Opgave 1.1.1.

We schrijven nu de fout die gemaakt wordt bij lineare interpolatie als volgt:

$$f(x) - p(x) = (q + r(x-a))(x-c)(x-d). \tag{1}$$

Analoog aan het bewijs van Stelling 1.1.1. beschouwen we de vaste functie

$$\varphi : t \mapsto f(t) - p(t) - (q + r(t-a))(t-c)(t-d).$$

We passen nu driemaal de stelling van Rolle toe. Doordat $\varphi(c) = \varphi(d) = \varphi(x) = 0$ zijn er minstens twee verschillende punten y en z in $]c, d, x[$ zodat $\varphi'(y) = \varphi'(z) = 0$. Daarnaast is er volgens Rolle een $\xi \in]y, z[$, of met andere woorden een $\xi \in]c, d, x[$, zodat $\varphi''(\xi) = 0$. Aangezien ook geldt dat $\varphi''(a) = 0$ is er volgens Rolle een $\eta \in]a, c, d, x[$ zodat $\varphi'''(\eta) = 0$.

Bedenk nu dat

$$\varphi''(t) = f''(t) - 2q - r(6t - 2(a + c + d)) \tag{2}$$

en dat

$$\varphi'''(t) = f'''(t) - 6r. \tag{3}$$

We vullen nu $\varphi'''(\eta) = 0$ in in Vergelijking (3), daarmee verkrijgen we een uitdrukking voor r:

$$r = \frac{1}{6} f'''(\eta).$$

Als we vervolgens $\varphi''(a) = 0$ en de uitdrukking voor r invullen in Vergelijking (2) vinden we ook een uitdrukking voor q:

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{2} f''(a) - \frac{1}{2} \frac{f'''(\eta)}{6} (6a - 2(a + c + d)) \\ &= \frac{1}{2} \left(f''(a) - \frac{f'''(\eta)}{3} (2a - c - d) \right). \end{aligned}$$

We vullen nu de gevonden uitdrukkingen voor q en r in in Vergelijking (1) en daarmee vinden we de gevraagde uitdrukking voor de fout bij lineaire interpolatie:

$$\begin{aligned} f(x) - p(x) &= \left(\frac{1}{2} \left(f''(a) - \frac{f'''(\eta)}{3} (2a - c - d) \right) + \frac{f'''(\eta)}{6} (x - a) \right) (x-c)(x-d) \\ &= \frac{1}{2} (x-c)(x-d) \left(f''(a) + \left(\frac{x + c + d}{3} - a \right) f'''(\eta) \right). \end{aligned}$$