

Tentamen maandag 3 november 2008, Vraag 3

(a)

De fout in de gerepeteerde trapeziumregel wordt gegeven door (Stelling 4.1.1):

$$R(h) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi).$$

Dat wil dus zeggen dat de fout kwadratisch afneemt met h . We kunnen als volgt laten zien dat de fout vier keer zo klein wordt bij het halveren van h :

$$R\left(\frac{h}{2}\right) = -\frac{b-a}{12}\left(\frac{h}{2}\right)^2 f''(\xi) = -\frac{b-a}{12}\frac{1}{4}h^2 f''(\xi).$$

We zien dat $R\left(\frac{h}{2}\right)$ vier keer zo klein is als $R(h)$.

Als de fout bij het halveren van h inderdaad vier keer zo klein wordt, dan moet voor de waarden in de tabel het volgende gelden:

$$\frac{T_h(f) - T_{h/2}(f)}{T_{h/2}(f) - T_{h/4}(f)} \approx 4.$$

Laten we dat eens nagaan voor de waarden in de tabel. We krijgen dan de volgende verhoudingen:

$$\begin{aligned} \frac{T_h(f) - T_{h/2}(f)}{T_{h/2}(f) - T_{h/4}(f)} &= 2.8930 \\ &2.8747 \\ &2.8615 \end{aligned}$$

We zien dat de verhoudingen geen van allen in de buurt komen van 4, waardoor we dus zeker weten dat de fout in ieder geval niet kwadratisch afneemt met h . Om hiervoor een verklaring te geven, gaan we eens goed kijken naar de restterm. We zien dat daarin de tweede afgeleide van f voorkomt. Deze tweede afgeleide is gelijk aan:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\pi}{\sqrt{x}} \cos(\pi x) - \frac{1}{2x\sqrt{x}} \sin(\pi x) \\ f''(x) &= -\frac{\pi^2}{\sqrt{x}} \sin(\pi x) - \frac{\pi}{x\sqrt{x}} \cos(\pi x) + \frac{3}{4x^2\sqrt{x}} \sin(\pi x). \end{aligned}$$

In iedere term van de tweede afgeleide delen we door een macht van x . Hoe kleiner h wordt, des te kleiner de ξ in het eerste interval $[0, h]$ wordt, en dus hoe groter de tweede afgeleide wordt. Deze tweede afgeleide "verpest" dus de kwadratische convergentie en zorgt ervoor dat de fout minder snel afneemt bij kleiner wordende h .

(b)

De wortel onder de breukstreep is de term die de foutreductie slecht maakt. We moeten dus proberen de wortel weg te werken. Dit kunnen we doen door een nieuwe variabele in het leven te roepen: $y^2 = x$. We zien dat het probleem nu verholpen is als we f gaan integreren:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(\pi x) dx = \int_0^1 \frac{1}{y} \sin(\pi y^2) 2y dy = \int_0^1 2 \sin(\pi y^2) dy.$$

Bij het integreren van deze functie voorzien we geen problemen: de eerste en tweede afgeleiden bevatten geen singulariteiten op het interval $[0, 1]$.

(c)

In (a) hebben we gezien dat de factor $\frac{T_h(f) - T_{h/2}(f)}{T_{h/2}(f) - T_{h/4}(f)}$ voor alle waarden in de tabel constant is, de factor is namelijk steeds ongeveer gelijk aan 2.88. Dat wil zeggen dat de fout steeds met een constante macht afneemt, iedere keer dat we h halveren. Deze macht is onafhankelijk van h omdat de factor steeds hetzelfde is. Met andere woorden, de foutreductie past inderdaad bij een fout van de vorm ch^α .

Dan komen we nu bij de vraag hoe we α kunnen bepalen. De fout is van de vorm ch^α ; als we h halveren is de fout dus van de vorm: $c\left(\frac{h}{2}\right)^\alpha = c\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha h^\alpha$. Omdat de fout iedere keer met een factor 2.88 afneemt, moeten we de volgende vergelijking oplossen om een waarde voor α te vinden:

$$2^\alpha = 2.88 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{\log(2.88)}{\log(2)} \approx 1.5$$

We schatten nu de fout in het beste resultaat met de volgende formule:

$$I - T_{h/2} = \frac{T_{h/2} - T_h}{2^\alpha - 1} \approx -5.8011618 \cdot 10^{-5}.$$

Met behulp van deze fout kunnen we nu de schatting verbeteren:

$$I \approx T_{h/2} + \text{fout} = 1.009593804974.$$

(d)

Voor kleine x geldt dat we $\sin(\pi x)$ kunnen benaderen met πx , dat wil zeggen dat we $f(x)$ kunnen benaderen met $\frac{1}{\sqrt{x}}\pi x = \pi\sqrt{x}$. Op het interval $[0, h]$ geldt dat x klein is en dat we dus deze benadering kunnen gebruiken.

We berekenen nu de fout in de trapeziumregel op het interval $[0, h]$. Dit doen we door de exacte integraal en de benadering door de trapeziumregel van elkaar af te trekken:

$$\begin{aligned} \text{fout}_{[0,h]} &= \int_0^h \pi\sqrt{x} dx - \frac{h-0}{2} (\pi\sqrt{h} - \pi\sqrt{0}) \\ &= \frac{2}{3}\pi h\sqrt{h} - \frac{1}{2}\pi h\sqrt{h} \\ &= \frac{1}{6}\pi h\sqrt{h} \end{aligned}$$

Om de fout op het interval $[h, 1]$ uit te rekenen gebruiken we de volgende uitdrukking voor de fout:

$$R(h) = -\frac{1}{12}h^2 (f'(b) - f'(a)) + o(h^2),$$

deze uitdrukking is terug te vinden in het diktaat aan het begin van **4.2A**. In ons geval geldt dat $b = 1$ en $a = h$. Om de afgeleide in het punt $x = 1$ te bepalen, gebruiken we weer de gewone functie $f(x)$ omdat x in dit geval niet meer klein is. In het punt $x = h$ is x echter nog wel klein en gebruiken we de vereenvoudigde $f(x)$.

$$\text{fout}_{[h,1]} = -\frac{1}{12}h^2 \left(-\pi - \frac{\pi}{2\sqrt{h}} \right) = \frac{1}{12}\pi h^2 + \frac{1}{24}\pi h\sqrt{h}.$$

We tellen nu de fouten in beide intervallen bij elkaar op, waarmee we op een uitdrukking voor de totale fout komen.

$$\text{fout}_{[0,1]} = \frac{5}{24}\pi h\sqrt{h} + \frac{1}{12}\pi h^2.$$

De term met h^2 gaat sneller naar 0 dan de term met $h^{3/2}$, het gedrag van de fout wordt dus voornamelijk bepaald door de term $h^{3/2}$. We zien dus dat de fout inderdaad evenredig is met h^α , voor de waarde van α die we in onderdeel (c) hebben gevonden.