) : N_{n+1}(2) : \ldots : N_{n+1}(m)$. Als dit het geval is spreken we van een **evenwichtige leeftijdsopbouw**. Een konstante verhouding tussen de leeftijdsklasse betekent in vektortaal dat $\mathbf{N}_{n+1}$ een veelvoud is van $\mathbf{N}_n$: dus

$$\mathbf{N}_{n+1} = \alpha_n \mathbf{N}_n \quad \text{voor zekere} \quad \alpha_n \neq 0$$

[5] Hiervoor moet wel $v(1) \neq 0$. Echter als de keuze $v(1) = 1$ niet tot een oplossing leidt weten we dat $v(1) = 0$.

of, m.a.w.,

$$\mathrm{N}_{n+1} = \mathbf{L}\,\mathrm{N}_n = \alpha_n \mathrm{N}_n \quad \text{voor zekere} \quad \alpha_n \neq 0.$$

Dit betekent precies dat N_n een eigenvektor is van de Leslie matrix $\mathbf{L}$ en α_n is de bijbehorende eigenwaarde. α_n is de faktor waarmee de bevolking groeit (of krimpt) in jaar n. Maar als N_n een eigenvektor is, dan is N_{n+1} dat ook en wel met dezelfde eigenwaarde α_n. Dus $\mathrm{N}_{n+2} = \mathbf{L}\mathrm{N}_{n+1} = \alpha_n \mathrm{N}_{n+1}$. Blijkbaar is $\alpha_{n+1} = \alpha_n$. Hetzelfde geldt voor N_{n+2} en α_{n+2}, etc. We kunnen konkluderen dat als de leeftijdsopbouw van jaar n naar jaar $n+1$ evenwichtig is dan is dat ook het geval in alle volgende jaren en de groeifaktor is verder hetzelfde. Maar we kunnen ook konklusies trekken over voorgaande jaren. Omdat N_n ook een eigenvektor is van $\mathbf{L}^{-1}$ (zie Stelling 2.3) met eigenwaarde $\frac{1}{\alpha_n}$, volgt dat $\mathrm{N}_{n-1} = \mathbf{L}^{-1}\mathrm{N}_n = \frac{1}{\alpha_n}\mathrm{N}_n$. Dus $\mathrm{N}_{n-1} = \alpha_n \mathrm{N}_n$ en we zien dat N_{n-1} ook een eigenvektor is van $\mathbf{L}$ eveneens met eigenwaarde α_n. Etc..

Stelling 3.4 *Beschouw een baan* (N_n) *van de recursie* (3.4) *met start* $\mathrm{N}_0 = \mathbf{v}$ *voor zekere vektor* $\mathbf{v}$. *Stel dat* $\mathrm{N}_{n_0+1} = \alpha \mathrm{N}_{n_0}$ *voor zekere* n_0 *en zekere* α.
Dan is α *een eigenwaarde van* $\mathbf{L}$, $\mathbf{v}$ *is een bijbehorende eigenvektor, en*

$$\mathrm{N}_n = \alpha \mathrm{N}_{n-1} = \alpha^n \mathrm{N}_0 = \alpha^n \mathbf{v} \qquad \textit{voor iedere} \quad n.$$

Voor het Leslie model korresponderen eigenvektoren met een evenwichtige leeftijdsopbouw. De bijbehorende eigenwaarde is de faktor waarmee de populatie 'jaarlijks' groeit. Uiteraard zijn voor de biologische praktijk alleen positieve eigenwaarden van belang en eigenvektoren waarvan alle koördinaten groter dan of gelijk aan 0 zijn.

Een evenwicht of een evenwichtige leeftijdsopbouw zullen we in *de praktijk* alleen tegenkomen als ze stabiel zijn, d.w.z., als ze bestand zijn tegen kleine verstoringen. Storinkjes komen in de praktijk altijd voor en instabiele evenwichten zullen we daarom in de praktijk niet zien.

$\mathbf{0}$ *is een* **stabiel** *evenwicht van* (3.6) *als*
$\mathbf{x}_n \to \mathbf{0}$ *voor iedere baan* $(\mathbf{x}_n)$ *van* (3.6) *met* $\mathbf{x}_0$ *in de buurt van* $\mathbf{0}$.

Voor een evenwichtige leeftijdsopbouw is niet de grootte van de eigenvektor $\mathbf{v}$ van belang, maar alleen de richting: het gaat immers om behoud van verhoudingen. Voor stabiliteit moet dus na verstoring de *richting* hersteld worden.

Een vektor $\mathbf{v}$ *genereert een* **stabiele** *evenwichtige leeftijdsopbouw voor* (3.4) *als voor iedere baan* (N_n) *van* (3.4) *met* N_0 *in de buurt van* $\mathbf{v}$ *de hoek tussen* N_n *en* $\mathbf{v}$ *op den duur naar* 0 *gaat.*

Een niet-triviaal evenwicht voor (3.6), m.a.w. een eigenvektor $\mathbf{v}$ van $\mathbf{A}$ bij eigenwaarde 1, kan *formeel* nooit stabiel zijn, immers met $\mathbf{x}_0 = (1+\varepsilon)\mathbf{v}$ is $\mathbf{x}_n$ gelijk aan $(1+\varepsilon)\mathbf{v}$ voor iedere n. De leeftijdsopbouw verandert niet door de verstoring met ε, maar de grootte verandert wel degelijk en de oorspronkelijke ongestoorde situatie krijgen we niet terug voor $n \to \infty$. Deze $\mathbf{x}_n$'en blijven wel in de buurt van $\mathbf{v}$. Het kan dus erger.

Eigenvektoren spelen een rol bij de beschrijving van evenwichtssituaties, en we zullen zien dat ze ook van crusiaal belang zijn voor de analyse van de stabiliteit. We geven eerst een eenvoudig voorbeeld.

Voorbeeld 3.2 Beschouw het 2-dimensionale Leslie model met matrix

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

De eigenwaarden voldoen aan $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, dus $\lambda_1 = 2$ en $\lambda_2 = -1$. De eigenvektor zijn

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad \text{bij } \lambda_1 = 2, \qquad \text{resp.} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{bij } \lambda_2 = -1.$$

De positieve eigenwaarde 2 is de biologisch relevante, $\mathbf{v}_1$ heeft geen negatieve koördinaten.

We willen nagaan of $\mathbf{v}_1$ ook een stabiele evenwichtige leeftijdsopbouw representeert. We starten een recursie met $\mathbf{x}_0$ in de buurt van $\mathbf{v}_1$ met bijvoorbeeld

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0(1) \\ x_0(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.001 \\ 0.246 \end{bmatrix}.$$

Het is onbegonnen werk om $\mathbf{x}_n = \mathbf{L}^n\mathbf{x}_0$ uit te rekenen door de matrix $\mathbf{L}^n$ expliciet te berekenen of door de matrix vektor vermenigvuldigingen $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{L}\mathbf{x}_n$ expliciet uit te voeren. Als $\mathbf{x}_0$ gelijk zou zijn aan $\mathbf{v}_1$ dan hoeft dat ook niet, immers $\mathbf{L}^n\mathbf{v}_1 = \mathbf{L}^{n-1}(\mathbf{L}\mathbf{v}_1) = 2\mathbf{L}^{n-1}\mathbf{v}_1 = \ldots = 2^n\mathbf{v}_1$. $\mathbf{x}_0$ zal niet gelijk zijn aan $\mathbf{v}_1$, maar is wel een kombinatie van $\mathbf{v}_1$ en $\mathbf{v}_2$ (een grote komponent in de richting $\mathbf{v}_1$ en een kleine in de richting $\mathbf{v}_2$). Omdat $\mathbf{L}^n\mathbf{v}_2$ ook gemakkelijk uit te rekenen is lijkt het handig $\mathbf{x}_0$ te schrijven als zo'n kombinatie: $\mathbf{x}_0 = \gamma_1\mathbf{v}_1 + \gamma_2\mathbf{v}_2$. Omdat $\gamma_1\mathbf{v}_1 + \gamma_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_0$ geschreven kan worden als

$$\begin{array}{rcl} 1\cdot\gamma_1 + 1\cdot\gamma_2 & = & 1.001 \\ \frac{1}{4}\cdot\gamma_1 - \frac{1}{2}\cdot\gamma_2 & = & 0.24 \end{array} \quad \text{of, equivalent} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0(1) \\ x_0(2) \end{bmatrix}$$

kunnen de koëfficiënten γ_1 en γ_2 berekend worden als oplossing van het stelsel lineaire vergelijkingen. Omdat $\mathbf{x}_0 \approx \mathbf{v}_1$ zal $\gamma_1 \approx 1$ en $\gamma_2 \approx 0$. Maar voor de stabiliteitsvraag is de werkelijke waarde van γ_i niet van belang. Er geldt

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n &= \mathbf{L}^n(\gamma_1\mathbf{v}_1 + \gamma_2\mathbf{v}_2) = \mathbf{L}^{n-1}(\gamma_1\mathbf{L}\mathbf{v}_1 + \gamma_2\mathbf{L}\mathbf{v}_2) \\ &= \mathbf{L}^{n-1}(\gamma_1 2\mathbf{v}_1 - \gamma_2\mathbf{v}_2) = \ldots = \gamma_1 2^n\mathbf{v}_1 + \gamma_2(-1)^n\mathbf{v}_2 \\ &= \gamma_1 2^n\left(\mathbf{v}_1 + \tfrac{\gamma_2}{\gamma_1}\left(\tfrac{-1}{2}\right)^n\mathbf{v}_2\right), \end{aligned}$$

waaruit blijkt dat de vektoren $\mathbf{x}_n$ en $\mathbf{v}_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\left(\frac{-1}{2}\right)^n\mathbf{v}_2$ dezelfde richting hebben. Omdat

$$\mathbf{v}_1 + \tfrac{\gamma_2}{\gamma_1}\left(\tfrac{-1}{2}\right)^n\mathbf{v}_2 \to \mathbf{v}_1 \quad \text{voor} \quad n \to \infty$$

toont dit aan dat $\mathbf{x}_n$ en $\mathbf{v}_1$ op den duur dezelfde richting hebben.

De aanpak in bovenstaand voorbeeld is algemener van toepassing. Neem aan, dat $\mathbf{A}$ (eventueel over de complexe getallen) een basis van eigenvektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ heeft met eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$:

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i, \qquad \text{voor} \quad i = 1, \ldots, m.$$

Merk op, dat

$$\mathbf{A}^n\mathbf{v}_i = \mathbf{A}^{n-1}(\mathbf{A}\mathbf{v}_i) = \mathbf{A}^{n-1}(\lambda_i\mathbf{v}_i) = \lambda_i\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{v}_i = \ldots = \lambda_i^n\mathbf{v}_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Schrijf nu $\mathbf{x}_0$ als lineaire combinatie van de eigenvektoren,

$$x_0 = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_m\mathbf{v}_m.$$

Dan

$$\mathbf{A}^n\mathbf{x}_0 = \alpha_1\mathbf{A}^n\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_m\mathbf{A}^n\mathbf{v}_m = \alpha_1\lambda_1^n\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_m\lambda_m^n\mathbf{v}_m.$$

en dus

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n\mathbf{x}_0 = \alpha_1\lambda_1^n\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_m\lambda_m^n\mathbf{v}_m. \tag{3.10}$$

In het bijzonder geldt, ongeacht de startvektor $\mathbf{x}_0$,

$$\text{als} \quad |\lambda_i| < 1 \quad \text{voor alle } i, \text{ dan} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = 0,$$

Trouwens, ook als er geen basis van eigenvektoren bestaat dan blijft deze uitspraak waar en we hebben een mooie karakterisering voor de situatie waarin **0** een stabiel evenwicht is.

Stelling 3.5 *De nul vektor* **0** *is een stabiel evenwicht van* (3.6) *precies dan als*

$$|\lambda_i| < 1 \quad \textit{voor alle eigenwaarden} \quad \lambda_i \textit{ van de matrix } \mathbf{A}. \tag{3.11}$$

Eigenschap (3.11) *impliceert ook dat*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{A}^n = 0$$

d.w.z., voor elke i, j gaat het element met index (i, j) in $\mathbf{A}^n$ naar 0 als $n \to \infty$.

Voor de stabiliteit van een evenwichtige leeftijdsopbouw zijn we geïnteresseerd in de vraag wanneer $\mathbf{x}_n$ en $\mathbf{v}_1$ min of meer dezelfde richting hebben. Om deze vraag te beantwoorden delen we (3.10) door λ_1^n:

$$\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^n \mathbf{x}_n = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_m\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)^n \mathbf{v}_m. \tag{3.12}$$

Als $|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}| < 1$ voor iedere $i = 2, \ldots, m$ dan

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_m\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)^n \mathbf{v}_m \to \alpha_1\mathbf{v}_1 \quad \text{als} \quad n \to \infty$$

en, als ook $\alpha_1 \neq 0$, dan zien we dat $\mathbf{x}_n$ en $\mathbf{v}_1$ op de duur dezelfde richting hebben. De eigenschap $|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}| < 1$ is equivalent met

$$|\lambda_1| > |\lambda_i| \qquad \text{voor iedere} \quad i = 2, \ldots, m. \tag{3.13}$$

Als (3.13) geldt dan zeggen we dat $\mathbf{A}$ een dominate eigenwaarde heeft: λ_1 is dan de **dominante eigenwaarde** en de bijbehorende $\mathbf{v}_1$ is een **dominante eigenvektor**.

Stelling 3.6 *Stel $\mathbf{A}$ heeft een dominante eigenwaarde, zeg λ_1 en $\mathbf{v}_1$ is de bijbehorende eigenvektor. Dan geldt voor ieder baan $(\mathbf{x}_n)$ van* (3.6) *met*

$$\mathbf{x}_0 = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_m\mathbf{v}_m \quad \textit{zodat} \quad \alpha_1 \neq 0 \tag{3.14}$$

dat $\mathbf{x}_n$ en $\mathbf{v}_1$ op den duur dezelfde richting hebben, of, precieser,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^n \mathbf{x}_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^n \mathbf{A}^n\mathbf{x}_0 = \alpha_1\mathbf{v}_1.$$

De dominante eigenvektor zuigt als het ware (vrijwel) iedere baan in zijn richting.

Er is altijd een eigenwaarde die in absolute waarde groter dan *of gelijk is aan* de absolute waarde van de andere eigenwaarden, maar er hoeft geen eigenwaarde te zijn die in absolute waarde *strikt* groter is: niet iedere matrix heeft een dominante eigenwaarde.

Voorbeeld 3.3 De matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

heeft als eigenwaarden de complexe getallen $\lambda_1 = +i$ en $\lambda_2 = -i$ en $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$.

Als $x_0(1) = \alpha$, $x_0(2) = \beta$ dan

$$\mathbf{x}_{2n} = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{x}_{2n+2} = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix}.$$

Hieruit blijkt dat er niet een richting is waarin iedere baan op den duur gaat staan. Er is geen dominante en ook geen 'attraktieve' vektor.

Niet iedere matrix heeft een dominante eigenwaarde. Gelukkig zijn er heel wat matrices die er wel een hebben, bijvoorbeeld de matrix in Voorbeeld 3.1. In de volgende paragraaf zullen we zien dat dominantie voor Leslie matrices en vele andere praktisch relevante type matrices eerder regel dan uitzondering is.

Iedere matrix heeft hoogstens één dominante eigenwaarde. Op veelvouden na is er ook maar hoogstens een dominante eigenvektor: de richting van de dominante eigenvektor is uniek.

Stelling 3.6 impliceert dat als de Leslie matrix een dominante eigenwaarde heeft, alleen een dominante eigenvektor een stabiele evenwichtige leeftijdsopbouw representeert. Immers, stel dat $\mathbf{v}_1$ dominant is. Als $\mathbf{x}_0$ in de buurt is van $\mathbf{v}_1$ dan is, in de notatie van (3.14), $\alpha_1 \approx 1$ en $\alpha_i \approx 0$ voor $i = 2, \ldots, n$. Dus hebben $\mathbf{x}_n$ en $\mathbf{v}_1$ op den duur dezelfde richting en is stabiliteit voor de evenwichtige leeftijdsopbouw $\mathbf{v}_1$ aangetoond. De vektor $\mathbf{x}_0 = \varepsilon\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_i$ is in de buurt van $\mathbf{v}_i$ $(i > 1)$ maar $\mathbf{x}_n$ en $\mathbf{v}_1$ hebben volgens Stelling 3.6 op den duur toch dezelfde richting. Dus korrespondeert $\mathbf{v}_i$ niet met een stabiele evenwichtige leeftijdsopbouw.

Stelling 3.7 *Stel dat* $\mathbf{L}$ *een dominante eigenwaarde heeft. Dan heeft de recursie* (3.4) *een stabiele evenwichtige leeftijdsopbouw en die wordt gerepresenteerd door de dominante eigenvektor.*

Voorbeeld 3.4 [Sterns] We onderzoeken of het evenwicht (3.9), de eigenvektor bij eigenwaarde 1, een stabiele evenwichtige leeftijdsopbouw is. We moeten dus nagaan of de twee andere eigenwaarden van (3.1) in absolute waarde kleiner zijn dan 1. 1 is een wortel van $-\lambda^3 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2} = 0$. We berekenen de twee anderen.

Omdat 1 een wortel is kunnen we $-\lambda^3 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}$ delen door $\lambda - 1$ (staartdeling; met $\lambda = 10$ hebben we de staartdeling van de basisschool):

$$\begin{array}{lrl}
\lambda - 1 \;/ & -\lambda^3 + 0\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2} & \backslash \; -\lambda^2 - \lambda - \frac{1}{2} \\
& -\lambda^3 + \lambda^2 \qquad\qquad & \\
\cline{2-2}
& -\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2} & - \\
& -\lambda^2 + \lambda \qquad & \\
\cline{2-2}
& -\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2} & - \\
& -\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2} & \\
\cline{2-2}
& 0 & -
\end{array}$$

Dus

$$-\lambda^3 + \tfrac{1}{2}\lambda + \tfrac{1}{2} = (\lambda - 1)(-\lambda^2 - \lambda - \tfrac{1}{2})$$

Blijkbaar zijn, als $\lambda_1 = 1$, de eigenwaarden λ_2 en λ_3 de wortels van $-\lambda^2 - \lambda - \frac{1}{2} = 0$. We kunnen gemakkelijk nagaan dat $\lambda_2 = \bar{\lambda}_3 = -\frac{1}{2}(1 + i)i$ en $|\lambda_2| = |\lambda_3| < 1$. Dus is $\lambda_1 = 1$ dominant en het evenwicht is een stabiele venwichtige leeftijdsopbouw.

Voor de liefhebbers. De koëfficiënt α_1 in (3.14) zouden we kunnen beschrijven met behulp van een eigenvektor de getransponeerde van $\mathbf{A}$. De getransponeerde van $\mathbf{A}$ heeft ook eigenwaarde λ_1 (zie Stelling 2.6) en dus een bijbehorende eigenvektor $\mathbf{w}_1$: $\mathbf{A}^T\mathbf{w}_1 = \lambda_1\mathbf{w}_1$. Voor de α_1 in (3.14) geldt

$$\alpha_1 = \frac{(\mathbf{w}_1, \mathbf{x}_0)}{(\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_1)}.$$

Hierin is $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ het standaard inprodukt op $\mathbb{R}^m$.

Voorbeeld 3.5 [Banen in de $\mathbb{R}^2$] Hoe de baan $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots$ er in het algemeen uitziet illustreren we aan de hand van het *tweedimensionale geval* $m = 2$.

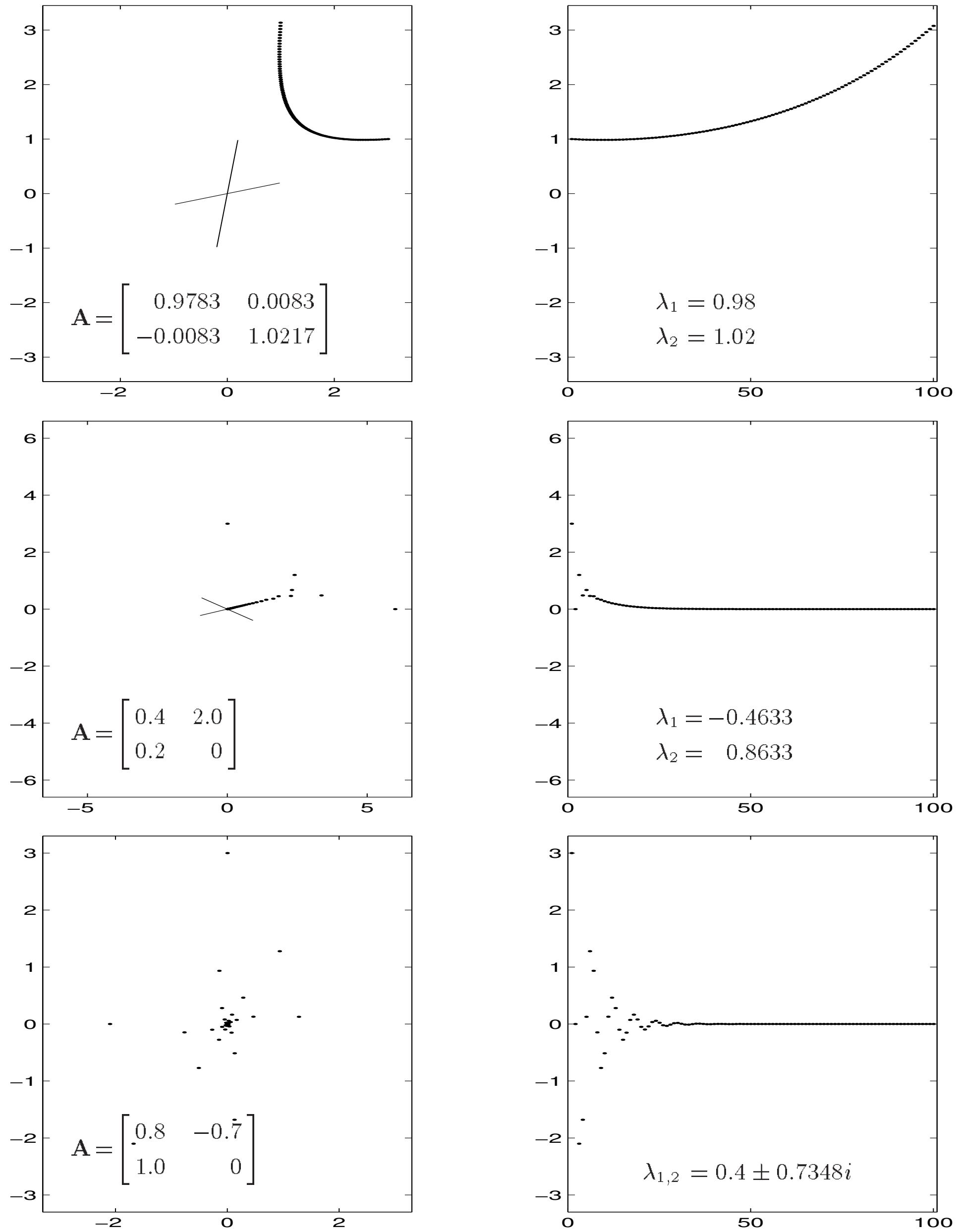
We beschouwen eerst het geval $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ en nemen aan dat er een basis van eigenvektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ bestaat. We maken gebruik van het feit dat iedere vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ te schrijven is in de vorm $\mathbf{x} = \xi\mathbf{v}_1 + \eta\mathbf{v}_2$ voor zekere ξ, η, die we de **v**-koördinaten van $\mathbf{x}$ zullen noemen. We beschrijven de volgende gevallen.

a) $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$. Stel $\mathbf{x}_0 = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2$ en merk op, dat $\mathbf{A}^n\mathbf{x}_0 = \alpha_1\lambda_1^n\mathbf{v}_1 + \alpha_2\lambda_2^n\mathbf{v}_2$. Kies $0 < a < 1$ zó dat $\lambda_1^a = \lambda_2$. Merk nu op, dat de **v**-koördinaten van $\mathbf{A}^n\mathbf{x}_0$ gelijk zijn aan $\xi = \alpha_1\lambda_1^n$, $\eta = \alpha_2\lambda_2^n$ en voldoen aan $\alpha_2\xi^a = \alpha_1^a\eta$. Bovendien gaan beide koördinaten naar 0 als $n \to \infty$. Dus de punten $\mathbf{A}^n\mathbf{x}_0$ konvergeren naar $\mathbf{0}$ langs een kromme van de vorm $\eta = \gamma\xi^a \quad (\gamma = \alpha_2/\alpha_1^a)$. Dit zijn parabool-achtige krommen (kontroleer dat voor bijvoorbeeld $a = \frac{1}{2}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$). De punten $\mathbf{A}^n\mathbf{x}_0$ lopen via een parabool-achtige kromme die raakt aan $\mathbf{v}_2$ naar $\mathbf{0}$.
Voor $0 < -\lambda_1 < \lambda_2 < 1$ geldt een soortgelijk verhaal. De baan $(\mathbf{x}_n)$ loopt nu over twee parabool-achtige kromme die raken aan $\mathbf{v}_2$ naar $\mathbf{0}$, de $\mathbf{x}_n$ met oneven index n lopen over de ene parabool, de even geïndiceerde $\mathbf{x}_n$ lopen over de andere. De middelste twee prenten in FIG. 8 toont deze situatie. De gebruikte matrix staat links, rechts staan de bijbehorende eigenwaarden. De twee rechte lijnen in de linker prenten zijn $\pm$ de eigenvektoren, de punten links zijn de $\mathbf{x}_n$ van een baan $(\mathbf{x}_n)$. In de prent rechts staat voor diezelfde baan de $x_n(2)$-component getekent als funktie van n.

b) $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$. We hebben wederom $\mathbf{A}^n\mathbf{x}_0 = \alpha_1\lambda_1^n\mathbf{v}_1 + \alpha_2\lambda_2^n\mathbf{v}_2$. Echter, de ξ koördinaat gaat naar 0 en de η koördinaat naar ∞. Als $n \to \infty$ dan konvergeert de richting van $\mathbf{A}^n\mathbf{x}_0$ dus naar de richting van $\mathbf{v}_2$ (tenzij $\alpha_2 = 0$). Kies $a > 0$ zó dat $\lambda_2 = \lambda_1^{-a}$. Dan geldt voor de **v**-koördinaten van $\mathbf{A}^n\mathbf{x}_0$ dat $\xi^a\eta = \alpha_1^a\alpha_2$. Dit zijn hyperbool-achtige krommen (kontroleer dit voor bijvoorbeeld $a = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$). In de bovenste prenten in FIG. 8 staat een computerresultaat voor deze situatie.

c) $1 < \lambda_1 < \lambda_2$. Wederom geldt $\mathbf{A}^n\mathbf{x}_0 = \alpha_1\lambda_1^n\mathbf{v}_1 + \alpha_2\lambda_2^n\mathbf{v}_2$. Zowel de ξ als de η-koördinaat gaan nu naar ∞ als $n \to \infty$. Kies $a > 1$ zó dat $\lambda_1^a = \lambda_2$. Dan geldt voor de **v**-koördinaten van $\mathbf{A}^n\mathbf{x}_0$ dat $\alpha_2\xi^a = \alpha_1^a\eta$. Dus de punten $\mathbf{A}^n\mathbf{x}_0$ gaan naar ∞ langs een kromme van de vorm $\eta = \gamma\xi^a$. Wederom een parabool-achtige kromme, die op den duur aan $\mathbf{v}_2$ (althans aan de lijn $\alpha\mathbf{v}_2$) raakt.

De dominante eigenvektor heeft, in het geval van reële eigenwaarden, een sterk “zuigende” werking.



FIGUUR 8. *De prenten links tonen een baan* $(\mathbf{x}_n)$ *(de stippels) voor de recursie* $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n$ *voor verschillende matrices. De gebruikte matrices staan links, rechts staan de bijbehorende eigenwaarden. De twee rechte lijnen in ieder van de linker prenten zijn de* $\pm$ *eigenvektoren. In de prent rechts staat voor de baan links de* $x_n(2)$*-component getekend als funktie van* n*;* n *staat langs de horizontale as,* $x_2(n)$ *langs de vertikale.*

Beschouw nu het geval dat $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ en $\bar{\lambda}_1 = \lambda_2$. Er is nu een basis $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ ten opzichte waarvan de matrix van $\mathbf{A}$ de vorm

$$r \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

heeft. Hierin is $r = |\lambda_1| = |\lambda_2|$ en $\phi = \arg \lambda_1$. Laten we de koördinaten t.o.v. $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ **w**-koördinaten noemen. In **w**-koördinaten heeft $\mathbf{A}^n$ de gedaante

$$r^n \begin{bmatrix} \cos n\phi & \sin n\phi \\ -\sin n\phi & \cos n\phi \end{bmatrix}.$$

Het gedrag van $\mathbf{A}^n\mathbf{x}_0$ is nu gemakkelijk af te lezen. Als $r < 1$ dan konvergeert de rij punten $\mathbf{A}^n\mathbf{x}_0$ in een spiraalvorm naar **0**. Als $r = 1$ dan liggen de punten $\mathbf{A}^n\mathbf{x}_0$ op een cirkel in **w**-koördinaten. Als $r > 1$ dan gaan de punten $\mathbf{A}^n\mathbf{x}_0$ naar ∞ via een spiraalvormige baan. Deze situatie is te vinden in de onderste twee prenten in FIG. 8.

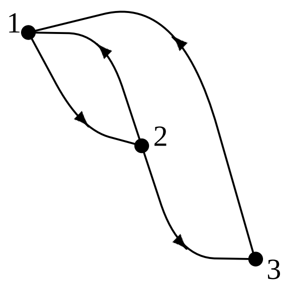
3.3 Stelling van Perron-Frobenius

Voor recursies met Leslie matrices, maar ook voor veel andere type lineaire recursies (3.6), is het van belang te weten of de matrix een dominante eigenwaarde heeft. In een biologische context moet die eigenwaarde ook nog positief zijn en de koördinaten van de bijbehorende eigenvektor (of een veelvoud ervan) mogen niet negatief zijn. Het expliciet berekenen van deze grootheden is lastig zeker voor grotere modellen. Gelukkig hoeven we niet altijd de numerieke waarden van de eigenwaarden te kennen om te weten of er een positieve dominante is. In deze paragraaf zullen we zien dat dat het geval is voor matrices als Leslie matrices waarvan alle elementen niet-negatief zijn. Uiteraard is er altijd een eigenwaarde die in absolute waarde groter dan of gelijk aan de absolute waarde van alle andere eigenwaarden. Voor dergelijke matrices met niet-negatieve elementen blijkt dat die absoluut grootste eigenwaarde vanzelf positief is. Bovendien blijkt die eigenwaarde onder een aantal niet al te strenge en gemakkelijk verifieerbare eisen dominant te zijn. Dit is de inhoud van de stelling van Perron-Frobenius. Eerst hebben we een aantal begrippen nodig.

Voor een $m \times m$ matrix $\mathbf{A}$ met elementen a_{ij} gaan we een gerichte graaf maken. Geef de getallen $1, 2, \ldots, m$ aan met punten in het vlak. Als het matrix element a_{ij} ongelijk aan nul is, verbinden we punt j en punt i met een boog die van j naar i gericht is. Als $a_{ii} \neq 0$, dan verbinden we i door een boogje met zichzelf. Op deze wijze krijgen we een **gerichte graaf**, d.w.z een collectie punten die verbonden worden door bogen met een gegeven wandelrichting.

Voorbeeld 3.6 [Sterns] Hieronder de matrix uit (3.1) met de bijbehorende gerichte graaf.

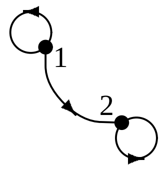
$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.15}$$



De matrix vertelt precies, d.w.z. kwantitatief, hoe de situatie in jaar n overgaat in de situatie in jaar $n + 1$. Het matrix element $\frac{1}{2}$ op plaats $(3, 2)$ vertelt dat de helft van de 2-jarige de winter overleeft. De graaf geeft de informatie in vagere bewoordingen. Het feit dat er een boog loopt van punt 2 naar punt 3 betekent dat de klasse van 2-jarige in jaar n bijdraagt aan de klasse van 3-jarige in jaar $n + 1$. Er loopt geen boog van 3 naar 2: de 3-jarige in jaar n dragen niet bij aan het aantal 2-jarige in jaar $n + 1$. De graaf vertelt welke leeftijdsklasse bijdraagt aan welke andere in het volgend jaar, maar vertelt niet hoe groot de bijdrage is. De informatie is kwalitatief. Voor een aantal vragen is deze vagere kwalitatieve informatie vaak al voldoende.

Voorbeeld 3.7 Nog een een eenvoudig voorbeeld

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.16}$$



Onder een **pad** van j naar i verstaan we een opeenvolging van bogen, die samen een wandeling van j naar i geven. In de graaf in (3.15) is er een pad van 1 naar 3 (via 2). In (3.16) is er een pad van 1 naar 2 maar niet van 2 naar 1. Een pad dat van een punt j naar hetzelfde punt j ($i = j$) loopt heet **gesloten**. Het pad in (3.15) van 1 naar 1 via 2 en 3 is gesloten, het pad van 1 naar 3 is dat niet. Het aantal bogen dat in een pad voorkomt noemen we de **lengte** van het pad. Het pad in (3.15) van 1 naar 1 via 2 en 3 ($1 \to 2 \to 3 \to 1$) heeft lengte 3, het pad van 1 naar 1 via achtereenvolgens 2,1,2,3 ($1 \to 2 \to 1 \to 2 \to 3 \to 1$) heeft lengte 5.

Grafen van matrices geven ons vaak op zeer eenvoudige wijze informatie over de matrix $\mathbf{A}$ zelf. We hebben bijvoorbeeld de volgende stelling.

Stelling 3.8 *Alle eigenwaarden van een $m \times m$ matrix $\mathbf{A}$ zijn nul als de graaf van $\mathbf{A}$ geen enkel gesloten paden bevat. Als er wel een gesloten pad bestaat en alle matrix elementen zijn ≥ 0 dan heeft de matrix een eigenwaarde $\neq 0$.*

Paden van lengte ℓ in de graaf van $\mathbf{A}$ spelen een belangrijke rol bij de berekening van $\mathbf{A}^\ell$. Stel $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Neem even $\ell = 2$. Het element (i, j) van $\mathbf{A}^2$ is een som van de termen $a_{ik}a_{kj}$ $(k = 1, \ldots, m)$. Een dergelijke term correspondeert met het pad van j naar i via k. Blijkbaar vertelt elk pad van j naar i van lengte 2 ons waar de bijdrage zitten aan het (i, j)-de element van de matrix $\mathbf{A}^2$. Evenzo is het element (i, j) van $\mathbf{A}^\ell$ een som van een groot aantal termen van de vorm $a_{ii_{\ell-1}}a_{i_{\ell-1}i_{\ell-2}} \cdots a_{i_2 i_1}a_{i_1 j}$. Een dergelijke term correspondeert met het pad $j \to i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_{\ell-1} \to i$. Bij de berekening van het element (i, j) in $\mathbf{A}^\ell$ nemen we voor elk pad van j naar i het produkt van de matrix elementen van $\mathbf{A}$ behorend bij de bogen van het pad, en nemen vervolgens de som over alle paden van j naar i. Met deze interpretatie wordt ook bovenstaande stelling duidelijk. Als er geen gesloten paden zijn, dan heeft elk pad lengte hoogstens m. Immers, de graaf heeft m punten en een pad van lengte $> m$ zou meerdere keren door een zelfde punt moeten gaan, in tegenspraak met het feit dat er geen gesloten paden zijn. Dus $\mathbf{A}^{m+1} = \mathbf{0}$: we zeggen dat $\mathbf{A}$ is **nilpotent**. Hieruit volgt dat alle eigenwaarden nul zijn. Immers als $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ voor zekere $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ dan $\mathbf{0} = \mathbf{A}^{m+1}\mathbf{v} = \lambda^{m+1}\mathbf{v}$. Omdat $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ moet λ wel nul zijn. Op analoge wijze zien we ook dat als er wel een gesloten pad bestaat, en alle matrix elementen van $\mathbf{A}$ niet-negatief zijn, de machten van $\mathbf{A}$ niet nul kunnen zijn. Dus $\mathbf{A}$ is niet nilpotent en van zo'n soort matrix kan men aantonen dat er eigenwaarden $\neq 0$ zijn.

We noemen $\mathbf{A}$ **irreducibel** als voor ieder tweetal i, j in de graaf van $\mathbf{A}$ een pad van j naar i bestaat en **reducibel** als er i, j bestaan zó dat er geen pad van j naar i is.

Voorbeeld 3.8 De volgende matrices zijn allen reducibel,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Merk op dat het voor het nagaan van (ir)reducibiliteit voldoende is om na te gaan of er voor elk punt $i \neq 1$ een pad *van en naar* het punt 1 is.

We noemen een irreducibele matrix $\mathbf{A}$ **a-periodiek** als de grootste gemeenschappelijke deler d van de lengtes van alle gesloten paden precies 1 is. Het pad $1 \to 2 \to 1$ in (3.15) heeft lengte 2, terwijl het pad $1 \to 2 \to 3 \to 1$ lengte 3 heeft. De grootste gemeenschapelijke deler (ggd) van 2 en 3 (het grootste getal dat zowel 2 als 3 deelt) is 1. Er zijn nog vele andere gesloten paden in (3.15) —bijvoorbeeld het pad $1 \to 2 \to 1 \to 2 \to 3 \to 1$ van lengte 5— maar dat interesseert ons niet meer want de grootste gemeenschappelijk deler 1 zal hierdoor niet meer veranderen (de ggd van 1 en 5 is 1).
In het bijzonder als $\mathbf{A}$ een diagonaal element ongelijk nul heeft, zeg $a_{ii} \neq 0$, dan zien we meteen dat $\mathbf{A}$ a-periodiek is: er is een pad ($i \to i$) van lengte 1.
Als $d > 1$ dan noemen we $\mathbf{A}$ **periodiek** met periode d.

Voorbeeld 3.9 De volgende matrices zijn irreducibel en periodiek,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Het bewijs van de volgende stelling zullen we niet geven, omdat dit buiten het bestek van ons college valt.

Stelling 3.9 (Perron-Frobenius) *Zij $\mathbf{A}$ een $m \times m$ matrix met niet-negatieve elementen. Dan is er een positieve eigenwaarde μ zó dat $\mu \geq |\lambda|$ voor iedere eigenwaarde λ. Bovendien is er een bijbehorende eigenvektor met niet-negatieve elementen.*
Als $\mathbf{A}$ irreducibel en a-periodiek is, dan is μ een dominante eigenwaarde.

Voorbeeld 3.10 [Sterns] We kijken nogmaals naar model (3.1), het voorbeeld met de sterns. We laten hier zien dat 1 een dominante eigenwaarde is zonder het rekenwerk van Voorbeeld 3.4.

De eigenwaarden vergelijking kan geschreven worden als (zie Voorbeeld 3.1)

$$\lambda^3 = \tfrac{1}{2}(\lambda + 1). \tag{3.17}$$

Invullen toont aan dat 1 een oplossing is. We proberen de andee twee oplossingen grafisch te achterhalen. Schets in een plaatje de grafiek van $y = x^3$ en van $y = \frac{1}{2}(x + 1)$. De reële oplossingen van (3.17) korresponderen met de snijpunten van deze grafieken (zie dat in). Er blijkt slechts een snijpunt te zijn en dat korrespondeert met de eigenwaarde 1. Blijkbaar zijn de andere twee eigenwaarde niet reeel. In Voorbeeld 3.6 hebben we gezien dat de matrix in (3.1) irreducibel en a-periodiek is. Dus is er volgens de stelling van Perron-Frobenius een dominante eigenwaarde die bovendien nog reeel en positief is. Er is maar een reële positieve eigenwaarde en die moet dus wel de dominante zijn.

3.4 Leslie matrices, theorie

In §3.1 hebben we Leslie matrices geïntroduceerd. In deze paragraaf zullen we enkele uitspraken doen over de bijbehorende eigenwaarden.

De Leslie matrix heeft een speciale struktuur waardoor het gemakkelijk is de eigenvektoren te bepalen als de eigenwaarden bekend zijn. Het opstellen van de eigenwaardenvergelijking van een Leslie matrix, ongeacht de afmeting, is ook gemakkelijk. Het oplossen van de eigenwaardenvergelijking blijft echter een lastige zaak (voor $m > 3$).

Stelling 3.10 *Beschouw de Leslie matrix* $\mathbf{L}$ *in* (3.4) *en definieer de getallen* h_i *door*

$$h_1 = 1, \quad h_2 = s_1 = s_1 h_1, \quad h_3 = s_2 s_1 = s_2 h_2, \quad h_4 = s_3 h_3, \ldots. \tag{3.18}$$

De eigenwaarden $\lambda = \lambda_i$ *van* $\mathbf{L}$ *voldoen aan de vergelijking*

$$g_1 h_1 \lambda^{m-1} + g_2 h_2 \lambda^{m-2} + g_3 h_3 \lambda^{m-3} + \ldots + g_m h_m = \lambda^m \tag{3.19}$$

en de bijbehorende eigenvektor is (een veelvoud van)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} \lambda^{m-1} \\ h_2 \lambda^{m-2} \\ h_3 \lambda^{m-3} \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix}.$$

Bewijs. We moeten aan tonen dat

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_{m-1} & g_m \\ s_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & s_{m-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^{m-1} \\ h_2 \lambda^{m-2} \\ h_3 \lambda^{m-3} \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \lambda^{m-1} \\ h_2 \lambda^{m-2} \\ h_3 \lambda^{m-3} \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

voor de λ die voldoen aan (3.19). Uitschrijven van de matrix vektor vermenigvuldiging in (3.20) laat zien dat de relatie (3.20) klopt als λ voldoet aan (3.19). □

Het is lastig de formules in de stelling te onthouden. De relatie (3.20) kan echter gemakkelijk opgesteld worden; de eigenvektor en de eigenwaardenvergelijking (3.19) verschijnen dan vanzelf. Voor details over het opstellen van (3.20), zie Stelling 2.5 en de daaraan voorafgaande tekst.

Voorbeeld 3.11 [Sterns] In Voorbeeld 3.1 hebben we het evenwicht $\mathbf{v}$ (eigenvektor bij de eigenwaarde 1) berekend door een stelsel op te lossen. Bovenstaande beschrijving van de eigenvektor leidt wat vlugger tot hetzelfde resultaat: $h_2 = \frac{1}{4}$, $h_3 = \frac{1}{8}$.

De volgende stelling vertelt ons of $\mathbf{L}$ een dominante eigenwaarde heeft. Alle matrix elementen van $\mathbf{L}$ zijn niet-negatief en de stelling is dan ook een toepassing van de stelling van Perron-Frobenius.

Stelling 3.11 *Voor de* $\mathbf{L}$ *en* h_i *uit Stelling* 3.10 *geldt het volgende.*

Als $g_i h_i = 0$ *voor alle* i *dan zijn alle eigenwaarden van* $\mathbf{L}$ *nul.*

Stel dat er minstens een i *is waarvoor* $g_i h_i \neq 0$. *Als de grootste gemene deler van alle* i *waarvoor* $g_i h_i \neq 0$ *gelijk is aan 1 dan heeft* $\mathbf{L}$ *een positieve dominante eigenwaarde.*

Bewijs. Uit (3.19) volgt onmiddellijk dat alle eigenwaarden nul zijn als $g_i h_i = 0$ voor iedere i.

Laten we nu kijken naar de situatie waarin $g_i h_i \neq 0$ voor iedere $i > 1$.

Uit $g_i h_i \neq 0$ volgt dat $h_i \neq 0$ en $g_i \neq 0$ voor $i > 1$ en dus $s_i \neq 0$ voor $i = 1, \ldots, m-1$. Het is duidelijk dat $\mathbf{L}$ dan irreducibel is. Verder heeft de graaf van $\mathbf{L}$ voor iedere i een pad van punt

1 naar 1 via i: $1 \to 2 \to \ldots \to i \to 1$. De lengte van dit pad is i. Omdat de ggd van 2 en 3 (en $4, \ldots, m$) gelijk is aan 1 is $\mathbf{L}$ a-periodiek en de stelling volgt uit Perron-Frobenius.

Bekijk nu de algemenere situatie en stel dat $g_i h_i \neq 0$ voor minstens één i.
Kies m' zó dat $g_{m'} h_{m'} \neq 0$ en $g_i h_i = 0$ voor alle $i > m'$. Dan kunnen we (zie (3.19))

$$g_1 h_1 \lambda^{m-1} + g_2 h_2 \lambda^{m-2} + g_3 h_3 \lambda^{m-3} + \ldots + g_m h_m - \lambda^m = 0 \tag{3.21}$$

ontbinden als

$$(g_1 h_1 \lambda^{m'-1} + \cdots + g_{m'} h_{m'} - \lambda^{m'}) \lambda^{m-m'} = 0.$$

De vergelijking $g_1 h_1 \lambda^{m'-1} + \cdots + g_{m'} h_{m'} - \lambda^{m'}$ kan gezien worden als eigenwaardenvergelijking van de (eventueel) kleinere Leslie matrix

$$\mathbf{L}' = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_{m'-1} & g_{m'} \\ s_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & s_{m'-1} & 0 \end{bmatrix}$$

die dezelfde eigenwaarden heeft als $\mathbf{L}$ op $m - m'$ maal de eigenwaarde 0 na. Omdat $g_{m'} h_{m'} \neq 0$ moet gelden dat $s_i \neq 0$ voor alle $i \leq m'$ en $g_{m'} \neq 0$. Inspektie van de graaf van $\mathbf{L}'$ laat zien, dat $\mathbf{L}'$ irreducibel is: vanuit 1 kunnen we via 2, 3,... in ieder punt i ($i \leq m'$) komen; vanuit het punt i kunnen we naar m' en van daar naar punt 1. Verder geldt voor alle $i < m$ dat $h_{m'} = 0 \iff g_{m'} = 0$. Inspektie van de graaf leert ook dat de i waarvoor $g_i \neq 0$ precies lengtes van gesloten paden zijn. Als de grootste gemene deler van deze i nu 1 is, dan is $\mathbf{L}'$ a-periodiek. Uit de stelling van Perron-Frobenius volgt nu dat $\mathbf{L}'$ en dus ook $\mathbf{L}$ een positieve dominante eigenwaarde heeft. $\square$

3.5 Markov ketens

Een ander voorbeeld van matrix iteraties wordt gegeven door "Markov ketens". De theorie in §3.2 en §3.3 is ook hierop van toepassing.

Ter introduktie geven we hier een fictief, maar niettemin instructief voorbeeld.
Stel dat het weer op één dag slechts drie verschillende toestanden kent, zonnig (z), bewolkt (w) of regen (r). We maken nu het volgende model. Na een zonnige dag is de kans $\frac{1}{2}$ dat de volgende dag wederom zonnig is en de kans op bewolking is ook $\frac{1}{2}$. De kans op regen na een zonnige dag is dus 0, althans, in ons model. Na een bewolkte dag zijn de kansen $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ op een zonnige, bewolkte, respectievelijk regenachtige dag. Maar na regen komt zonneschijn, en de kans hierop zetten we op $\frac{1}{2}$. Voor de kans dat het blijft regenen zetten we ook $\frac{1}{2}$. Deze kansen kunnen we overzichtelijk in matrixvorm weergeven,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Dus het element $p_{21} = \frac{1}{2}$ op plaats $(2, 1)$ in de matrix $\mathbf{P}$ geeft de kans op een bewolkte dag na een zonnige dag.

Een matrix met niet-negatieve elementen en som van elke kolom gelijk aan 1 noemen we een **kansmatrix**.

Niets is zo onzeker als het weer. Daarom stellen we de weersverwachting op dag n voor door een kolomvektor

$$\mathbf{p}_n = \begin{bmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{bmatrix},$$

waarin de elementen de kansen op zonnig weer, bewolkt weer of regenachtig weer voorstellen. De som van p_n, q_n, r_n is natuurlijk 1. Een vektor met niet-negatieve elementen en som van de componenten 1 noemen we een **kansvektor**. De weersverwachting op dag $n+1$ wordt nu gegeven door

$$\begin{bmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{bmatrix}.$$

Starten we op dag 0 met weersverwachting

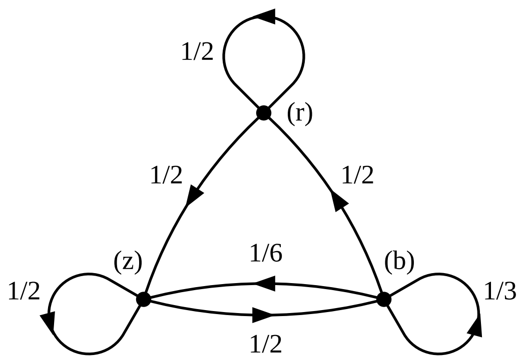
$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{bmatrix},$$

dan zal de weersverwachting op dag n worden gegeven door

$$\mathbf{P}^n \mathbf{p}_0.$$

Grote vraag is natuurlijk wat er gebeurt als $n \to \infty$.

Een illustratieve voorstelling van ons weermodel is met behulp van een *gerichte graaf* waarin we nu wel de getal-waarden gezet hebben.



Stel dat we op zekere dag zon hebben, wat is de kans dat drie dagen later weer de zon schijnt?
Als we naar onze graaf kijken dan zien we dat er vijf mogelijke weersverlopen zijn die op de derde dag met zon eindigen,

zzz, zbz, bzz, bbz, brz.

De kans op drie dagen achterelkaar zon, zzz, is $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Voor de andere weersverlopen is dat achtereenvolgens $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$. In totaal is dit $\frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \ldots = \frac{13}{36}$.

Een andere manier om deze kans te vinden is om het element op plaats $(1,1)$ in $\mathbf{P}^3$ te bepalen, immers dit element is de “zonnige” koördinaat van

$$\mathbf{P}^3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(we begonnen de 3-daagse voorspelling met een zonnige dag). Er geldt,

$$\mathbf{P}^3 = \begin{bmatrix} \frac{13}{36} & \frac{47}{108} & \frac{5}{12} \\ \frac{11}{36} & \frac{7}{27} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{11}{35} & \frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

in het bijzonder $(\mathbf{P}^3)_{11} = \frac{13}{36}$. Dit element is precies de som van produkten $p_{1j_2}p_{j_2j_1}p_{j_11}$.

Bij **Markov ketens** (preciezer, eindige Markov ketens in discrete tijd) bekijken we een systeem dat zich in een eindig aantal verschillende toestanden kan bevinden, zeg 1 tot en met m. We bekijken dit systeem telkens na een vast gekozen tijdvak. Neem aan dat het systeem zich in zo’n tijdvak als volgt wijzigt. Als het systeem in toestand j is, dan is de kans dat het zich in het volgende tijdvak in toestand i bevindt gelijk aan p_{ij}. Deze kansen kunnen we in de zogenaamde **overgangsmatrix**

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix}$$

zetten. Er geldt $p_{ij} \geq 0$ voor alle i, j en de som van elke kolom is 1. De matrix $\mathbf{P}$ is dus een kansmatrix. Als we in tijdvak n weten dat het systeem een toestandsverwachting heeft, die wordt voorgesteld door de **toestandsvektor** of kansvektor

$$\mathbf{q}_n = \begin{bmatrix} q_n(1) \\ \vdots \\ q_n(m) \end{bmatrix},$$

dan zal de toestandsverwachting in tijdvak $n+1$ gelijk zijn aan

$$\begin{bmatrix} q_{n+1}(1) \\ \vdots \\ q_{n+1}(m) \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} q_n(1) \\ \vdots \\ q_n(m) \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

of korter, $\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{P}\mathbf{q}_n$. De oplossing is natuurlijk $\mathbf{q}_n = \mathbf{P}^n\mathbf{q}_0$. Merk tevens op dat een kansmatrix losgelaten op een kansvektor wederom een kansvektor oplevert.

Een toestandsvektor $\mathbf{v}$ die een evenwichtsvektor is voor (3.22) noemt men een **stationaire** toestandsvektor.

We merken met nadruk op dat bij een Markov proces de toestandsverwachting van het systeem uitsluitend afhangt van de toestandsverwachting in het voorgaande tijdvak, en niet van de langere voorgeschiedenis van het systeem.

3.6 Markov ketens, theorie

In deze sectie zullen we enkele uitspraken doen over de eigenwaarden bij Markov ketens.

Stelling 3.12 *Zij* $\mathbf{P}$ *een* $m \times m$ *kansmatrix.*
Dan is 1 *een eigenwaarde en voor alle andere eigenwaarden* λ *geldt dat* $|\lambda| \leq 1$.

Bewijs. Uit het feit dat in iedere kolom van $\mathbf{P}$ de elementen optellen to 1 volgt dat 1 is een eigenwaarde is van $\mathbf{P}$ (zie Stelling 2.7).

Zij λ een willekeurige eigenwaarde en $(q_1, \ldots, q_m)$ een bijbehorende zogenaamde **rij-eigenvektor**:

$$(q_1, \ldots, q_m)\mathbf{P} = \lambda(q_1, \ldots, q_m). \tag{3.23}$$

Kies i zó dat $|q_i|$ maximaal is. Uit (3.23) volgt, $\lambda q_i = \sum_{j=1}^m q_j p_{ji}$. Gebruikmakend van het feit dat $\sum_{j=1}^m p_{ji} = 1$ vinden we dat

$$|\lambda q_i| = |\sum_{j=1}^m q_j p_{ji}| \leq \sum_{j=1}^m p_{ji}|q_j| \leq \sum_{j=1}^m p_{ji}|q_i| = |q_i|.$$

Na deling van de uiterste termen links en rechts door $|q_i|$ krijgen we $|\lambda| \leq 1$. □

Uit de stelling van Perron-Frobenius volgt, dat als $\mathbf{P}$ irreducibel en a-periodiek is, de eigenwaarde 1 dominant is. Uit deze stelling volgt ook dat, na eventuele vermenigvuldiging met een scalair, de eigenvektor $\mathbf{v}$ bij 1 niet-negatieve elementen heeft. Ieder veelvoud van $\mathbf{v}$ is ook een eigenvektor bij 1. We kunnen $\mathbf{v}$ zo schalen, d.w.z. het veelvoud zo nemen, dat $\mathbf{v}$ een kansvektor is. We kunnen dus een kansvektor $\mathbf{v}$ als eigenvektor bij 1 nemen: $\mathbf{v}$ is een stationaire toestandsvektor.

Zij $\mathbf{x}_0$ een beginvektor. Uit Stelling 3.6 volgt dat er een α is, zó dat $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n\mathbf{x}_0 = \alpha\mathbf{v}$. Omdat $\mathbf{x}_0$ een kansvektor is, is $\mathbf{x}_n = \mathbf{P}^n\mathbf{x}_n$ dat ook voor iedere n en dus is de limiet vektor $\alpha\mathbf{v}$ ook een kansvektor. Omdat $\mathbf{v}$ kansvektor, moet α wel gelijk aan 1 zijn en we hebben $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n\mathbf{x}_0 = \mathbf{v}$.

Voor Markov ketens bekijken we alleen kansvektoren. We bekijken dan ook maar alleen naar verstoringen van kansvektoren die zelf ook weer kansvektoren zijn. Onder deze restriktie kunnen we dus stellen dat de stationaire toestandsvektor $\mathbf{v}$ blijkbaar stabiel is: voor iedere kansvektor $\mathbf{x}_0$ in de buurt van $\mathbf{v}$ komt de baan $(\mathbf{x}_n)$ op den duur weer in de buurt van $\mathbf{v}$.

Stelling 3.13 *Beschouw een* $m \times m$ *kansmatrix* $\mathbf{P}$ *en een* m*-kansvektor* $\mathbf{x}_0$.
Als $\mathbf{P}$ *een irreducibel en periodiek is dan geldt*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n\mathbf{x}_0 = \mathbf{v}$$

waarbij $\mathbf{v}$ *de dominate eigenvektor is die zo geschaald is dat hij een kansvektor is.*

Voorbeeld 3.12 Weersverwachting Beschouw ons voorbeeld

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \tag{3.24}$$

Uit de graaf behorend bij $\mathbf{P}$ zien we dat deze matrix irreducibel en a-periodiek is. De kanseigenvektor bij 1 is $(0.4, 0.3, 0.3)^T$. Dus,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

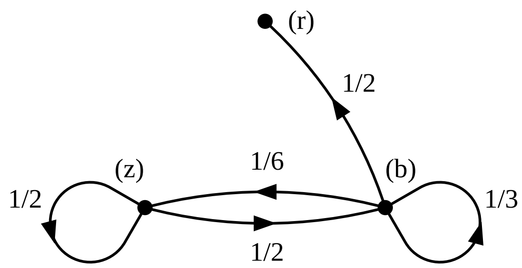
bij elke stochastische begintoestand $\mathbf{x}_0$.

Een nuttige variant op de kansmatrices vormen de **defektieve kansmatrices**. Dat zijn $m \times m$ matrices met niet-negatieve elementen, waarvan de som van de elementen in elke kolom kleiner of gelijk 1 is.

Neem weer ons voorbeeld van de weermatrix (3.24). Stel dat we op dag 0 zon hebben. De kans dat we op dag n regen hebben kunnen we bepalen door het element in de eerste kolom, derde rij, d.w.z. plaats (3,1) van de matrix $\mathbf{P}^n$ te berekenen. Stel nu, dat we willen weten wat de kans is dat het op de n-de dag *voor het eerst* regent sinds dag 0. Hiertoe bekijken we de defektieve kansmatrix $\widetilde{\mathbf{P}}$

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

die we uit $\mathbf{P}$ krijgen door alle elementen in de derde kolom door nullen te vervangen. De gevraagde kans is gelijk aan het element op plaats (3,1) in de matrix $\widetilde{\mathbf{P}}^n$. Bekijk de graaf behorend bij $\widetilde{\mathbf{P}}$,



De bogen die uit (r) vertrekken zijn nu allemaal uitgewist. Dit heeft als effekt dat een weersontwikkeling waarin al eerder dan dag n regen is voorgekomen, nu niet wordt meegeteld. Er is immers geen gesloten pad meer dat van (r) naar (r) loopt. De overige elementen in $\widetilde{\mathbf{P}}^n$ hebben nu ook een andere betekenis gekregen. Het element op plaats (2,1) is nu bijvoorbeeld de kans dat het bewolkt is op dag n zonder dat het daarvoor heeft geregend.

We kunnen nu ook andere vragen stellen zoals, gegeven dat we op dag 0 zon hebben, hoeveel dagen duurt het gemiddeld voordat het gaat regenen? Intuitief kunnen we dit gemiddelde uitrekenen met de formule

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \times \text{kans dat het op dag } n \text{ regent en niet eerder}$$

ofwel, het element op plaats (3,1) in de matrix $\sum_{n=1}^{\infty} n\widetilde{\mathbf{P}}^n$. Dat deze laatste som konvergeert en kunnen we uitrekenen met behulp van de formule in het volgende Lemma.

Lemma 3.14 *Zij* $\mathbf{A}$ *een* $m \times m$ *matrix waarvan alle eigenwaarden in absolute waarde kleiner dan* 1 *zijn. Dan zijn de reeksen* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{A}^n$ *en* $\sum_{n=1}^{\infty} n\mathbf{A}^n$ *konvergent en hun som bedraagt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{A}^n = \mathbf{A}(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} \quad \textit{en} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbf{A}^n = \mathbf{A}(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-2}. \tag{3.26}$$

Voor 1×1 matrices, d.w.z. gewone getallen, was dit eerste uitdrukking in (3.26) reeds lang bekend 9som van een rekenkundige reeks):

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = r\left(1 + r + r^2 + \ldots\right) = r\frac{1}{1-r}. \tag{3.27}$$

De tweede uitdrukking krijgen we voor 1×1 matrices door in (3.27) te differentiëren naar r:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} = \tfrac{1}{1-r} + r\tfrac{1}{(1-r)^2}$$

en vervolgens links en rechts met r te vermenigvuldigen. Het Lemma zelf kan gezien worden als generalisatie.

In ons voorbeeld heeft $\widetilde{\mathbf{P}}$ de eigenwaarden 0, 0.1162, 0.7171 en dus

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\widetilde{\mathbf{P}}^n = \widetilde{\mathbf{P}}(\mathbf{I}-\widetilde{\mathbf{P}})^{-2} = \begin{bmatrix} 52/9 & 22/9 & 0 \\ 66/9 & 30/9 & 0 \\ 42/9 & 24/9 & 0 \end{bmatrix}.$$

Conclusie, gemiddeld duurt het $42/9 = 4.666\ldots$ dagen voor het gaat regenen na zonneschijn.

3.7 Markov ketens, voorbeelden

Voor de liefhebbers bespreken we hieronder een groter voorbeeld van Markov ketens.

Voorbeeld 3.13 Kop of munt Beschouw het volgende spel. Twee spelers A en B beginnen ieder met een bedrag van s_A, respectievelijk s_B gulden. Stel

$$s_A + s_B = s.$$

Het spel bestaat uit het herhaald opgooien van een eerlijke munt. Eerlijk wil zeggen dat de kans op kop even groot is als de kans op munt. Bij 'kop' betaalt A *een gulden aan* B*, bij 'munt' betaalt* B *een gulden aan* A*. Het spel gaat net zolang door tot één van de spelers blut is. De ander heeft dan gewonnen en kan het geld houden.*

Natuurlijke vragen die hierbij opkomen zijn, 'wat is de kans van A, of B, om te winnen?' of, 'hoe lang duurt een spel gemiddeld?' dit alles afhankelijk van de beginverdeling s_A, s_B. Hoewel er iets simpeler direkte wegen zijn, zullen we deze vragen via Markov ketens oplossen. Als toestanden van het spel nemen we het bedrag dat A in zijn bezit kan hebben, dus $0, 1, 2, \ldots, s$ gulden. De toestanden 0 en s zijn natuurlijk de eindtoestanden van het spel waarbij A verloren respectievelijk gewonnen heeft. We stellen het spel voor als een Markov keten met $(s+1) \times (s+1)$ matrix $\mathbf{P}$ die er voor $s = 4$ uitziet als

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Als beginvektor $\mathbf{x}_0$ nemen we de vektor met overal nullen, behalve op plaats s_A, waar een 1 staat.

De matrix is een kansmatrix maar is niet irreducibel: er is geen pad van 1 naar 2 en ook niet van s naar $s-1$. Peron-Frobenius vertelt ons niet dat de eigenwaarde 1 dominant is. Men kan aantonen dat 1 multipliciteit 2 heeft (d.w.z., 1 is een dubbele oplossing van de eigenwaardenvergelijking). Men kan wel aantonen dat $\mathbf{P}^n\mathbf{x}_0$ konvergeert naar een vektor van de vorm $(p_B, 0, \ldots, 0, p_A)^T$ die we kunnen interpreteren als toestand waarin het spel is afgelopen en waarin A, B met kansen p_A respectievelijk p_B hebben gewonnen. We hoeven alleen nog p_A en p_B te bepalen. Merk hiertoe op, dat bij eigenwaarde 1 behalve de rij-eigenvektor $(1, 1, \ldots, 1)$ ook de rij-eigenvektor $(0, 1, 2, \ldots, s)$ bestaat (controleer!). Vermenigvuldig deze rijvektor van rechts met de relatie $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n\mathbf{x}_0 = (p_B, 0, \ldots, 0, p_A)^T$. We vinden dan,

$$(0, 1, 2, \ldots, s)\mathbf{x}_0 = (0, 1, 2, \ldots, s)(p_B, 0, \ldots, 0, p_A)^T$$

en dus $s_A = sp_A$, waaruit volgt $p_A = s_A/s$ en $p_B = s_B/s$.

We geven nu aan wat de gemiddelde tijdsduur van een spel zal zijn. Hiertoe beschouwen we de defektieve kansmatrix $\widetilde{\mathbf{P}}$ die uit $\mathbf{P}$ onstaat door de enen door nullen te vervangen. Als we beginnen met een toestand $\mathbf{v}$, dan is de component op plaats 0 van de vektor $\widetilde{\mathbf{P}}^n\mathbf{v}$ precies de kans dat A op de n-de stap verliest, de component op plaats s is precies de kans dat A op de n-de stap wint. De kans dat het spel eindigt bij de n-de stap is dus de som van deze twee componenten, met andere woorden, gelijk aan $(1, 0, \ldots, 0, 1)\widetilde{\mathbf{P}}^n\mathbf{v}$. De gemiddelde tijdsduur van een spel is gelijk aan de som

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(1, 0, \ldots, 0, 1)\widetilde{\mathbf{P}}^n\mathbf{v}$$

en dit is gelijk aan

$$(1, 0, \ldots, 0, 1)(\mathbf{I} - \widetilde{\mathbf{P}})^{-2}\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{v}.$$

Neem bijvoorbeeld $s = 4$ en kies als startvektor $(0, 0, 1, 0, 0)^T$ met andere woorden, zowel A als B begint met twee gulden. We hebben

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

en eenvoudige berekening levert $(1, 0, 0, 0, 1)(\mathbf{I} - \widetilde{\mathbf{P}})^{-2}\widetilde{\mathbf{P}}(0, 0, 1, 0, 0)^T = 4$. De gemiddelde spelduur bij een startbedrag van twee gulden voor elke speler is dus 4 muntworpen. Het is een interessante opgave om deze berekening ook in het algemeen uit te voeren. Het blijkt dat het verwachtte aantal muntworpen precies $s_A s_B$ is. Met andere woorden, als A met 1 gulden start en B met 100 gulden dan kan er gemiddeld gezien opvallend lang gespeeld worden, namelijk 100 keer.

Ten slotte merken we op dat het met de matrix $\widetilde{\mathbf{P}}$ ook mogelijk is de winstkans van bijvoorbeeld A te bepalen. Dat is namelijk precies de som van de kansen dat A in precies de eerste, precies de tweede, . . ., precies de n-de, . . . stap wint, dus de component op plaats s in de som

$$\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{\mathbf{P}}^n\mathbf{v} = (\mathbf{I} - \widetilde{\mathbf{P}})^{-1}\mathbf{v}$$

welke in praktische gevallen kan worden berekend.

3.8 Oefeningen

Oefening 3.1 [Tentamensom april 1993]

De overlevingsfraktie $s > 0$ voor nieuwgeborenen in een dierpopulatie is afhankelijk van de strengheid van de winter. We bestuderen een model dat alleen de eerste drie levensjaren omvat. We delen onze populatie op in 1, 2 en 3-jarigen en tellen de populatie om het jaar. De éénheid van opdeling van onze populatie moet immers gelijk zijn aan het tijdvak waarover we kijken. Het aantal k-jarige dieren in tijdvak n geven we aan met $N_n(k)$. Zij $\mathbf{L}$ de bijbehorende Leslie matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ s & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Onze populatie wordt beschreven door het model

$$\mathbf{N}_{n+1} = \mathbf{L}\mathbf{N}_n, \qquad \mathbf{N}_n = \begin{bmatrix} N_n(1) \\ N_n(2) \\ N_n(3) \end{bmatrix}$$

waarbij de beginpopulatie N_0 gegeven is.

a. Teken de bij $\mathbf{L}$ horende gerichte graaf en onderzoek deze op irreducibiliteit en periodiciteit.

b. Toon aan dat $\mathbf{L}$ een positieve dominante eigenwaarde heeft.

c. Stel $\lambda \neq 0$ is een eigenwaarde van $\mathbf{L}$. Bepaal een eigenvektor bij λ in termen van s en λ.

d. Stel de eigenwaardevergelijking van $\mathbf{L}$ op.

e. Bepaal m.b.v. het vorige onderdeel de kleinste overlevingsfraktie s_0 zó dat de populatie kan blijven voortbestaan in de tijd. Is er bij deze s_0 een stationaire populatieverdeling mogelijk? Zo ja, bepaal deze dan.

Oefening 3.2 Een populatie dieren is verdeeld in drie leeftijdsgroepen met bijbehorende Leslie-matrix gegeven door

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 12 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Op $t = 0$ is de samenstelling van de dierpopulatie $(4, 3, 1)$.

a. Bepaal de samenstelling van populatie op de tijdstippen $t = 1, 2, 3$.

b. Bepaal de eigenwaarden van de Leslie matrix $\mathbf{L}$.

c. Bepaal de onderlinge verhouding van de aantallen in elke leeftijdsgroep als $t \to \infty$.

Oefening 3.3 Bepaal $\lim_{n\to\infty} \mathbf{A}^n\mathbf{v}$ waarin

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Oefening 3.4 Een keverpopulatie verdeeld in drie leeftijdsgroepen heeft de bijbehorende Leslie matrix

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

a. Toon aan dat $\mathbf{L}$ periodiek is en bepaal de bijbehorende periode.

b. Heeft $\mathbf{L}$ een dominante eigenwaarde?

Oefening 3.5 We keren weer even terug naar de sternpopulatie uit het begin van ons hoofdstuk en wijzen op een subtiel punt. Mogen we uit de relatie $N_{n+1}(1) = 2N_n(2) + 4N_n(3)$ concluderen dat elk twee-jarig vrouwtje gemiddeld zorgt voor 2 vrouwelijke nakomelingen? Zo nee, wat is dan het werkelijke gemiddelde aantal?

Oefening 3.6 We beschouwen een plantenpopulatie waarvan elke plant in augustus een hoeveelheid zaden produceert. Deze zaden kunnen het volgend jaar in mei ontkiemen, maar het kan ook gebeuren dat ze in mei van het jaar daarop ontkiemen of zelfs nog later. De kans op ontkiemen vermindert echter met de jaren. Stel een model op in de vorm van een twee bij twee Leslie matrix waarmee het voortbestaan van de populatie bestudeerd kan worden. Onze aannames zijn de volgende,

γ = het aantal zaden per plant in augustus geproduceerd.
α = fraktie van de éénjarige zaden dat in mei ontkiemt.
β = fraktie van de tweejarige zaden dat in mei ontkiemt.
σ = fraktie van de zaden dat de winter overleeft.
Zaden ouder dan twee jaar zijn niet meer levensvatbaar.
Laat in het bijzonder zien dat de conditie voor het voortbestaan van de populatie luidt:

$$\sigma\gamma\alpha\frac{1+\sqrt{1+\delta}}{2} \geq 1 \quad \text{waarin} \quad \delta = 4\beta(1-\alpha)/\gamma\alpha^2.$$

Geef een interpretatie van de faktor $\sigma\gamma\alpha$.

Oefening 3.7 In 1202 stelde Fibonacci het volgende probleem dat hij tevens oploste. Stel dat elk konijnenpaar slechts twee keer nakomelingen kan krijgen, als ze één en twee maanden oud zijn. Bij elk zo'n blijde gebeurtenis wordt er één nieuw paar konijnen geproduceerd. Stel dat alle konijnen overleven. Hoeveel paar zullen er na n generaties zijn? Om dit probleem op te lossen stellen we

$R_n^0 =$ aantal nieuwgeboren paren in generatie n
$R_n^1 =$ aantal 1-maand oude paren in generatie n
$R_n^2 =$ aantal 2-maand oude paren in generatie n

Stel een Leslie matrix op. Laat in het bijzonder zien dat $R_{n+1}^0 = R_n^0 + R_{n-1}^0$. Stel dat Fibonacci oorspronkelijk één konijnenpaar had, m.a.w. $R_0^0 = R_1^0 = 1$. Schrijf de aantallen R_n^0 voor de eerste paar generaties op. Deze rij staat bekend als de *rij van Fibonacci*.

Oefening 3.8 [Tentamensom november 1995]

In een groot kantoorgebouw blaast de luchtverversingsinstalatie een ziekteverwekker rond. De werknemers lopen daardoor voortdurend een risico om ziek te worden. Sommige werknemers zijn gevoeliger voor de ziekte dan andere. De gevoeligheid (weerstand) kan bovendien in de loop der tijd veranderen. Op het eind van week n (na de vakantie) is $x(n)$ de fraktie van de werknemers die niet ziek is maar wel gevoelig voor de ziekte, $y(n)$ is de fraktie van zieke werknemers en $z(n)$ is het deel wat niet ziek is en ook niet gevoelig. Het ziekteverloop gedraagt zich volgens een Markov keten met overgangsmatrix $\mathbf{Q}$ en toestandsvektoren $\mathbf{x}(n)$ waarbij

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.9 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{x}(n) = \begin{bmatrix} x(n) \\ y(n) \\ z(n) \end{bmatrix}$$

a. Geef de gerichte graaf bij $\mathbf{Q}$.

b. Kan je op grond van de stelling van Perron-Frobenius inzien of $\mathbf{Q}$ een dominante eigenwaarde heeft?

c. Zonder te rekenen weten we dat er minstens een stationaire toestandsvector is. Waarom? Bepaal deze vector(en) en bespreek de stabiliteit.

d. Veronderstel dat in de eerste week na de vakantie (week 0) alle werknemers gezond zijn en niet gevoelig voor de ziekte. Bepaal het gedrag van $\mathbf{x}(n)$ voor $n \to \infty$. Wat is het percentage aan zieke werknemers waarop het bedrijf op den duur kan rekenen?

Oefening 3.9 Een systeem kan in drie toestanden verkeren en gedraagt zich volgens een Markov keten met overgangsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

a. Geef de gerichte graaf bij $\mathbf{P}$.

b. Bepaal de stationaire toestandsvektor

c. Gegeven is dat het systeem zich in toestand 3 bevindt. Wat is de kans dat toestand 1 na 2 stappen wordt aangenomen? En dat in twee stappen het systeem weer in toestand 3 is?

d. Gegeven is dat het systeem zich in toestand 1 bevindt. Hoeveel stappen duurt het gemiddeld opdat toestand voor het eerst bereikt wordt?

Oefening 3.10 Twee honden hebben samen last van 4 vlooien. Tussen tijdstip n en $n+1$ springt een willekeurig gekozen vlo van de ene hond op de andere over.

a. Laat zien dat dit proces gemodelleerd kan worden als Markov keten met het aantal vlooien op één van de honden als toestanden en de volgende overgangsmatrix,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

b. Laat zien dat de matrix irreducibel is.

c. Bepaal de periode van de matrix.

d. Laat zien dat er precies één stationaire toestand is en bepaal deze.

e. Geef een voorbeeld voor een beginverdeling $\mathbf{p}$ zo dat $\mathbf{P}^n\mathbf{p}$ geen limiet heeft als $n \to \infty$.

f. Kun je een stationaire verdeling aangeven in het geval van n vlooien?

Oefening 3.11 Stel

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

a. Bepaal alle stationaire verdelingen van $\mathbf{P}$ (d.w.z. de eigenvektoren bij 1).

b. Bepaal $\mathbf{P}^n$ als $n \to \infty$.

c. Bepaal $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n\mathbf{p}$ voor willekeurige startverdelingen $\mathbf{p}$. Is deze limiet onafhankelijk van $\mathbf{p}$?

Oefening 3.12 Een muis heeft een simpele woning: drie kamers naast elkaar met een doorgang tussen 1 en 2 en tussen 2 en 3. Als de muis in kamer 1 of 3 zit gaat hij in het volgende tijdvak naar 2. Als hij in 2 zit gooit de muis een munt op (is dit een plausibel model?) en gaat met kans p naar kamer 1 en met kans $1-p$ naar kamer 3. De muis blijft nooit in dezelfde kamer.

a. Modelleer deze situatie als Markov keten met overgangsmatrix $\mathbf{P}$.

b. Laat zien dat de keten irreducibel is.

c. Bepaal de periodiciteit.

d. Bereken $\mathbf{P}^n$ voor willekeurige n.

e. Laat zien dat er precies één stationaire kansverdeling is.

Oefening 3.13 Een docent vertelt student 1 in goed vertrouwen dat er een som over Markov ketens op het tentamen komt. De student kan haar/zijn mond niet houden en vertelt het aan student 2, die het weer doorvertelt aan student 3, enzovoorts. Door het lawaai in de kantine is de kans dat het bericht goed doorkomt gelijk aan p en verkeerd met kans $q = 1-p$ per stap.

a. Modelleer deze situatie met een Markov keten met 2×2-overgangsmatrix $\mathbf{P}$.

b. Bereken $\mathbf{P}^n$ voor willekeurige n.

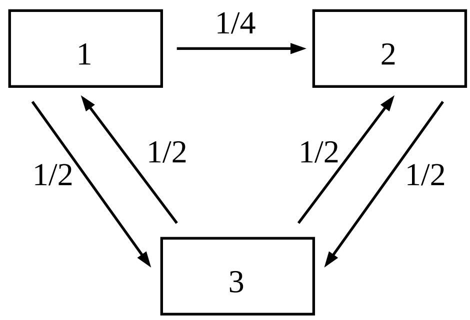
c. Laat zien dat de kansverdeling voor het bericht dat doorkomt uiteindelijk onafhankelijk is van wat de docent gezegd heeft.

Oefening 3.14 Beschouw een drietal communicerende vaten waarbij uitwisseling van een fysische of chemische substantie plaatvindt. Laat $x_n(i)$ de hoeveelheid materiaal (in gram) in vat i zijn op tijdstip n in minuten gemeten. De toestand van het systeem wordt beschreven door de toestandsvektor $\mathbf{x}_n = (x_n(1), x_n(2), x_n(3))^T$. Als model nemen we aan dat voor elk geordend paar i, j er in de n-de minuut een hoeveelheid $a_{ij}x_n(j)$ van vat j naar i stroomt. Hierin is a_{ij} een coëfficient die onafhankelijk van het tijdstip is. Merk op dat er natuurlijk een tegenstroom van i naar j is ter grootte $a_{ji}x_n(i)$.

a. Definiëer $a_{ii} = -\sum_{j\neq i} a_{ji}$, $i = 1, 2, 3$. Toon aan dat

$$x_{n+1}(i) = x_n(i) + \sum_{k=1}^{3} a_{ik}x_n(k), \qquad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

Definiëren we $\mathbf{A} = (a_{ij})$ dan geldt in matrixvorm de lineaire relatie $\mathbf{x}_{n+1} = (\mathbf{I} + \mathbf{A})\mathbf{x}_n$. Merk op dat $\mathbf{I} + \mathbf{A}$ een stochastische matrix is. Beschouw het volgende overdrachtsdiagram voor de drie vaten,



b. Bepaal de matrix $\mathbf{A}$ en toon aan dat $\mathbf{I}+\mathbf{A}$ een dominante eigenwaarde heeft.

c. Bepaal het gedrag van $\mathbf{x}_n$ voor $n \to \infty$ als gegeven is dat $\mathbf{x}_0 = (10, 0, 10)^T$.

d. Gegeven is dat

$$\mathbf{I}+\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Schets het bijbehorende diagram van de communicerende vaten. Toon aan dat $\mathbf{I}+\mathbf{A}$ periodiek is en bepaal de periode. Bepaal $(\mathbf{I}+\mathbf{A})^n\mathbf{x}_0$ voor willekeurige n.

Oefening 3.15 (Moeilijk) Zij $\mathbf{A} = (a_{ij})$ en $\mathbf{B} = (b_{ij})$ een tweetal $m \times m$ matrices met niet-negatieve coëfficienten. Zij λ_A, λ_B de bijbehorende grootste positieve eigenwaarden. Stel dat voor elk paar i, j geldt dat $a_{ij} \geq b_{ij}$. Bewijs dat $\lambda_A \geq \lambda_B$.

4 Algemene recursies in $\mathbb{R}^m$

4.1 Parasiet-gastheer modellen

Gegeven een verzameling $V \subset \mathbb{R}^m$ en een $\mathbb{R}^m$-waardige funktie $\mathbf{f}$ op V. Beschouw een rij vektoren $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \ldots$ met $\mathbf{x}_i \in V$ gegeven door

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \text{ voor } n = 0,\ 1,\ 2, \ldots \tag{4.1}$$

Een relatie van de vorm (4.1) noemen we wederom een **recursie**, een rij $(\mathbf{x}_n)$ die voldoet aan (4.1) noemen we een **recursieve rij** of **baan**. Een baan wordt vastgelegd door $\mathbf{f}$ en de keuze van de startwaarde $\mathbf{x}_0$. De vraag is weer,

hoe gedraagt $\mathbf{x}_n$ zich als $n \to \infty$?

In de praktijk worden recursies van de vorm (4.1) gedefinieerd door uit schrijven van de koördinaten. Voor bijvoorbeeld $m = 2$ is (4.1) van de vorm

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n). \end{cases} \tag{4.2}$$

De waarden x_n en y_n zijn dan de koördinaten van $\mathbf{x}_n$ en f en g zijn de koördinaten van $\mathbf{f}$:

$$\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

Voorbeeld 4.1 [Sluipwespen-rupsen] Een model waarin niet-lineaire recursies op natuurlijke wijze tevoorschijn komen is dat voor een gecombineerde populatie sluipwespen en rupsen. De sluipwesp heeft als gewoonte zijn eitjes op een rups te leggen. De uitgekomen larven gebruiken dan de rups als levende voedselvoorraad, hetgeen de rups op den duur niet overleeft. In ons model zien we dus dat de voortplanting van de sluipswesp volledig afhankelijk is van de aanwezigheid van rupsen. We kijken elk jaar naar de populaties rupsen r_n en wespen w_n. We nemen aan dat de rupsenbevolking groeit volgens een Verhulst model met groeifaktor $(\alpha - r_n/R)$ voor zekere α, R. De aanwezigheid van de sluipwesp geeft een extra rem op de groeifaktor en we kiezen als model

$$\begin{cases} r_{n+1} = (\alpha - r_n/R - w_n/W)\, r_n, \\ w_{n+1} = \gamma\, r_n\, w_n \end{cases} . \tag{4.4}$$

Door r_n en w_n op een geschikte manier te schalen kunnen we R, W uit deze vergelijkingen elimineren. Deel namelijk de eerste vergelijking in (4.4) links en rechts van het =-teken door R, deel de tweede door W, en stel $x_n = r_n/R$ en $y_n = w_n/W$. Onze recursie gaat dan over in

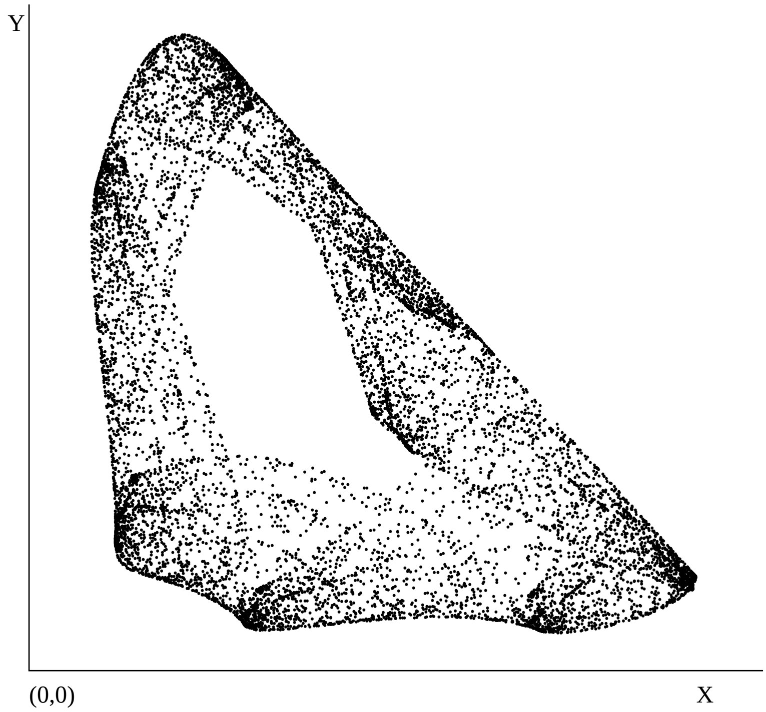
$$\begin{cases} x_{n+1} = (\alpha - x_n - y_n)\, x_n, \\ y_{n+1} = \beta\, x_n\, y_n, \end{cases} \tag{4.5}$$

waarin $\beta = R\,\gamma$. De x_n en y_n die van ons van belang zijn, zijn natuurlijk ≥ 0.

Deze recursie is van de vorm (4.2) met

$$f(x,y) = (\alpha - x - y)\, y, \qquad g(x,y) = \beta\, x\, y.$$

Om aan te geven dat niet-lineaire recursies zeer grillig kunnen zijn geven we in FIG. 9 de baan bij $\alpha = 3.35$, $\beta = 1.1$ en startpunt $(1, 1)$. Dit model is een voorbeeld van gastheer-parasiet interaktie. Het is voornamelijk bekend door de mooie plaatjes die het geeft.



FIGUUR 9. *Een baan van het gastheer-parasiet interaktie model* (4.5) *met* $\alpha = 3.35$, $\beta = 1.1$.

In de theoretische biologie worden echter realistischere modellen voorgesteld. In principe hebben ze de vorm

$$\begin{cases} G_{n+1} = \lambda\, G_n\, f(G_n, P_n) \\ P_{n+1} = \mu\, G_n\, (1 - f(G_n, P_n)) \end{cases}$$

Hierin staan G en P voor de gastheer- respectievelijk parasiet populaties. De faktor λ kan geïnterpreteerd worden als de groeifaktor van de gastheerpopulatie bij afwezigheid van parasieten en $f(G_n, P_n)$ als de fraktie gastheren die per tijdseenheid ontsnappen aan parasitisme. Een klassieke keuze is $f = e^{-aP_n}$, het **Nicholson Bailey model** (1935). De keuze van f volgt hier uit simpele statistische argumenten.

4.2 Meer-staps recursies

Recursies in $\mathbb{R}^2$ kunnen ook gebruikt worden om recursies in één variabele van de vorm

$$x_{n+2} = f(x_{n+1}, x_n)$$

te bestuderen. Zo'n recursie heet een twee-staps recursie. In m-**staps recursies** in één variabele wordt de nieuwe x_n waarde niet alleen direkt bepaald door x_{n-1} maar door m termen uit het verleden. Dit soort recursies kunnen bestudeerd worden door een-staps recursies (4.1) in $\mathbb{R}^m$.

Voorbeeld 4.2 Beschouw bijvoorbeeld een rij getallen (u_n) die voldoet aan

$$u_{n+2} = \kappa\, u_{n+1}(1 - u_n). \tag{4.6}$$

Dit is een modificatie van het model van Verhulst waarin we de remmende invloed van populatietoename slechts merken na de tweede generatie.

Deze recursie kan als volgt worden omgevormd tot één-staps recursie in $\mathbb{R}^2$.
Stel $x_n = u_{n+1}$, $y_n = u_n$ voor alle $n \geq 0$. Dan geldt,

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa\, x_n(1-y_n) \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

Als de (u_n) voldoen aan (4.6) dan voldoen $x_n = u_{n+1}$, $y_n = u_n$ aan (4.7).
Anderzijds voor de baan $((x_n, y_n))$ van (4.7) met start $x_0 = u_1$ en $y_0 = u_0$ geldt precies dat $u_n = y_n$.

De 1-staps recursie (4.7) en de 2-staps recursie (4.6) zijn equivalent en we kunnen de technieken voor (4.1) uit de volgende paragraaf gebruiken om (4.6) te bestuderen via (4.7).

Voorbeeld 4.3 [Sterns] De gegevens over de stern-populatie in §3.1 die de matrix recursie (3.1) opleverde kunnen ook gebruikt worden om een meer-staps recursie in één variabele te maken.

We bekijken weer maar alleen vrouwelijke individuen. Met M_n geven we nu het aantal kuikens aan in jaar n. Gemiddeld produceert ieder stern die in jaar n in haar 1-ste levensjaar is, twee kuikens in jaar $n+1$. Omdat gemiddeld een kwart van de kuikens de winter niet overleven, zien we dat gemiddeld ieder kuiken uit jaar $n-1$, in jaar $n+1$, $\frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$ kuiken produceert. Sterns in hum 2-de levensjaar in jaar n produceren in jaar $n+1$ gemiddeld 4 kuikens en komen voort uit een kuiken populatie van jaar $n-2$ die $4 \cdot 2 = 8$ maal zo groot was: gemiddeld produceren kuikens van jaar $n-2$, in jaar $n+1$, $4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ kuiken. Dus het totaal aantal kuikens in jaar $n+1$ in termen van de aantallen kuikens in de voorafgaande jaren is dus

$$M_{n+1} = \tfrac{1}{2} M_{n-1} + \tfrac{1}{2} M_{n-2}. \tag{4.8}$$

De ontwikkeling van de aantallen kuikens hebben we hier gemodelleerd met een 3-staps recursie. Er staan welliswaar twee termen in het rechterlid, maar we gaan drie generaties terug. We hadden te term $0\, M_n$ kunnen toevoegen.

Met $x_n = M_n$, $y_n = M_{n-1}$ $z_n = M_{n-2}$ is (4.8) equivalent met de 3-dimensionale 1-staps recursie

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2} y_n + \frac{1}{2} z_n, \\ y_{n+1} = x_n, \\ z_{n+1} = y_n, \end{cases}$$

die in matrix vorm geschreven kan worden als

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n \quad \text{waarbij} \quad \mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.9}$$

De matrix in (4.9) die de 1-staps variant van de 3-staps recursie (4.8) beschrijft wordt de **companion matrix** van (4.8) genoemd. De companion matrix is een Leslie matrix, maar is niet de Leslie matrix voor het model voor de stern-populatie (in (3.1))! De eigenwaardenvergelijking, en dus de eigenwaarden, van de companion matrix $\mathbf{A}$ en van de Leslie matrix in (3.1) zijn wel identiek en het model (4.9) vertelt uitstekend hoe de aantallen vrouwelijke kuikens zullen evolueren. Echter in tegenstelling tot (3.1) geeft (4.9) geen informatie over de oudere sterns: de overlevings factoren $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{2}$ (zie (3.1)) kunnen niet uit $\mathbf{A}$ gehaald worden.

Voorbeeld 4.4 [Een economisch groei-model] De welvaart is de afgelopen honderd jaar sterk toegenomen; dat betekent echter niet, dat de welvaartstoeneming gelijkmatig is geweest. Perioden van versnelling en vertraging van de welvaartstoename hebben zich afwisselend voorgedaan. Onder *conjunctuur* verstaat men deze min of meer regelmatige afwisseling van op- en neergang in het economische leven, zoals deze weerspiegeld wordt in nationaal inkomen, prijzen, en dergelijke economische grootheden. Het betreft hierbij schommelingen rond de langdurige trend van de economische ontwikkeling. De de schommelingen worden in de economie *conjunctuurgolven* genoemd. Het taalgebruik wijkt af van de overeenkomstige terminologie in de mechanica, waar schommelingen van grootheden die van één variabele afhangen (hier de tijd) trillingen worden genoemd. De bekendste golfbeweging van de conjuntuur is de *juglar* (genoemd naar J.C. Juglar), die een duur van 6 á 10 jaren heeft. Er kan ook een lange golfbeweging worden onderscheiden met een duur van 40 á 60 jaren; één van de ontdekkers is N. Kondratieff. De verschillende theoriën over conjunctuurgolven zijn in de economie nog erg omstreden.

Merk op, dat we het begrip conjunctuur en conjunctuurgolf omschreven hebben, maar niet gedefinieerd. Een preciezer beschrijving vindt plaats door het analyseren van conjunctuurmodellen. We volgen hier een poging om zo'n model te maken.

De verklaring voor het ontstaan van conjunctuurgolven wordt gezocht in de werking van de markteconomie, met name in het niet uitkomen van de verwachtingen van consumenten en investeerders. Stel de conjunctuur bevindt zich in opgaande beweging, er wordt meer geïnvesteerd omdat de verwachtingen hoger gesteld zijn. Hierdoor neemt de hoeveelheid kapitaalgoederen toe, maar bij te grote toename zal het rendement dalen. De verwachtingen worden hierdoor negatief beïnvloed, de investeringen nemen af en tevens de consumptieve bestedingen. Na enige tijd is de voorraad van kapitaalgoederen te sterk afgenomen en zullen de ondernemers opnieuw tot investering over moeten gaan. De conjunctuur kan zich weer in opgaande lijn bewegen.

Gebruikmakend van de theorie van J.M. Keynes (The General Theory of Employment, Interest and Money, 1936) kan men het volgende zogenaamde post-Keynesiaanse conjunctuurmodel opstellen.

We gebruiken de volgende begrippen.

Het *nationaal inkomen* (ook wel *nationaal product* genoemd) is de totale hoeveelheid geld die per jaar door overheid en bevolking aan goederen, diensten, etc. wordt uitgegeven.

De *consumptie* is de totale hoeveelheid geld die per jaar door de bevolking aan goederen en diensten wordt uitgegeven.

De *investeringen* is de hoeveelheid geld die per jaar besteed wordt aan uitbreiding en instandhouden van het kapitaal.

Er wordt angenomen dat het nationaal inkomen twee bestanddelen heeft: consumptie en investeringen. Onder deze aanname impliceert de definitie van nationaal inkomen, consumptie en investeringen dat

$$Y_n = C_n + I_n. \tag{4.10}$$

Verder wordt aangenomen dat de overheid geen speciale maatregelen neemt ten aanzien van de investeringen. Als eenvoudigste geval stelt Keynes, dat de investeringen konstant zijn:

$$I_n = I_0, \quad 0 < I_0 < Y_n. \tag{4.11}$$

De consumenten zullen hun bestedingen baseren op het inkomen Y_n in de *vorige* periode, afgezien van de bestedingen C_0 aan basisvoorzieningen zoals voedsel, onderdak, verwarming. Nu geldt

$$C_n = \kappa Y_{n-1} + C_0, \qquad 0 < C_0 < C_n < Y_n, \quad 0 < \kappa < 1. \tag{4.12}$$

κ heet de *marginale consumptiequote*. De gezinnen passen dus hun bestedingen aan met een vertraging van een tijdsperiode.

Substitutie van (4.12) en (4.11) in (4.10) levert

$$Y_n = \kappa Y_{n-1} + C_0 + I_0.$$

Dit is precies het type recursie dat we in hoofdstuk 1 bestudeerd hebben. Er is een evenwicht $\frac{c_0+I_0}{1-\kappa}$ dat bovendien stabiel is. In dit model ontwikkelt de economie ontwikkelt zich naar een evenwichtstoestand, waarbij van schommeling geen sprake is. Het is duidelijk, dat met het model in deze vorm het verschijnsel conjunctuurgolf niet verklaard kan worden.

Een uitbreiding van het post-Keynesiaanse conjunctuurmodel is door P.A. Samuelson in 1939 voorgesteld, waarna door J.R. Hicks het model verder ontwikkeld is. Het draagt de naam *multiplicator-acceleratormodel* van Samuelson en Hicks.

We gaan weer uit van de vergelijking (4.10) en (4.12). Voor de investeringen wordt nu een nieuwe aanname gemaakt. De ondernemers baseren hun verwachtingen op de toe- of afname van het nationaal inkomen in het naaste verleden. Is er een toename, dan wordt er meer geïnvesteerd; is er een afname, dan wordt er minder geïnvesteerd dan een zekere basisinvestering I_0. We stellen

$$I_n = d\,(Y_{n-1} - Y_{n-2}) + I_0, \quad d > 0. \tag{4.13}$$

De konstante d heet de *accelerator*. Substitutie van (4.12) en (4.13) in vergelijking (4.10) levert

$$Y_n = (\kappa + d)Y_{n-1} - dY_{n-2} + C_0 + I_0. \tag{4.14}$$

Deze 2-staps recursie kan herschreven naar een 1-staps recursie in $\mathbb{R}^2$ door te stellen $x_n = Y_n$ en $y_n = Y_{n-1}$. De vergelijking is dan equivalent met

$$\begin{cases} x_n = (\kappa + d)x_{n-1} - d\, y_{n-1} + C_0 + I_0, \\ y_n = x_{n-1}. \end{cases} \tag{4.15}$$

In dit speciale geval kan de 1-staps recursie ook geschreven worden als een inhomgene matrix recursie:

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}\mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{b} \ \text{ waarbij } \mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \kappa + d & -d \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} C_0 + I_0 \\ 0 \end{bmatrix}; \tag{4.16}$$

$\mathbf{b}$ is de **inhomogene** term. De matrix is, voor de homogene variant van (4.14) (d.w.z. voor het geval $C_0 + I_0 = 0$) de companion matrix.

In de volgende paragraaf zullen we ondermeer deze recursies (4.14) en (4.16) analyseren en zien of dit model van Samuelson en Hicks wel schommelingen in de conjunctuur kan voorspellen.

4.3 Evenwicht en stabiliteit

Net als in het ééndimensionale geval is het begrip evenwichtspunt weer van cruciaal belang. Een punt $\mathbf{a} \in V$ heet **evenwichtspunt** van de recursie $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ als $\mathbf{a} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$. De konstante rij $\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \ldots$ is een oplossing van onze recursie. Een evenwichtspunt $\mathbf{a}$ noemen we een **stabiel** of **attractief** evenwicht,

als voor iedere $\mathbf{x}_0$ in de buurt van $\mathbf{a}$ de baan $(\mathbf{x}_n)$ naar $\mathbf{a}$ konvergeert.

In het meer-dimensionale geval is het begrip **instabiliteit** lastiger te omschrijven. Bij de matrixrecursies hebben we al gezien dat er sprake kan zijn van zowel attractieve als repulsieve richtingen rond het triviale evenwichtspunt $\mathbf{0}$. We zullen ons beperken tot de grove indeling stabiel en alle andere gevallen niet-stabiel.

Als in geval van recursies van één variabele (zie Stelling 1.3) kunnen we de stabiliteit van evenwichten analyseren door te linearizeren in het evenwicht. We moeten hiertoe $\mathbf{f}$ differentiëren in het evenwicht. De afgeleide in een punt is, in dit meer dimensionale geval, een matrix en de gelinearizeerde recursie is een matrix recursie als in (3.6): we kunnen de stabiliteitsresultaten uit het vorige hoofdstuk toepassen. De afgeleide matrix in een punt $\mathbf{x}$ wordt **Jacobi matrix** of **totale afgeleide** van $\mathbf{f}$ in $\mathbf{x}$ genoemd en noteren we als $D\mathbf{f}(\mathbf{x})$. De Jacobi matrix wordt opgebouwd met partiële afgeleiden in alle richtingen en van alle koördinaten van $\mathbf{f}$.

In $\mathbb{R}^2$, als $\mathbf{f}$ bijvoorbeeld koördinaten $f(x, y)$ en $g(x, y)$ heeft (zie (4.3))

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix}$$

is

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix}. \tag{4.17}$$

Voor stabiliteit zijn we geïnteresseerd wat er in de buurt van een evenwicht gebeurd. We bekijken eerst hoe de funktie $\mathbf{f}$ voor dit 2-dimenionale geval zich gedraagd in de buurt van het punt $\mathbf{x}$. Voor kleine Δx en Δy kunnen we in Kreyszig (§8.8) vinden dat

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y),$$

waarbij termen van de vorm Δx^2, Δy^2 en $\Delta x \Delta y$ verwaarloosd zijn. Voor $\mathbf{f}$ betekent dit dat

$$\begin{bmatrix} f(x + \Delta x, y + \Delta y) \\ g(x + \Delta x, y + \Delta y) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}, \tag{4.18}$$

ook weer met verwaarlozing van de hogere orde termen.
Als $\mathbf{a}$ een evenwicht is en $\mathbf{x}_n = \mathbf{a} + \Delta\mathbf{x}_n$, met $\Delta\mathbf{x}_n$ klein (dus $\mathbf{x}_n$ in de buurt van $\mathbf{a}$) dan zien we dat

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{a} + \Delta\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{a} + \Delta\mathbf{x}_n) \approx \mathbf{f}(\mathbf{a}) + D\mathbf{f}(\mathbf{a})\Delta\mathbf{x}_n.$$

Omdat $\mathbf{a} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$ mogen we konkluderen dat $\Delta\mathbf{x}_{n+1} \approx D\mathbf{f}(\mathbf{a})\Delta\mathbf{x}_n$ of, wat minder kompakt opgeschreven,

$$\begin{bmatrix} \Delta x_{n+1} \\ \Delta y_{n+1} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_n \\ \Delta y_n \end{bmatrix}, \text{ waarbij } \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}. \tag{4.19}$$

Het idee is dat, voor kleine Δx_n en Δy_n de $\Delta\mathbf{x}_n$ zich min of meer gedragen als oplossing van de matrix recursie (4.19) waarin het $\approx$ teken vervangen is door een $=$ teken. Met andere woorden,

> *in de buurt van een evenwicht $\mathbf{a}$ gedraagt de oplossing van $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ zich min of meer als de oplossing van de matrix recursie* (4.19) (met = i.p.v. $\approx$).

In geval alle eigenwaarden in absolute waarde kleiner dan 1 zijn kunnen we interessante konklusies trekken. Uit het lineaire geval weten immers we dat de oplossingen van matrix recursies van dergelijke matrices altijd naar nul konvergeren (zie Stelling 3.5). Dus, als $\Delta\mathbf{x}_0$ voldoende klein is, konvergeert de rij $(\Delta\mathbf{x}_n)$ naar nul. Met andere woorden

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \lim_{n\to\infty} (\mathbf{a} + \Delta\mathbf{x}_n) = \mathbf{a} \quad \text{voor alle } \mathbf{x}_0 \text{ voldoende dicht bij } \mathbf{a},$$

en dus is $\mathbf{a}$ stabiel. We kunnen dus konkluderen dat een evenwicht $\mathbf{a}$ stabiel is als $|\lambda| < 1$ voor iedere eigenwaarde λ van $D\mathbf{f}(\mathbf{a})$.

In m dimensies is de Jacobi matrix een $m \times m$ matrix en kan eenzelfde analyse uitgevoerd worden. Hiermee hebben we het bewijs geschetst van de volgende stelling.

Stelling 4.1 *Stel dat $\mathbf{a}$ een evenwichtspunt is, $\mathbf{a} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$, en stel dat $\mathbf{f}$ differentieerbaar is in $\mathbf{a}$.*
Als $|\lambda| < 1$ voor alle eigenwaarden λ van $D\mathbf{f}(\mathbf{a})$ dan is het evenwichtspunt $\mathbf{a}$ stabiel.
Als $|\lambda| > 1$ voor een zekere eigenwaarde λ van $D\mathbf{f}(\mathbf{a})$ dan is het evenwicht $\mathbf{a}$ instabiel.

Voor de situatie waarin $|\lambda| \leq 1$ voor alle eigenwaarden λ en $|\lambda| = 1$ voor minstens een λ kunnen we geen uitspraak doen. De stabiliteit hangt dan weer af van hogere orde termen (zie ook Voorbeeld 1.3). De verstoringen $\Delta\mathbf{x}_n$ voldoen slechts bij benadering exact aan een matrix recursie. Met name in de kritische situatie van stabiel/instabiel kunnen de verwaarloosde hogere orde term van doorslag zijn.

Voorbeeld 4.5 [Sluipwespen-rupsen] We analyseren het model (4.5) in Voorbeeld 4.1 voor het geval $\beta = \frac{1}{2}$.
We bepalen eerst de evenwichten. Die volgen uit de vergelijkingen

$$a = (\alpha - a - b)\, a, \quad \text{en} \quad b = \tfrac{1}{2}\, a\, b$$

De eerste vergelijking heeft twee oplosiingen: $a = 0$ en $a = \alpha - b - 1$. De tweede vergelijking heeft ook twee oplossingen: $b = 0$ en $a = 2$. We willen a en b hebben die een oplossing zijn van beide vergelijkingen. In principe zijn er vier kombinaties mogelijk:

(i)	$a = 0, b = 0$;		
(ii)	$a = \alpha - b - 1, b = 0,$	of equivalent hiermee,	$a = \alpha - 1, b = 0$;
(iii)	$a = 0, a = 2,$	deze oplossingen zijn echter strijdig;	
(iv)	$a = \alpha - b - 1, a = 2,$	of equivalent hiermee,	$a = 2, b = \alpha - 3$;

Merk op dat de oplossing in (ii) biologisch alleen relevant is voor $\alpha \geq 1$. Voor (iv) is dat alleen het geval voor $\alpha \geq 3$.
We gaan na of de evenwichten (i), (ii) en (iv) stabiel zijn. We bepalen eerst de Jacobi matrix in een punt $\mathbf{x}$ waarna we de evenwichten invullen:

$$\begin{bmatrix} \alpha - 2x - y & -x \\ \frac{1}{2}\, y & \frac{1}{2}\, x \end{bmatrix}.$$

In geval (i) is de Jacobi matrix ($x = a = 0, y = b = 0$)

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

met eigenwaarden α en 0. Blijkbaar is $(0, 0)$ een stabiel evenwicht als $|\alpha| < 1$. Omdat $\alpha \geq 0$ moet zijn (biologische restriktie) is de stabiliteitsvoorwaarde voor $(0, 0)$: $\alpha < 1$. Voor $\alpha > 1$

is $(0,0)$ instabiel.
In geval (ii) is de Jacobi matrix ($x = a = \alpha - 1$, $y = b = 0$)

$$\begin{bmatrix} 2-\alpha & 1-\alpha \\ 0 & \frac{1}{2}(\alpha-1) \end{bmatrix}.$$

Dit is een bovendriehoeks matrix en de eigenwaarden zijn dus gemakkelijk te bepalen (zie Stelling 2.4): $\lambda_1 = 2-\alpha$ en $\lambda_2 = \frac{1}{2}(\alpha-1)$. Het evenwicht $(\alpha, 0)$ is stabiel als $|2-\alpha| < 1$ en $|\frac{1}{2}(\alpha-1)| < 1$ of, equivalent hiermee (weer aannemende dat $\alpha \geq 0$), $1 < \alpha < 3$. Voor $\alpha < 1$ of $\alpha > 3$ is $(\alpha-1, 0)$ instabiel.
In geval (iv) is de Jacobi matrix

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ \frac{1}{2}(\alpha-3) & 1 \end{bmatrix}.$$

De eigenwaardenvergelijking is $\lambda^2 - (\alpha-4) = 0$ (gebruik bijvoorbeeld (2.3)). Blijkbaar is $|\lambda_1|^2 = |\lambda_2|^2 = |\alpha-4|$ en we hebben stabiliteit als $|a-4| < 1$, of, equivalent hiermee, $3 < \alpha < 5$. Voor $\alpha < 3$ of $\alpha > 5$ is $(2, \alpha-3)$ instabiel.

Konklusie.
$\underline{\alpha < 1}$. Er is in het biologisch interessante deel van $\mathbb{R}^2$ ($x \geq 0$ en $y \geq 0$) slechts een evenwicht, nl., $(0,0)$ en dat is stabiel: beide soorten sterven uit.
$\underline{1 < \alpha < 3}$. Er zijn, in het relevante vlak, twee evenwichten, het instabiele $(0,0)$ en het stabiele $(\alpha-1, 0)$: de wespen sterven uit, de grootte van de populatie rupsen is op den duur in evenwicht.
$\underline{3 < \alpha < 5}$. Er zijn drie evenwichten, die alle drie relevant zijn. Alleen het evenwicht $(2, \alpha-3)$ is stabiel: wespen en rupsen bestaan naast elkaar en de grootte van de populaties is op den duur in evenwicht.
$\underline{\alpha > 5}$. Er is geen stabiel evenwicht. De analyse techniek die we hier ontwikkeld hebben schiet te kort voor konklusies. Voor grotere α zien we (middels computer simulatie) bifurkaties en chaos (zie FIG. 9), verschijnselen die zich ook voordoen bij het Verhulst model met slechts één variabele (zie §1.3). De overeenkomst met de verschijnselen in het Verhulst model hoeven ons overigens niet te verbazen: bij de afwezigheid van wespen ($y_n = 0$) reduceert ons model (4.5) tot het Verhulst model.

Voorbeeld 4.6 Zij $\mathbf{A}$ een $m \times m$ matrix, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ en beschouw de lineaire inhomogene recursie

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{b}. \tag{4.20}$$

Stel dat $\mathbf{A}$ geen eigenwaarde 1 heeft. De vergelijking $\mathbf{a} = \mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{b}$ heeft dan de unieke oplossing

$$\mathbf{a} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}. \tag{4.21}$$

De Jacobi-matrix van $\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ is precies $\mathbf{A}$ (reken dit na voor het geval $\mathbf{A}$ een 2×2 matrix is) en dus is $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$ een stabiel evenwicht als alle eigenwaarden van $\mathbf{A}$ in absolute waarde kleiner dan 1 zijn.

Dit hadden we ook direkt kunnen zien.
Trek $\mathbf{a} = \mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{b}$ van (4.20) af. We vinden dan

$$\Delta\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{a} = \mathbf{A}(\mathbf{x}_n - \mathbf{a}) = \mathbf{A}(\Delta\mathbf{x}_n).$$

Als alle eigenwaarden van $\mathbf{A}$ kleiner dan 1 zijn, dan geldt dat $\mathbf{x}_n - \mathbf{a} \to \mathbf{0}$ als $n \to \infty$, met andere woorden $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$, onafhankelijk van de keuze van $\mathbf{x}_0$.

Voorbeeld 4.7 [Een economisch groei-model] We analyseren model (4.14). Dit model is equivalent met (4.16). Voor iedere vraag kunnen we dat model kiezen waarvoor de analyse het gemakkelijks lijkt. Model (4.16) is van het type als besproken in Voorbeeld 4.6. Er is dus maar een evenwicht en dat zouden we kunnen uitrekenen met matrix inversie (zie (4.21)). Het evenwicht rechtstreeks uit (4.14) lijkt gemakkelijker. Stel $Y_n = a$ voor alle n. Dan $a = (\kappa + d)a - da + C_0 + I_0$, dus

$$a = \frac{C_0 + I_0}{1 - \kappa}$$

en, omdat $x_n = Y_n = a$ en $y_n = Y_{n-1} = a$, is (a, a) het evenwicht voor (4.16). Merk op dat $a > 0$, we hadden immers verondersteld dat $0 < \kappa < 1$. Voor de analyse van de stabiliteit gebruiken we (4.16). De matrix $\mathbf{A}$ is precies de Jacobi matrix en de eigenwaarden bepalen de stabiliteit. De eigenwaardenvergelijking luidt (gebruik bijvoorbeeld (2.3))

$$\lambda^2 - (\kappa + d)\lambda + d = 0 \text{ met opl. } \lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}\left(\kappa + d \pm \sqrt{(\kappa + d)^2 - 4d}\right).$$

Als de oplossingen reeel zijn is $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$. Voor stabiliteit moet $\lambda_2 < 1$ zijn.
Er geldt $\quad \lambda_2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \kappa + d < 2$:
$\lambda_2 < 1$ impliceert $\kappa + d < 2$. Anderzijds, als $\kappa + d < 2$ dan: $\lambda_2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \kappa + d + \sqrt{(\kappa + d)^2 - 4d} < 2$ $\Leftrightarrow \quad \sqrt{(\kappa + d)^2 - 4d} < 2 - (\kappa + d) \quad \Leftrightarrow \quad (\kappa + d)^2 - 4d < 4 + (\kappa + d)^2 - 4(\kappa + d) \quad \Leftrightarrow \quad \kappa < 1$ en dat laatste hadden we verondersteld.
Als de oplossingen irreeel zijn dan is $\quad |\lambda_1| = |\lambda_2| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad d < 1$:
$\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ en $|\lambda_2|^2 = |\lambda_1|^2 = \lambda_1\bar{\lambda}_1 = \lambda_1\lambda_2 = d$.
Als $d < 1$ dan hebben we stabiliteit en als $d > 1$ instabiliteit in geval van irreële oplossingen. Als $d < 1$ dan is $\kappa + d < 2$, immers $\kappa < 1$, en hebben we ook stabiliteit in geval van reële oplossingen. Als $d > 1$ en de oplossingen zijn reeel dan $\kappa + d \geq \sqrt{4d} > 2$.

Konklusie. Als $d < 1$ dan is het evenwicht stabiel en voor $d > 1$ is het instabiel.

In Voorbeeld 4.4 waren we geïnteresseerd in de vraag naar schommelingen in de conjunctuur. Uit onze analyse blijkt dat het nationale inkomen Y_n op den duur in evenwicht a is als $d < 1$. In geval van irreeele eigenwaarden (dus als $(\kappa + d)^2 < 4d < 4$) loopt Y_n welliswaar schommelend naar het evenwicht (waarom?) maar de schommelingen dempen en dit kan niet de golven verklaren in de conjunctuur als bedoeld in Voorbeeld 4.4. Voor $d > 1$ is niet alleen het evenwicht instabiel maar zal $|Y_n - a|$ alsmaar groter worden, totdat het land bankroet is: $Y_n \leq 0$. Stelling 4.1 vertelt welliswaar alleen wat er in de buurt van het evenwicht gebeurt, maar voor deze inhomogene matrix recursie zijn er geen hogere orde termen in (4.18) en worden de effekten van storingen exact beschreven door de lineaire theorie ($\approx$ is nu = in (4.19)). Dus divergentie in geval een eigenwaarde in absolute waarde > 1. Het geval $d = 1$ beschrijft wel golven die niet uitdempen en die ook niet ontploffen. Het is echter zeer onrealistisch te veronderstellen dat een parameter waarde zo exact gelijk zou zijn aan een speciefieke waarde. We moeten konkluderen dat het model nog verder verfijnt moeten worden om het golfpatroon in de conjunctuur te kunnen verklaren. Het feit dat het model schommeling voorspelt is overigens wel bemoedigend.

Voorbeeld 4.8 Kies $\alpha > 0$ vast. Beschouw in $\mathbb{R}^2$ de recursie

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha y_n + x_n - x_n^2 \\ \alpha x_n + y_n - y_n^2 \end{bmatrix}$$

Eerst bepalen we de evenwichtspunten.
Deze volgen uit de vergelijkingen

$$a = \alpha b + a - a^2 \quad \text{en} \quad b = \alpha a + b - b^2.$$

Dus, $0 = \alpha b - a^2$ en $0 = \alpha a - b^2$ en hieruit vinden we de oplossingen $(0,0)$ en (α,α).

De Jacobi-matrix van onze funktie is

$$\begin{bmatrix} 1-2a & \alpha \\ \alpha & 1-2b \end{bmatrix}.$$

In het punt $(0,0)$ zijn de eigenwaarden $1 \pm \alpha$, dus $(0,0)$ is niet stabiel.
In het punt (α,α) zijn de eigenwaarden $1-\alpha$, $1-3\alpha$. Als $0 < \alpha < 2/3$ dan is (α,α) dus stabiel.

Het is duidelijk dat stabiliteit alleen iets zegt over het lokale gedrag rond de evenwichtspunten. Als x_0 en y_0 in ons voorbeeld erg groot zijn is het niet moeilijk in te zien dat de punten (x_n, y_n) naar $(-\infty,-\infty)$ divergeren. Voor welke punten (x_0, y_0) dit precies gebeurt is niet duidelijk, evenals de vraag voor welke startpunten er konvergentie naar een stabiel evenwicht optreedt. Voor dergelijke vragen over de recursie kunnen we tot op heden alleen experimenteel te werk gaan en de zaak op het computerscherm observeren.

Voorbeeld 4.9 We analyseren de evenwichten en hun stabiliteit van (4.6). We kunnen ons ook koncentreren op de equivalente companion formulering in (4.7).

Evenwichtspunten van deze recursie volgen uit de vergelijkingen $a = \kappa\, b(1-a)$ en $a = b$. De evenwichtspunten zijn $(0,0)$ en $(1-\frac{1}{\kappa}, 1-\frac{1}{\kappa})$. De Jacobi-matrix van de recursiefunktie is nu

$$\begin{bmatrix} \kappa\,(1-b) & -\kappa\, a \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

De eigenwaarden in $(0,0)$ zijn 0 en κ, de eigenwaarden in $(1-\frac{1}{\kappa}, 1-\frac{1}{\kappa})$ zijn $\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}-\kappa}$. Het is duidelijk dat $(0,0)$ stabiel is voor $\kappa < 1$ en na iets meer werk zien we dat $(1-\frac{1}{\kappa}, 1-\frac{1}{\kappa})$ stabiel is voor $1 < \kappa < 2$.

Voorbeeld 4.10 We kunnen een recursie van compleze getallen zien als een recursie in het platte vlak.

In dit voorbeeld zijn de z_n complexe getallen.

Voor een vast complex getal c bekijken we de recursie

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

of in reële koördinaten uitgeschreven

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + \alpha \\ y_{n+1} = y_n x_n + \beta. \end{cases} \quad \text{waarbij } z_n = x_n + iy_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix},\ c = \alpha + i\beta.$$

De evenwichtspunten zijn snel uitgerekend,

$$z_{eq} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - c}.$$

De Jacobiaan van $z^2 + c$ heeft twee geconjugeerde complexe eigenwaarden en hun absolute waarde is $|2z_{eq}| = |1 \pm \sqrt{1-4c}|$. Het is duidelijk dat niet beide evenwichtspunten stabiel kunnen zijn. We kunnen wel aangeven in welk bereik van c minstens één van de evenwichtspunten stabiel is. Dat is namelijk het binnengebied van de kromme $|1 \pm \sqrt{1-4c}| < 1$ in het complexe c-vlak. Nadere bestudering leert dat dit het binnengebied is van de hartkromme $r = \sin(\frac{\phi}{2})^2$ die met $\frac{1}{4}$ in de x-richting verschoven is.

Het punt ∞ kunnen we ook opvatten als een attractief punt. Als we z_0 namelijk groot ten opzichte van c kiezen dan is het duidelijk dat $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$. Het attractiegebied van ∞ blijkt een zeer spectaculaire structuur te hebben. Het bestaan van deze rijke structuur werd vermoed door de Fransman Gaston Julia in het begin van de 20er jaren, maar werd pas zichtbaar met de komst van het computerbeeldscherm.

4.4 Oefeningen

Oefening 4.1 [Tentamensom november 1995]

In een economisch model stelt, voor het jaar n, Y_n het nationaal inkomen voor, C_n de totale konsumptie en I_n het totaal aan investeringen. Het nationaal inkomen is de totale konsumptie plus het totaal aan investeringen: $Y_n = C_n + I_n$. We nemen aan dat de konsumptie lineair afhangt van het nationaal inkomen van het jaar ervoor, terwijl de investeringen lineair afhangen van de **groei** van het nationaal inkomen.

a. Laat zien dat, voor zekere positieve konstante k, C_0 en d, I_0, de volgende relatie de beschreven situatie weergeeft

$$Y_n = (k+d)\,Y_{n-1} - d\,Y_{n-2} + C_0 + I_0. \tag{4.22}$$

b. Ga na dat er een evenwichts waarde is voor het nationaal inkomen en bepaal deze waarde.

Neem verder voor $d = \frac{1}{2}$ en formuleer (4.22) in termen van $\mathbf{x}_n$ en $\mathbf{x}_{n-1}$ met

$$\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} Y_n \\ Y_{n-1} \end{bmatrix}.$$

c. Onderzoek de stabiliteit voor $0 < k < 1$ van de evenwichtswaarde.

d. Er is een k_0 zodat voor iedere k tussen 0 en k_0 het nationaal inkomen Y_n voor iedere beginwaarde Y_0 schommelt rond de evenwichtswaarde (het nationaal inkomen zal een aantal jaren meer zijn dan de evenwichtswaarde en een aantal jaren minder). Voor dezelfde k_0 en voor iedere k tussen k_0 en 1 hebben we de volgende situatie: afhankelijk van de beginwaarde stijgt het nationaal inkomen van jaar tot jaar óf daalt het. Bepaal deze k_0.

Oefening 4.2 Beschouw de niet-lineaire recursie

$$\begin{cases} x_{n+1} = (a - x_n - y_n)x_n \\ y_{n+1} = bx_ny_n \end{cases}$$

die voor bepaalde waarden van $a > 0$ en $b > 0$ een (naieve) modellering geeft van een rupssluipwesp populatie (zie college).

a. Bepaal voor willekeurige a, b de evenwichtspunten.

b. Stel $b = 1$. Bepaal voor welke waarden van a de evenwichtspunten stabiel zijn.

Oefening 4.3 [Tentamensom november 1996]

Voor zekere positieve konstanten α, β en γ, is de niet-lineaire recursie

$$\begin{cases} G_{n+1} = \alpha\, G_n e^{-\gamma P_n} \\ P_{n+1} = \beta\, G_n \left(1 - e^{-\gamma P_n}\right) \end{cases} \tag{4.23}$$

een klassieke beschrijven van een gastheer-parasiet model.

a. Interpreteer de term $e^{-\gamma P_n}$. Wat voor effect heeft deze term voor kleine P_n? Is dit redelijk? Wat is het effect voor grotere P_n?

b. Laat zien dat door herschaling van P_n en G_n dit model vereenvoudigd kan worden tot

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha\, x_n\, e^{-y_n} \\ y_{n+1} = x_n\,(1 - e^{-y_n}) \end{cases}$$

c. $(0,0)$ is een evenwichtspunt. Bepaal de aard van dit evenwicht.
In een natuurlijke situatie zal $\alpha > 1$ zijn. Waarom?

d. Naast $(0,0)$ is er nog een ander evenwicht. Bepaal dit (in termen van α en $\ln\alpha$). Laat zien dat een stabiliteitsanalyse op dit punt leidt tot de eigenwaardenvergelijking

$$\lambda^2 - \left(1 + \frac{\ln\alpha}{\alpha - 1}\right)\lambda + \frac{\alpha\,\ln\alpha}{\alpha - 1} = 0. \tag{4.24}$$

e. Voor $\alpha > 1$ is de konstante term in (4.24) groter dan 1; dit hoef je niet aan te tonen maar mag je wel gebruiken. Bepaal de stabiliteit van het niet-triviale evenwicht voor het geval $\alpha > 1$.
Denk je dat (4.23) een realistisch model is? Motiveer je antwoord.

Oefening 4.4 (Ontleend aan I.Hoveijn, Symplectic reversible maps, tiles and chaos, preprint 665, 1991, RUU Utrecht.) Beschouw de niet-lineaire recursie

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} + \sin u_n \begin{bmatrix} -\sin a \\ \cos a \end{bmatrix}.$$

a. Laat zien dat $(0,0)$ een evenwichtspunt is.

b. Geef de linearisatie van deze recursie rond het punt $(0,0)$. Bepaal de eigenwaarden van de bijbehorende matrix.

4.5 Computer-opdrachten

Aanwijzingen voor het gebruik van de computer

Start het programma `res` in het 'Natuurwetenschappen' menu. Je komt in het hoofdmenu van `res`. Opties in dit en alle volgende menu's kunnen geselecteerd worden door met de pijltjestoetsen ($\leftarrow$ en $\rightarrow$) door het menu te lopen en op de gewenste optie `enter` te geven. Met de optie `edit problem` kun je een stelsel vergelijkingen invoeren en tevens het startpunt en het aantal iteraties dat gewenst is. De vergelijkingen mogen parameters (van één letter) bevatten die in de optie `edit macros` waarden kunnen worden gegeven. Assen kunnen worden gespecificeerd onder `edit axes`. Je kunt een willekeurige functie van de variabelen, parameters en de tijdachtige variabele n (de orde van de iteratie) uitzetten. Er kunnen twee diagrammen tegelijkertijd op het scherm worden afgebeeld. Om vergelijkingen, parameters, etc. te veranderen moeten deze eerst geselecteerd worden. Veranderingen moeten worden afgesloten met `enter`. De berekeningen worden gestart door in het hoofdmenu `solve problem` te selecteren en kunnen worden gestopt met `enter`.

Oefening 4.5 [Lineaire recursie]

Beschouw de lineaire recursie

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n$$

met

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.75 & -0.1 \\ 0.1 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van $\mathbf{A}$. (*)

b. Onderzoek met `res` het gedrag van de recursie voor verschillende startpunten $\mathbf{x}$. Verklaar wat je ziet.

We nemen nu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} b & -0.2 \\ 0.2 & b \end{pmatrix}$$

waarin b een parameter is.

c. Bepaal voor alle b de eigenwaarden van $\mathbf{A}$. (*) Voor welke waarden van b is de oorsprong een stabiel evenwicht ? (*)

d. Onderzoek voor verschillende waarden van b het gedrag van de recursie. Kies b in de buurt van de 1 en varieer met kleine stapjes. Wat gebeurt er bij de grenswaarde voor b waar de stabiliteit van de oorsprong verandert ?

Oefening 4.6 [Meer niet-lineaire recursies]

Beschouw de niet-lineaire recursie

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} + \sin u_n \begin{bmatrix} -\sin a \\ \cos a \end{bmatrix}.$$

a. Laat zien dat de oorsprong een evenwichtspunt is. (*)

b. Geef de linearisatie van deze recursie rond de oorsprong en bepaal voor alle a of dit punt stabiel is. (*)

We onderzoeken dit systeem met behulp van het programma `res`. Voer bovenstaande vergelijkingen in met a als parameter. Laat de waarden van de assen lopen van -10 tot 10.

c. Neem $a = 3\pi/10$. Probeer een goed beeld te krijgen van de banen in het vlak door verschillende verspreid liggende startwaarden te kiezen (bijvoorbeeld een rij punten met onderling gelijke afstand op de horizontale as).

d. Zelfde opgave voor $a = 7\pi/10$.

e. Zelfde opgave voor $a = 9\pi/10$. Wat is er met het punt $(0, 0)$ gebeurd?

f. Onderzoek de recursie voor $a = \pi/2$. Neem ondermeer $(3, 0)$ als startpunt. Kun je een baan met periode vier aangeven?

Oefening 4.7 [Een rups-sluipwesp model]

Beschouw de niet-lineaire recursie

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (a - x_n - y_n)x_n \\ y_{n+1} &= bx_n y_n \end{aligned}$$

die voor bepaalde waarden van a en b een modellering geeft van een rups-sluipwesp populatie.

a. Bepaal voor alle $a > 0$ en $b > 0$ de evenwichtspunten. (*)

Uit bovenstaande theorie-opgaven blijkt dat $(1/b, a - 1/b - 1)$ een evenwichtspunt is.

b. Stel $b = 1$. Bepaal voor welke waarden van a dit evenwichtspunt stabiel is. Doe dit voor je verdergaat met opgave (c).

We gaan deze recursie onderzoeken met behulp van het programma `res`. Start het programma en voer bovenstaande vergelijkingen in met a en b als parameter. Neem voor de assen de waarden tussen 0 en 3.

Uit bovenstaande theorie-opgaven blijkt dat $(1/b, a - 1/b - 1)$ voor $a = 2.9$, $b = 1$ een stabiel evenwicht is.

c. Controleer deze stabiliteit met `res` door naburige punten als startpunt te kiezen. Wat kun je, aan de had van de plaatjes, zeggen over de eigenwaarden die bij dit evenwicht horen?

d. Onderzoek wat er gebeurt als we a in kleine stappen van bijv. 1/10 laten toenemen. Is bovengenoemd evenwichtspunt nog steeds stabiel? Bekijk ook enkele waarden van a kleiner dan 2.9.

e. Dezelfde vraag als boven, maar dan met $b = 1.2$