Vraagstuk 9

a)

Het interpolatiepolynoom $p_{n-1}(x)$ is in alle steunpunten $x_0, \ldots x_{n-1}$ gelijk aan de functiewaarde van $f(x)$ in die punten, dus met andere woorden, $p_{n-1}(x_i) = f(x_i)$ voor $0 \leq i \leq n-1$. We willen nu aan dit polynoom een extra steunpunt toevoegen, steunpunt x_n. Na het toevoegen van dit steunpunt moet het polynoom nog steeds door alle vorige steunpunten gaan én door het nieuwe steunpunt.

Door nu het n-de steunpunt toe te voegen zoals beschreven in Vergelijking (3) in het diktaat, gebeurt dit inderdaad. De termen $(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$ zorgen ervoor dat de nieuwe term die we toevoegen aan het polynoom gelijk aan nul is in alle vorige steunpunten, zodat het polynoom $p_n(x)$ nog steeds door deze steunpunten gaat. Daarnaast kunnen we de constante a_n zó kiezen, dat $p_n(x_n) = f(x_n)$.

b)

We voegen eerst het punt x_0 toe aan het interpolatiepolynoom q. Dit doen we door Vergelijking (3) uit het diktaat toe te passen:

$$q_1(x) = q(x) + f[x_0, \ldots, x_{n-1}](x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}).$$

Vervolgens voegen we op dezelfde manier x_n toe:

$$p_n(x) = q(x) + f[x_0, \ldots, x_{n-1}](x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) + f[x_0, \ldots, x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1}).$$

Nu voegen we de steunpunten in omgekeerde volgorde toe. Daarmee verkrijgen we het volgende:

$$\begin{aligned} q_2(x) &= q(x) + f[x_1, \ldots, x_n](x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \\ p_n(x) &= q(x) + f[x_1, \ldots, x_n](x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) + f[x_0, \ldots, x_n](x-x_1)\cdots(x-x_n). \end{aligned}$$

We trekken de twee gevonden uitdrukkingen voor $p_n(x)$ van elkaar af, daarmee vallen de termen $p_n(x)$ en $q(x)$ tegen elkaar weg en kunnen we een uitdrukking vinden voor $f[x_0, \ldots x_n]$.

$$\begin{aligned} &f[x_0, \ldots, x_n]\left[(x-x_1)\cdots(x-x_n) - (x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})\right] = \\ &\qquad\qquad (x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\left(f[x_0, \ldots, x_{n-1}] - f[x_1, \ldots, x_n]\right). \end{aligned}$$

We delen beide kanten van de vergelijking door $(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$:

$$\begin{aligned} f[x_0, \ldots, x_n]\left(x - x_n - (x-x_0)\right) &= f[x_0, \ldots, x_{n-1}] - f[x_1, \ldots, x_n], \\ f[x_0, \ldots, x_n] &= \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}. \end{aligned}$$

c)

Het nuldegraads interpolatiepolynoom p_0 is gelijk aan de functiewaarde in het steunpunt x_0:

$$p_0(x) = f(x_0) = 1.$$

Om nu $p_1(x)$ te bepalen rekenen we eerst $f[x_0, x_1]$ uit:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{3-1}{1-0} = 2.$$

Nu berekenen we met behulp van Vergelijking (3) $p_1(x)$:

$$p_1(x) = 1 + 2(x-0) = 1 + 2x.$$

We bepalen eerst $f[x_0, x_1, x_2]$ om $p_2(x)$ te bepalen:

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} - f[x_0, x_1]\right) \\ &= -\frac{3}{2}, \end{aligned}$$

$p_2(x)$ is nu gelijk aan:

$$p_2(x) = 1 + 2x - \frac{3}{2}(x-0)(x-1) = 1 + \frac{7}{2}x - \frac{3}{2}x^2$$

We kunnen nagaan dat de drie gevonden polynomen de juiste polynomen zijn door de steunpunten in te vullen en te controleren of de polynomen inderdaad door de bijbehorende functiewaarden gaan.

d)

We weten dat $f(x_n) = p(x_n)$, dus:

$$\begin{aligned} f(x_n) - p_{n-1}(x_n) &= p_n(x_n) - p_{n-1}(x_n) \\ &= f[x_0, \ldots, x_n](x_n - x_0) \cdots (x_n - x_{n-1}). \end{aligned} \tag{1}$$

Verder geldt volgens Stelling 1.2.1. dat voor het interpolatiepolynoom $p(x)$ geldt dat:

$$f(x) - p(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

met $\xi \in]x_0, \ldots, x_n, x[$. Deze stelling passen we nu toe op onze situatie:

$$f(x_n) - p_{n-1}(x_n) = (x_n - x_0) \cdots (x_n - x_{n-1}) \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \tag{2}$$

met $\xi \in]x_0, \ldots, x_n[$. We stellen nu beide rechterkanten van Vergelijking (1) en (2) gelijk aan elkaar en daarmee verkrijgen we de gevraagde uitdrukking:

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \qquad \xi \in]x_0, \ldots, x_n[.$$

e)

Stel dat we volgens Vergelijking (3) uit het diktaat een steunpunt aan het polynoom p_{n-1} willen toevoegen. De term die we toevoegen is dan gelijk aan:

$$\begin{aligned} p_n(x) - p_{n-1}(x) &= f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \\ &= (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \frac{f^{(n)}(\xi_1)}{n!} \qquad \xi_1 \in]x_0, \ldots x_n[. \end{aligned}$$

We vergelijken nu deze term met de fout in het interpolatiepolynoom p_{n-1}:

$$f(x) - p_{n-1}(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \frac{f^{(n)}(\xi_2)}{n!} \qquad \xi_2 \in]x_0, \ldots x_n[.$$

Het valt direct op dat beide termen wel erg veel op elkaar lijken. Wanneer we een nieuw steunpunt aan het interpolatiepolynoom toevoegen, voegen we eigenlijk een schatting voor de fout in het interpolatiepolynoom toe. Dat betekent dat we kunnen stoppen met nieuwe steunpunten toevoegen, zodra de term die we aan het polynoom willen toevoegen kleiner is dan de opgegeven tolerantie. De fout ligt dan namelijk ook beneden die tolerantie.