Vraagstuk 26

a)

We verwachten dat de grootheid

$$Q = \frac{T(2h) - T(h)}{T(h) - T(\frac{h}{2})}$$

voor de eerste kolom ongeveer gelijk is aan 2^p, waarbij de fout in de benaderingswaarden evenredig is met h^p. Als de fout in de benaderingswaarden bijvoorbeeld evenredig is met h^2, dan verwachten we dat Q ongeveer gelijk is aan vier.

Als een rij van benaderingswaarden opgesteld is met een halveringsrij, wordt bij ieder stapje de waarde van h gehalveerd. Stel dat we voor drie opeenvolgende benaderingswaarden x_1, x_2, x_3 het quotiënt $\frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_3}$ uit zouden rekenen, dan zou dit quotiënt ongeveer gelijk moeten zijn aan een macht van 2.

Als een rij benaderingswaarden echter opgesteld is met een Bulirsch rij en we zouden op dezelfde manier de quotiënten $\frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_3}$ uitrekenen, zouden we twee verschillende verhoudingen krijgen. Dit komt doordat bij een Bulirsch rij h verkleind wordt door h afwisselend te vermenigvuldigen met $\frac{2}{3}$ en $\frac{3}{4}$.

b)

Van de eerste kolom rekenen we de hierboven genoemde quotiënten uit.

$$\frac{x_i - x_{i+1}}{x_{i+1} - x_{i+2}} =$$

$$\begin{array}{c} 2.546651 \\ 2.301788 \\ 2.116495 \\ 2.034762 \\ 2.009434 \end{array}$$

We zien dat het quotiënt $\frac{x_i - x_{i+1}}{x_{i+1} - x_{i+2}}$ heel mooi naar 2 gaat, op basis hiervan kunnen we zeggen dat het Rombergschema waarschijnlijk gebaseerd is op een halveringsrij en dat de fout evenredig is met h. Als het schema gebaseerd zou zijn op een Bulirsch rij hadden we twee verschillende getallen moeten zien in het rijtje met verhoudingen.