

Utrecht, 27 september 2011

# Numerieke Wiskunde

Gerard Sleijpen



**Universiteit Utrecht**  
*Department of Mathematics*

<http://www.staff.science.uu.nl/~sleij101/>

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

Benader  $f$  door 'eenvoudige' functies

### Voorbeelden eenvoudige functies.

1. **Polynomen** (lineaire combinaties van  $x^k$ ).
2. Stukken Fourier reeks (lin. comb.  $\sin(2\pi kx)$ ,  $\cos(2\pi kx)$ )
3. Splines (gladde stuksgewijs polynomen)
4. ...  $\ln(x)p(x)$ ,  $p$  polynoom
5. Rationale functies  $\frac{p(x)}{q(x)}$  met  $p, q$  polynomen
6. Bessel functies, ...

### Eigenschappen eenvoudige functies.

1. Efficiënt te evalueren
2. Efficiënt op te slaan ( $\rightsquigarrow$  compressie)
3. Gemakkelijk mee te manipuleren ( $p'$ ,  $\int p$ , ...) — basis voor algorithmes voor ingewikkeldere problemen — te gebruiken in analyse

$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_k x^k$  **polynoom** graad  $\leq k$ .

**Evaluatie: schema van Horner.** Evalueer  $p$  in  $x$  volgens

$$\begin{aligned} S_0 &= \alpha_k, \\ \text{voor } j &= 1, 2, \dots, k \\ S_j &= \alpha_{k-j} + S_{j-1} * x \end{aligned}$$

Kost  $2k$  flop (**f**loating **p**oint operaties):  $k*$  en  $k+$ .

**Vb.**  $p(x) = 3 + 2x + 7x^2 + 4x^3$ :

Horner:  $p(x) = 3 + (2 + (7 + 4x)x)x$

Variant:

$p(x) = 3 + 2(x - 1) + 7(x - 1)(x - \pi) + 9(x - 1)(x - \pi)x$

Horner:  $p(x) = 3 + (2 + (7 + 9x)(x - \pi))(x - 1)$

# Interpolatie

$(x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$  rij in  $[a, b]$ .

**Terminologie.**  $p = f$  op  $(x_0, \dots, x_k)$

als voor  $i = 0, \dots, k$

$$p(x_i) = f(x_i),$$

$$p'(x_i) = f'(x_i) \text{ als } x_{i-1} = x_i$$

$$p''(x_i) = f''(x_i) \text{ als } x_{i-2} = x_{i-1} = x_i$$

...

**Voorbeeld.**  $p = f$  op  $(\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 1)$  als

$$p(0) = f(0), p'(0) = f'(0), p''(0) = f''(0),$$

$$p(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}), p(1) = f(1).$$

**Definitie.** Een polynoom  $p$  **interpoleert**  $f$  **op**  $(x_0, \dots, x_k)$

als  $\text{graad}(p) \leq k$  en  $p = f$  op  $(x_0, \dots, x_k)$ .

# Interpolatie

$(x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$  rij in  $[a, b]$ .

**Stelling.** Er bestaat precies een pol.  $p$  van gr.  $\leq k$  zodat

$$p = f \text{ op } (x_0, x_1, \dots, x_k)$$

Als  $f$   $k + 1$  maal continu differentieerbaar is op  $[a, b]$  dan

$$f(x) - p(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_k)}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi)$$

voor zekere  $\xi$  tussen  $x_0, x_1, \dots, x_k$  en  $x$ .

# Interpolatie

$(x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$  rij in  $[a, b]$ .

**Stelling.** Er bestaat precies een pol.  $p$  van gr.  $\leq k$  zodat

$$p = f \text{ op } (x_0, x_1, \dots, x_k)$$

Als  $f$   $k + 1$  maal continu differentieerbaar is op  $[a, b]$  dan

$$f(x) - p(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_k)}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi)$$

voor zekere  $\xi$  tussen  $x_0, x_1, \dots, x_k$  en  $x$ .

**Voorbeeld.**  $x_0 = x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$ :

$p$  is het **Taylor** pol.  $f(0) + xf'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)$ .

$$f(x) - p(x) = \frac{x^{n+1}}{(k+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

# Interpolatie

$(x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$  rij in  $[a, b]$ .

**Stelling.** Er bestaat precies een pol.  $p$  van gr.  $\leq k$  zodat

$$p = f \text{ op } (x_0, x_1, \dots, x_k)$$

Als  $f$   $k + 1$  maal continu differentieerbaar is op  $[a, b]$  dan

$$f(x) - p(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_k)}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi)$$

voor zekere  $\xi$  tussen  $x_0, x_1, \dots, x_k$  en  $x$ .

**Voorbeeld.**  $x_0 = x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$ :

$p$  is het **Taylor** pol.  $f(0) + xf'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)$ .

$$f(x) - p(x) = \frac{x^{n+1}}{(k+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

**Lagrange:**  $x_i \neq x_j$  als  $i \neq j$

# Interpolatie

$(x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$  rij in  $[a, b]$ .

**Stelling.** Er bestaat precies een pol.  $p$  van gr.  $\leq k$  zodat

$$p = f \text{ op } (x_0, x_1, \dots, x_k)$$

Als  $f$   $k + 1$  maal continu differentieerbaar is op  $[a, b]$  dan

$$f(x) - p(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_k)}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi)$$

voor zekere  $\xi$  tussen  $x_0, x_1, \dots, x_k$  en  $x$ .

**Voorbeeld.**  $x_0 = x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$ :

$p$  is het **Taylor** pol.  $f(0) + xf'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)$ .

$$f(x) - p(x) = \frac{x^{n+1}}{(k+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

**Lagrange:**  $x_i \neq x_j$  als  $i \neq j$

**Hermite:** iedere  $i$ , er is precies een  $j \neq i$  met  $x_i = x_j$ .

# Interpolatie

$(x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$  rij in  $[a, b]$ .

**Stelling.** Er bestaat precies een pol.  $p$  van gr.  $\leq k$  zodat

$$p = f \text{ op } (x_0, x_1, \dots, x_k)$$

Als  $f$   $k + 1$  maal continu differentieerbaar is op  $[a, b]$  dan

$$f(x) - p(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_k)}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi)$$

voor zekere  $\xi$  tussen  $x_0, x_1, \dots, x_k$  en  $x$ .

Bewijs. **Bestaan** in geval  $x_i \neq x_j$  als  $i \neq j$  (inductie):

$$p_{k-1} = f \text{ op } (x_0, \dots, x_{k-1}) \text{ graad}(p_{k-1}) \leq k - 1.$$

$$p(x) \equiv p_k(x) \equiv p_{k-1}(x) + \alpha(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})$$

Dan  $p = f$  op  $(x_0, \dots, x_{k-1})$ .

Pas  $\alpha$  aan zodat  $f(x_k) = p(x_k)$ .

# Interpolatie

$(x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$  rij in  $[a, b]$ .

**Stelling.** Er bestaat precies een pol.  $p$  van gr.  $\leq k$  zodat

$$p = f \text{ op } (x_0, x_1, \dots, x_k)$$

Als  $f$   $k + 1$  maal continu differentieerbaar is op  $[a, b]$  dan

$$f(x) - p(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_k)}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi)$$

voor zekere  $\xi$  tussen  $x_0, x_1, \dots, x_k$  en  $x$ .

Bewijs. **Uniciteit:**

Als  $p = q$  op  $(x_0, \dots, x_k)$  and  $p, q$  pol. graad  $\leq k$

dan  $p - q = 0$  op  $(x_0, \dots, x_k)$ .

Hoofdstelling Algebra:

$$p(x) - q(x) = \beta(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_k)$$

Omdat  $p - q$  graad  $\leq k$  moet  $\beta = 0$ .

# Interpolatie

$(x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$  rij in  $[a, b]$ .

**Stelling.** Er bestaat precies een pol.  $p$  van gr.  $\leq k$  zodat

$$p = f \text{ op } (x_0, x_1, \dots, x_k)$$

Als  $f$   $k + 1$  maal continu differentieerbaar is op  $[a, b]$  dan

$$f(x) - p(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_k)}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi)$$

voor zekere  $\xi$  tussen  $x_0, x_1, \dots, x_k$  en  $x$ .

Bewijs. **Foutvoorstelling:**  $p = f$  op  $(x_0, \dots, x_k)$ .

$$p(x) = p_{k-1}(x) + \alpha(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})$$

$k$  maal Rolle:

$$(f - p)^{(k)}(\xi) = 0 \text{ zekere } \xi \text{ tussen } x_0, x_1, \dots, x_k.$$

$$(f - p)^{(k)}(\xi) = f^{(k)}(\xi) - \alpha k!.$$

Dus

$$\alpha = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

# Interpolatie

$(x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$  rij in  $[a, b]$ .

**Stelling.** Er bestaat precies een pol.  $p$  van gr.  $\leq k$  zodat

$$p = f \text{ op } (x_0, x_1, \dots, x_k)$$

Als  $f$   $k + 1$  maal continu differentieerbaar is op  $[a, b]$  dan

$$f(x) - p(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_k)}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi)$$

voor zekere  $\xi$  tussen  $x_0, x_1, \dots, x_k$  en  $x$ .

Bewijs. **Foutvoorstelling:**  $p = f$  op  $(x_0, \dots, x_k)$ .

$$p(x) = p_{k-1}(x) + \alpha(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})$$

$k$  maal Rolle:

$$(f - p)^{(k)}(\xi) = 0 \text{ zekere } \xi \text{ tussen } x_0, x_1, \dots, x_k.$$

$$(f - p)^{(k)}(\xi) = f^{(k)}(\xi) - \alpha k!.$$

$$\text{Dus } f(x_k) - p_{k-1}(x_k) = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} (x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})$$

# Interpolatie

$(x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$  rij in  $[a, b]$ .

**Stelling.** Er bestaat precies een pol.  $p$  van gr.  $\leq k$  zodat

$$p = f \text{ op } (x_0, x_1, \dots, x_k)$$

Als  $f$   $k + 1$  maal continu differentieerbaar is op  $[a, b]$  dan

$$f(x) - p(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_k)}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi)$$

voor zekere  $\xi$  tussen  $x_0, x_1, \dots, x_k$  en  $x$ .

Bewijs. **Foutvoorstelling:**  $p = f$  op  $(x_0, \dots, x_k)$ .

$$p(x) = p_{k-1}(x) + \alpha(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})$$

$k$  maal Rolle:

$$f(x_k) - p_{k-1}(x_k) = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} (x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})$$

$$f(y) - p_{k-1}(y) = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} (y - x_0) \dots (y - x_{k-1})$$

ook goed voor  $k$  ipv  $k - 1$  en  $x$  ipv  $y$ .

# Interpolatie

$(x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$  rij in  $[a, b]$ .

**Stelling.** Er bestaat precies een pol.  $p$  van gr.  $\leq k$  zodat

$$p = f \text{ op } (x_0, x_1, \dots, x_k)$$

Als  $f$   $k + 1$  maal continu differentieerbaar is op  $[a, b]$  dan

$$f(x) - p(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_k)}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi)$$

voor zekere  $\xi$  tussen  $x_0, x_1, \dots, x_k$  en  $x$ .

**Notatie.** Laat  $\alpha = f[x_0, \dots, x_k]$  de leidende coëfficiënt zijn van het het interpolatie polynoom  $p$  voor  $f$  op  $(x_0, x_1, \dots, x_k)$ .

**Stelling.**  $f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$ .

$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\xi)$  voor zekere  $\xi$  tussen  $x_0, \dots, x_k$ .

# Interpolatie

$(x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$  rij in  $[a, b]$ .

**Stelling.** Er bestaat precies een pol.  $p$  van gr.  $\leq k$  zodat

$$p = f \text{ op } (x_0, x_1, \dots, x_k)$$

Als  $f$   $k + 1$  maal continu differentieerbaar is op  $[a, b]$  dan

$$f(x) - p(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_k)}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi)$$

voor zekere  $\xi$  tussen  $x_0, x_1, \dots, x_k$  en  $x$ .

**Notatie.** Laat  $\alpha = f[x_0, \dots, x_k]$  de leidende coëfficiënt zijn van het het interpolatie polynoom  $p$  voor  $f$  op  $(x_0, x_1, \dots, x_k)$ .

**Stelling.**  $f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$ .

$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\xi)$  voor zekere  $\xi$  tussen  $x_0, \dots, x_k$ .

**Voorbeeld.**  $f[x_0, x_0, x_0, x_0] = \frac{1}{3!} f^{(3)}(x_0)$

# Interpolatie

$(x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$  rij in  $[a, b]$ .

**Stelling.** Er bestaat precies een pol.  $p$  van gr.  $\leq k$  zodat

$$p = f \text{ op } (x_0, x_1, \dots, x_k)$$

Als  $f$   $k + 1$  maal continu differentieerbaar is op  $[a, b]$  dan

$$f(x) - p(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_k)}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi)$$

voor zekere  $\xi$  tussen  $x_0, x_1, \dots, x_k$  en  $x$ .

**Opmerking.** De grootheid

$$\frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}$$

in de foutvoorstelling kan geschat worden door

$$f[y_0, y_1, \dots, y_{k+1}] \text{ voor } y_j = x_{j+i_0}$$

voor verschillende  $i_0$  (bv,  $i_0 = -2, -1, 0, +1$ ).

# Interpolatie

$(x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$  rij in  $[a, b]$ .

**Stelling.** Er bestaat precies een pol.  $p$  van gr.  $\leq k$  zodat

$$p = f \text{ op } (x_0, x_1, \dots, x_k)$$

Als  $f$   $k + 1$  maal continu differentieerbaar is op  $[a, b]$  dan

$$f(x) - p(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_k)}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi)$$

voor zekere  $\xi$  tussen  $x_0, x_1, \dots, x_k$  en  $x$ .

**Evaluatie.**  $p(x) = p_{k-1}(x) + \alpha(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})$

$$\alpha = f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

# Evaluatie

$$f[x_0] = f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k, x_{k+1}] \equiv \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_k] - f[x_1, \dots, x_k, x_{k+1}]}{x_0 - x_{k+1}}$$

$$\begin{array}{ccccccc} x_0 - f(x_0) & \searrow & & & & & \\ & & f[x_0, x_1] & \searrow & & & \\ x_1 - f(x_1) & \searrow & & f[x_0, x_1, x_2] & \searrow & & \\ & & f[x_1, x_2] & \searrow & f[x_0, x_1, x_2, x_3] & & \\ x_2 - f(x_2) & \searrow & & f[x_1, x_2, x_3] & \searrow & & \\ & & f[x_2, x_3] & \searrow & & & \\ x_3 - f(x_3) & \searrow & & & & & \end{array}$$

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

# Evaluatie

$$f[x_0] = f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k, x_{k+1}] \equiv \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_k] - f[x_1, \dots, x_k, x_{k+1}]}{x_0 - x_{k+1}}$$

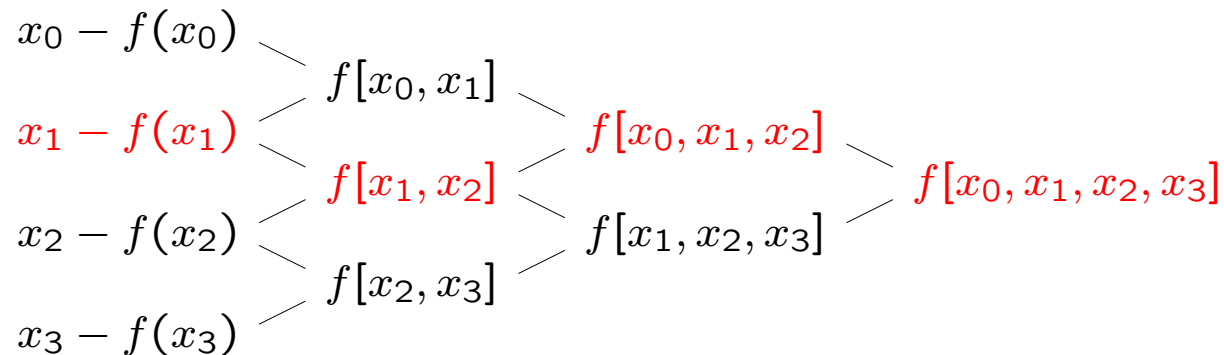
$$\begin{array}{ccccccc} x_0 - f(x_0) & \diagdown & & & & & \\ & & f[x_0, x_1] & \diagdown & & & \\ x_1 - f(x_1) & \diagup & & & f[x_0, x_1, x_2] & \diagdown & \\ & & & & & & f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\ x_2 - f(x_2) & \diagdown & f[x_1, x_2] & \diagdown & & & \\ & & & & f[x_1, x_2, x_3] & \diagdown & \\ x_3 - f(x_3) & \diagup & & & & & \\ & & f[x_2, x_3] & \diagup & & & \end{array}$$

$$p(x) = f[x_1] + f[x_1, x_2](x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_1)(x - x_0) \\ + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_1)(x - x_0)(x - x_2)$$

# Evaluatie

$$f[x_0] = f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k, x_{k+1}] \equiv \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_k] - f[x_1, \dots, x_k, x_{k+1}]}{x_0 - x_{k+1}}$$



**Voorbeeld.**

0	-	$f(0)$	$f[0, 0] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(0) - f(\epsilon)}{0 - \epsilon} = f'(0)$
0	-	$f(0)$	$f[0, 0, 0] = \lim_{\epsilon} f[0, \epsilon, 2\epsilon] = \frac{1}{2} f''(0)$
0	-	$f(0)$	
$h$	-	$f(h)$	

We wensen  $f$  in het punt  $x$  te benaderen door interpolatie met een  $k$ de graads polynoom.

Waar kunnen we het beste  $x_0, \dots, x_k$  kiezen?

We wensen  $f$  in het punt  $x$  te benaderen door interpolatie met een  $k$ de graads polynoom.

Waar kunnen we het beste  $x_0, \dots, x_k$  kiezen?

*Hangt er van af wat we van  $f$  weten  
en hoeveel werk we willen doen*

We wensen  $f$  in het punt  $x$  te benaderen door interpolatie met een  $k$ de graads polynoom.

Waar kunnen we het beste  $x_0, \dots, x_k$  kiezen?

- $f$  is bekend op  $t_i$  met, voor 'n stapgrootte  $h > 0$ ,  
 $t_{i+1} = t_i + h$  alle  $i$ .

We wensen  $f$  in het punt  $x$  te benaderen door interpolatie met een  $k$ de graads polynoom.

Waar kunnen we het beste  $x_0, \dots, x_k$  kiezen?

- $f$  is bekend op  $t_i$  met, voor 'n stapgrootte  $h > 0$ ,  
$$t_{i+1} = t_i + h \text{ alle } i.$$
- We willen  $f$  met zo weinig mogelijk functiewaarden over een heel interval, zeg  $[-1, +1]$ , benaderen met een fout kleiner dan, zeg  $10^{-4}$ .  
We kunnen de steunpunten  $x_i$  overal kiezen in  $[-1, +1]$ .

We wensen  $f$  in het punt  $x$  te benaderen door interpolatie met een  $k$ de graads polynoom.

Waar kunnen we het beste  $x_0, \dots, x_k$  kiezen?

- $f$  is bekend op  $t_i$  met, voor 'n stapgrootte  $h > 0$ ,  
 $t_{i+1} = t_i + h$  alle  $i$ .

Kies  $x_0, \dots, x_k$  uit  $\{t_i\}$  zodat

$$|(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_k)|$$

minimaal is.

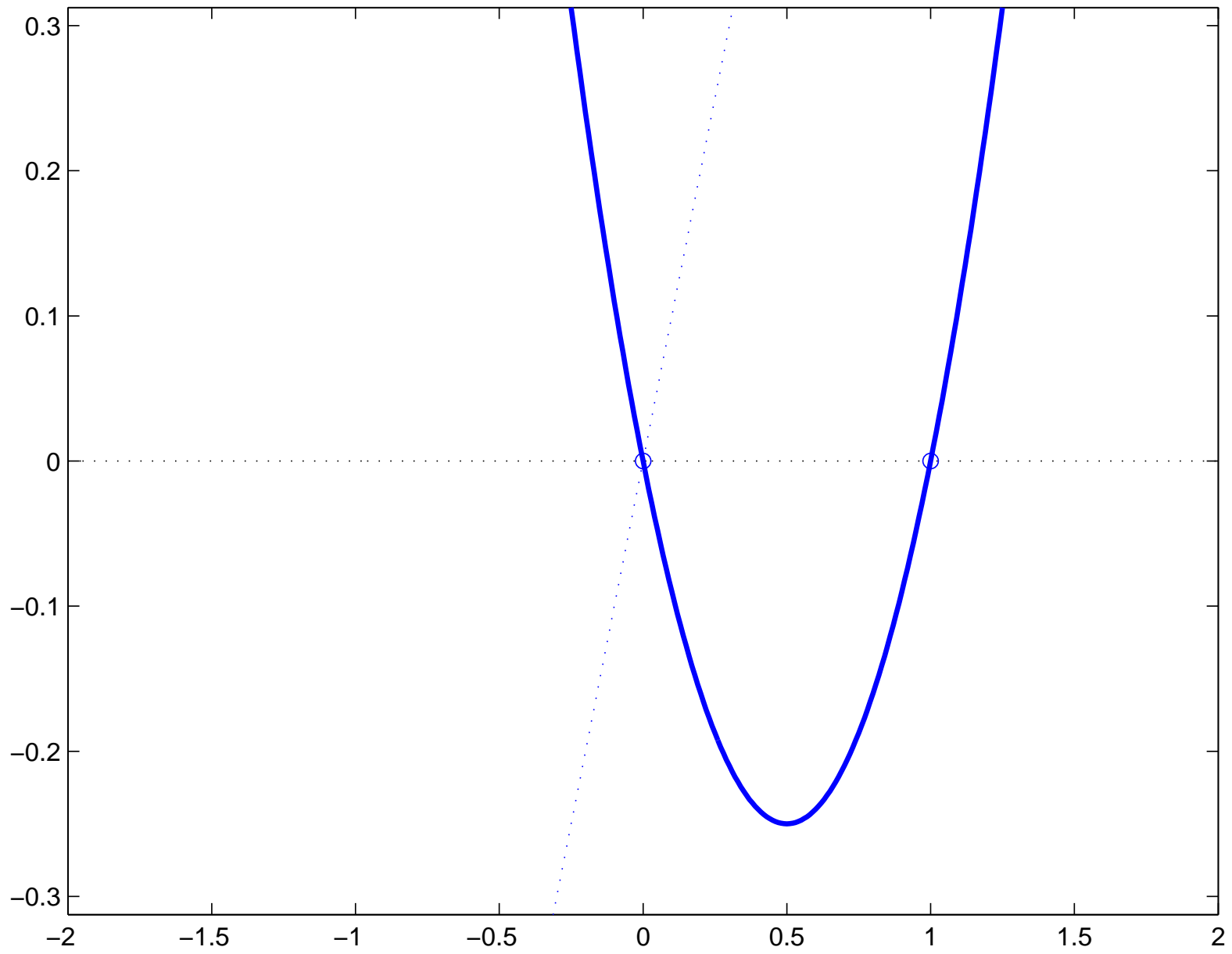
Zorg er voor dat  $x$  in het 'middelste' interval  $[x_j, x_{j+1}]$  ligt:

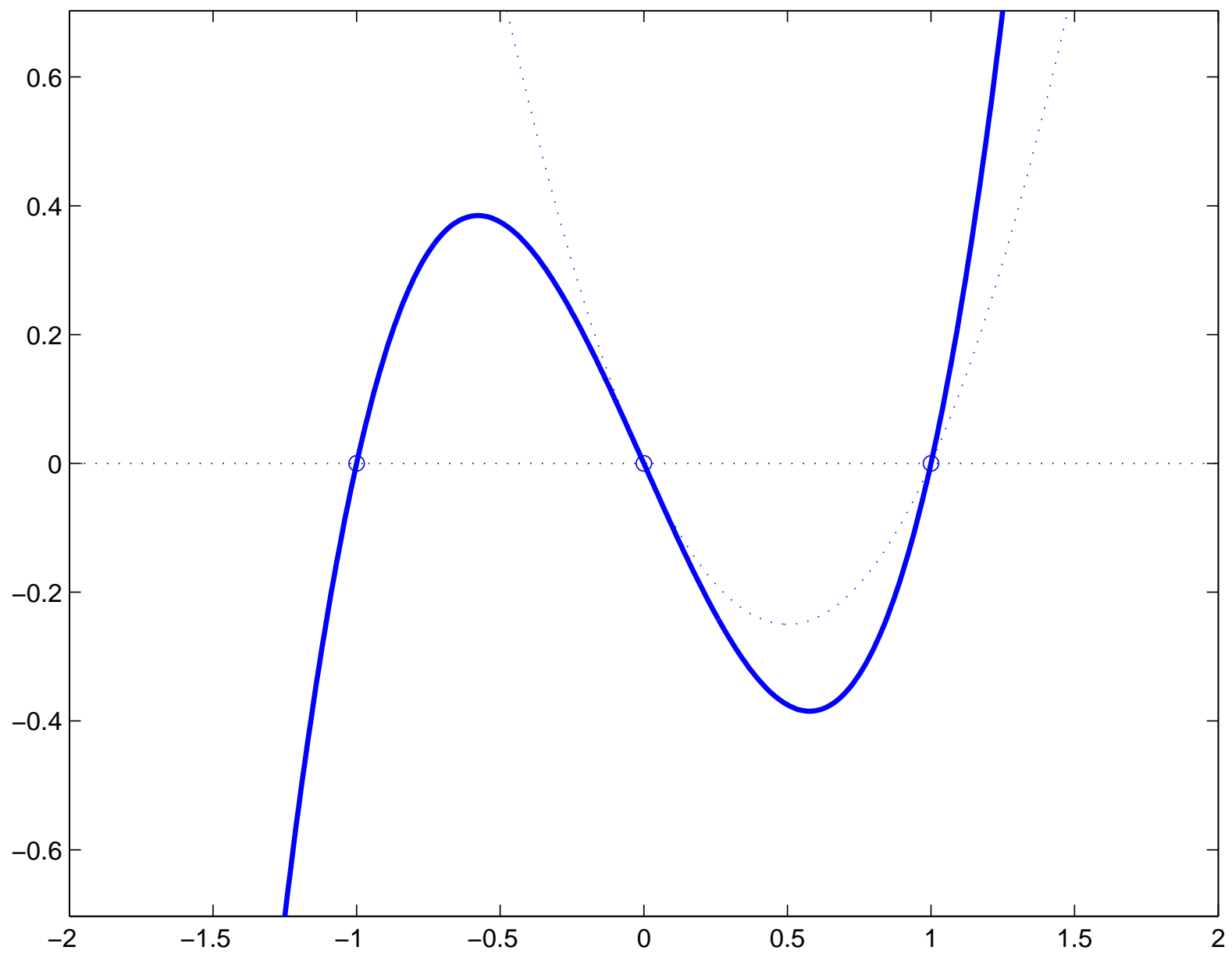
Als  $x \in (t_i, t_{i+1})$ , kies

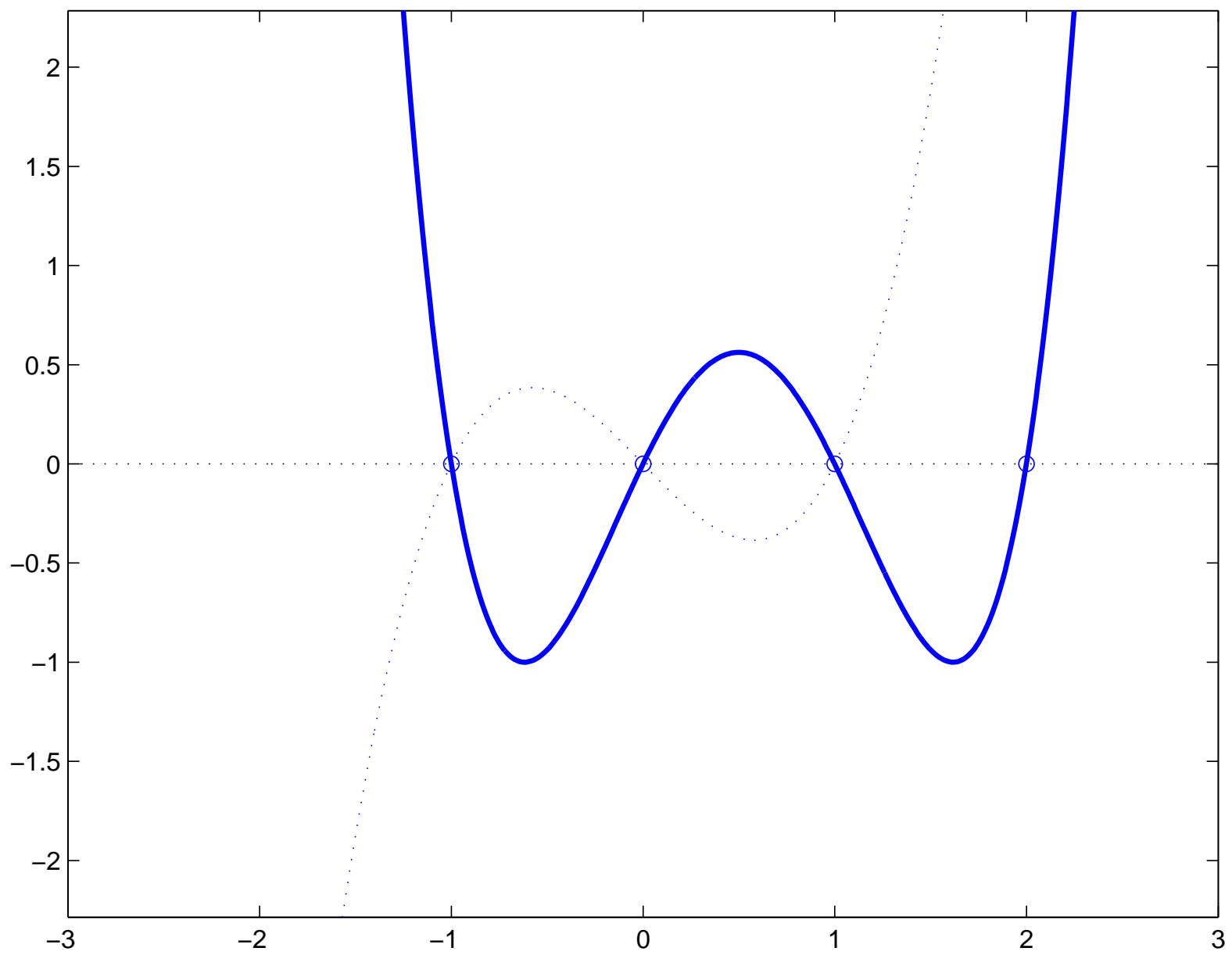
$$x_0 = t_i, x_1 = t_{i+1}, x_2 = t_{i-1}, x_3 = t_{i+2}, x_4 = t_{i-2}, \dots$$

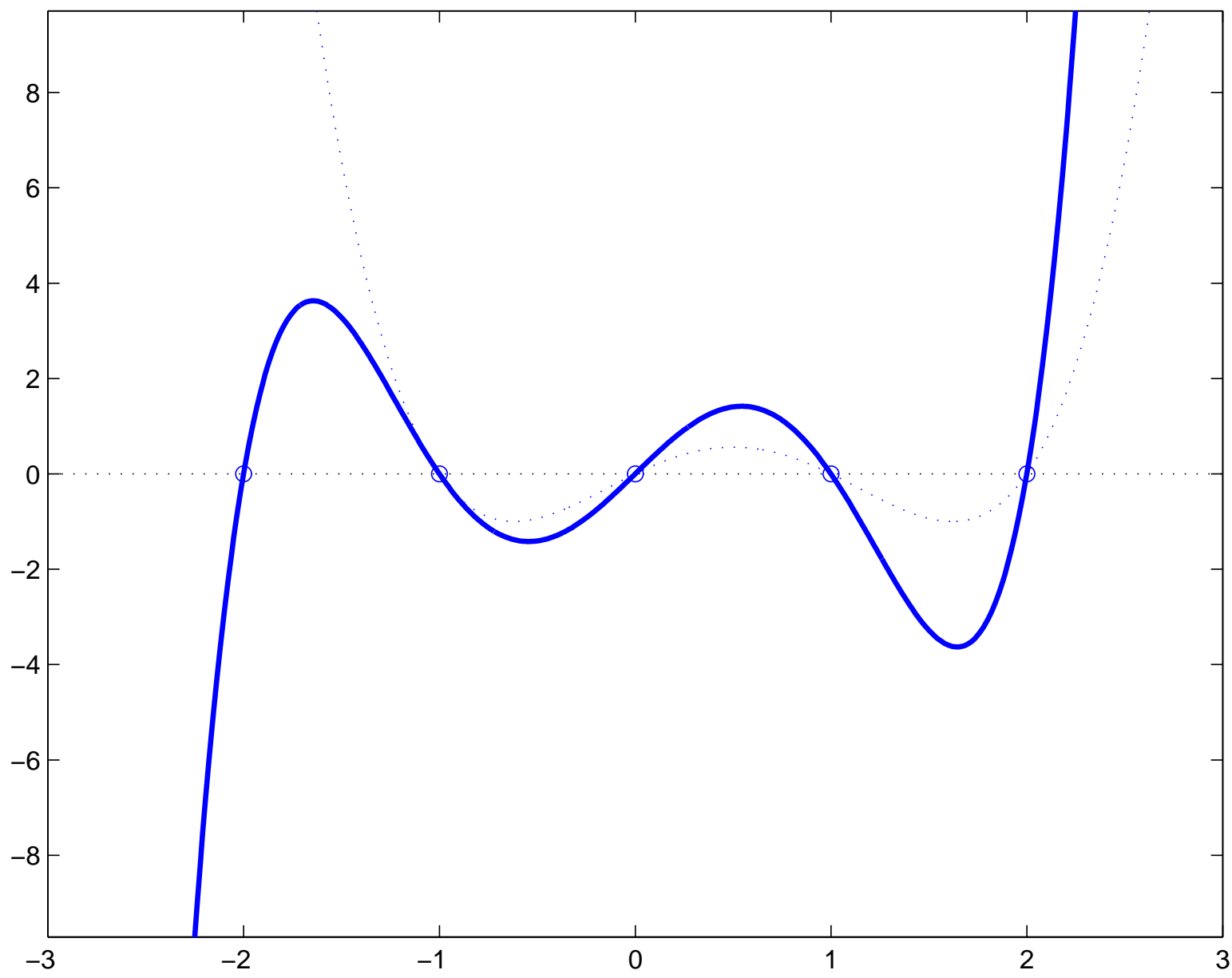
Voor motivatie: zie volgende grafieken

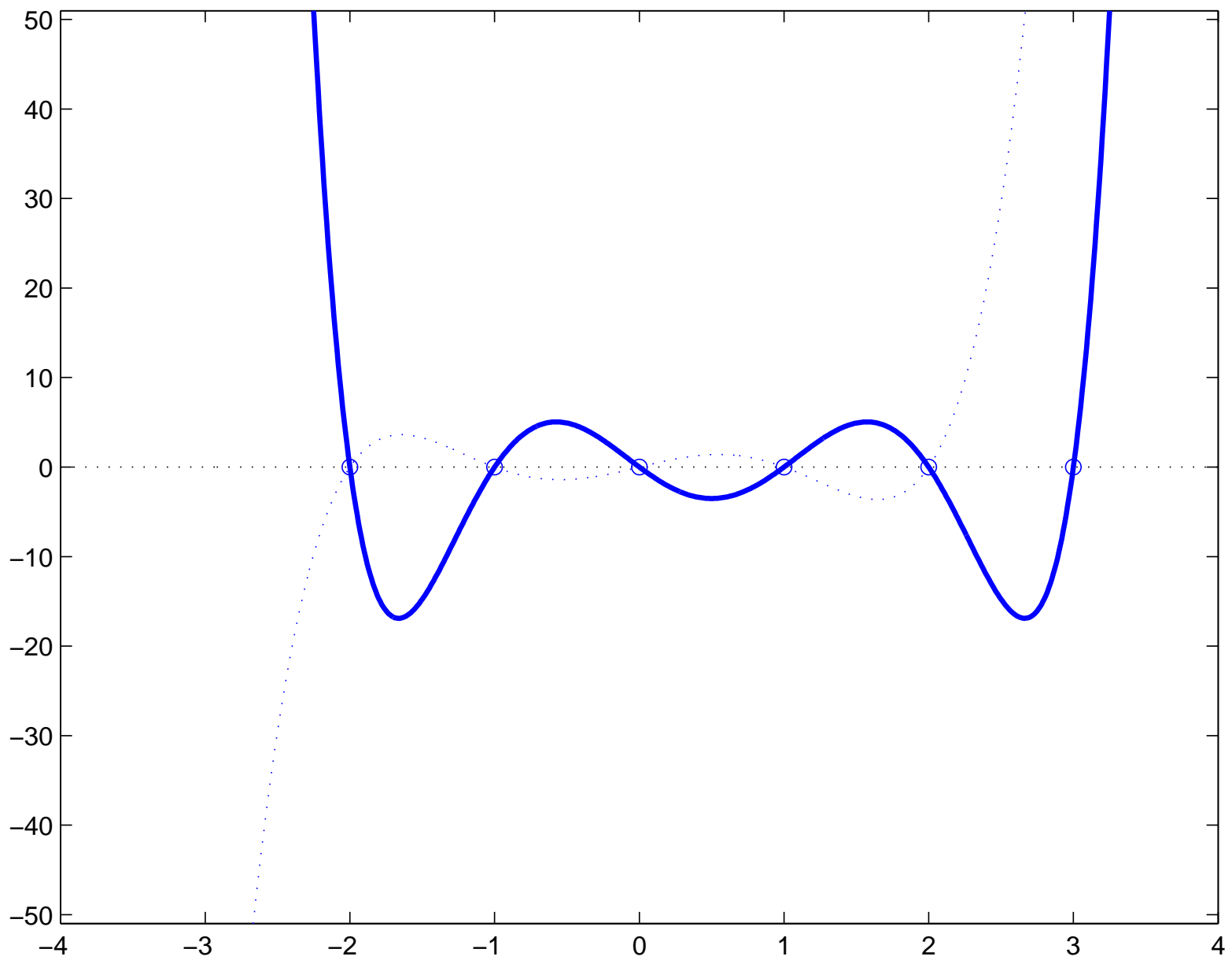
waarbij  $t_i = i$ , ( $i \in \mathbb{Z}$ ),  $x \in (0, 1)$

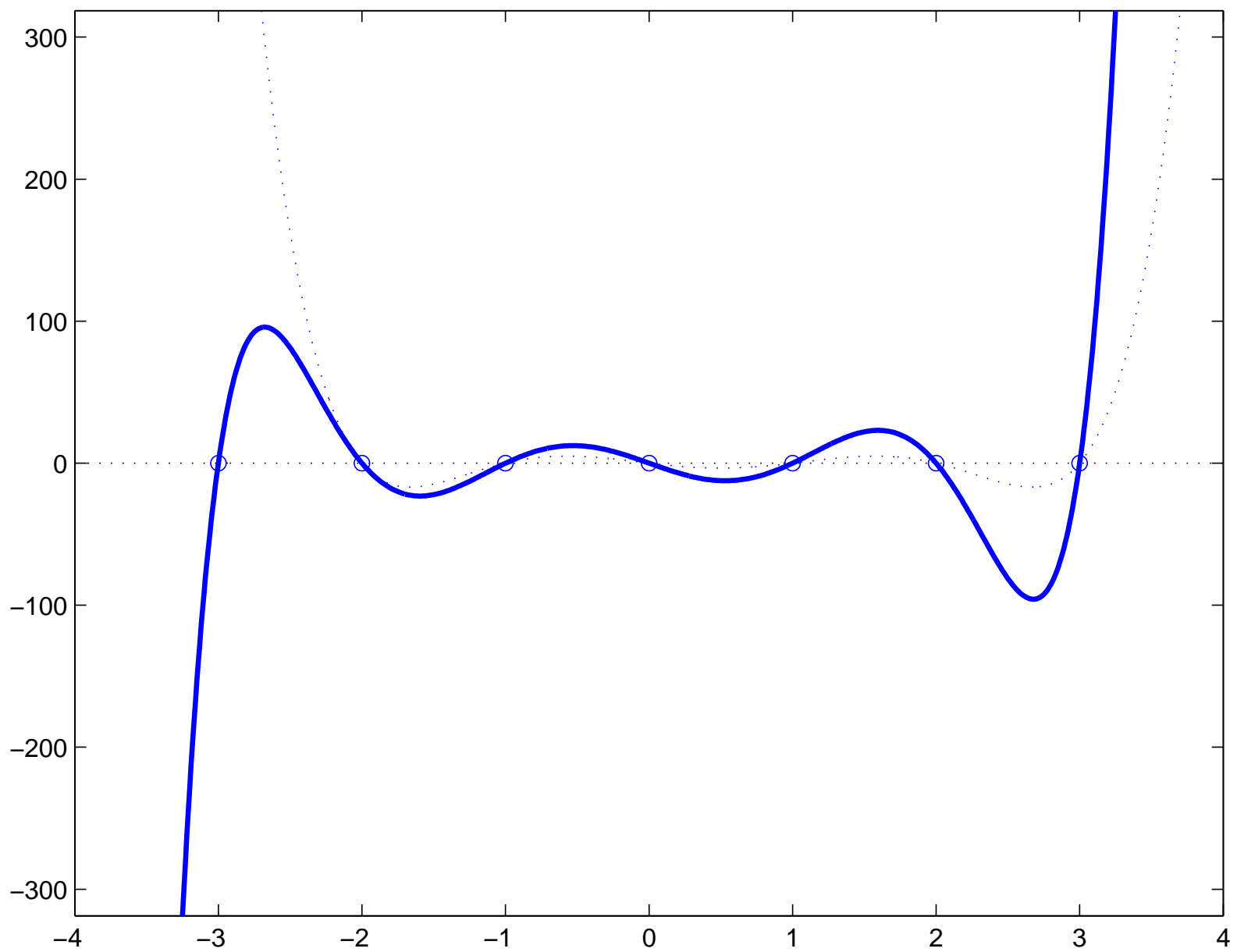


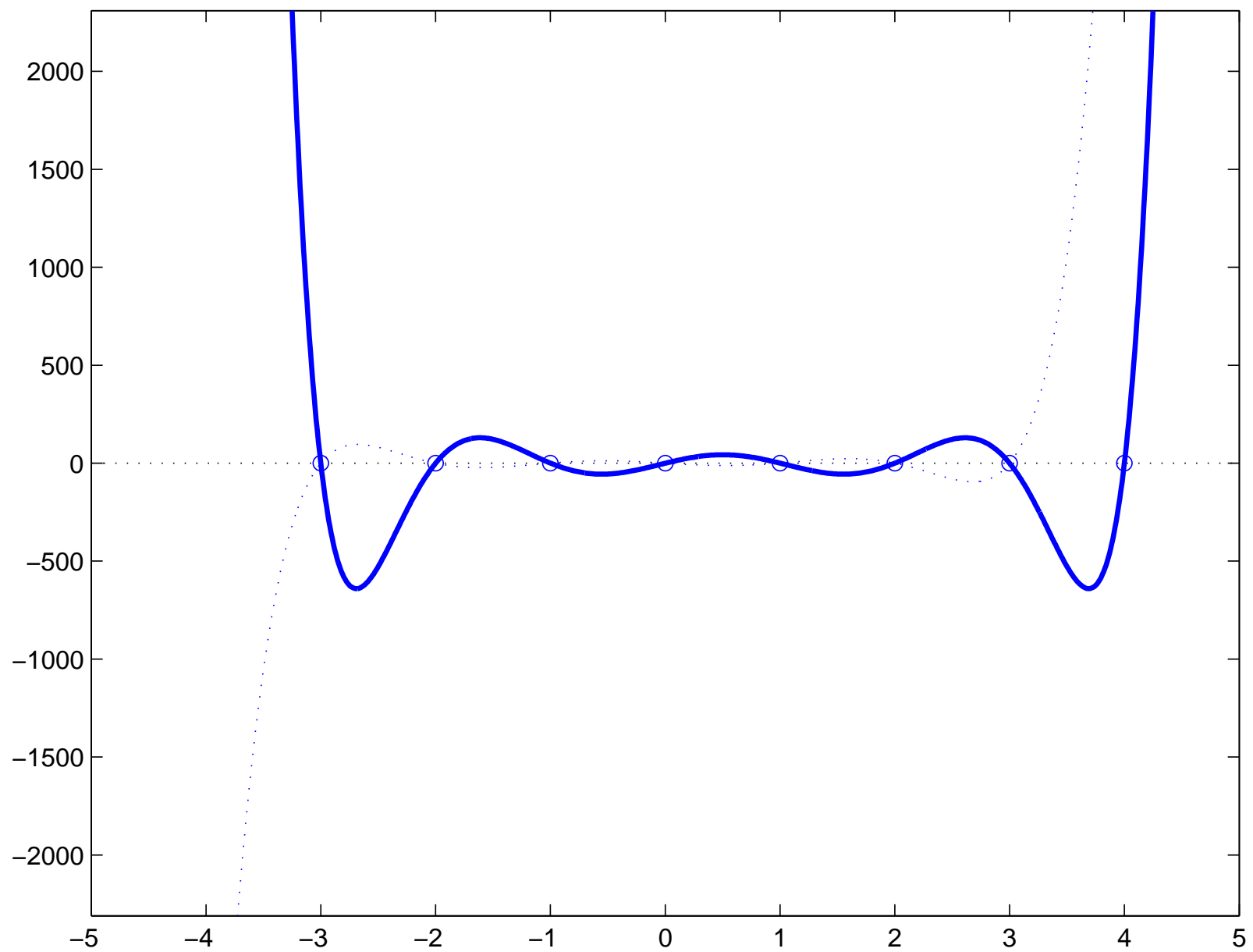


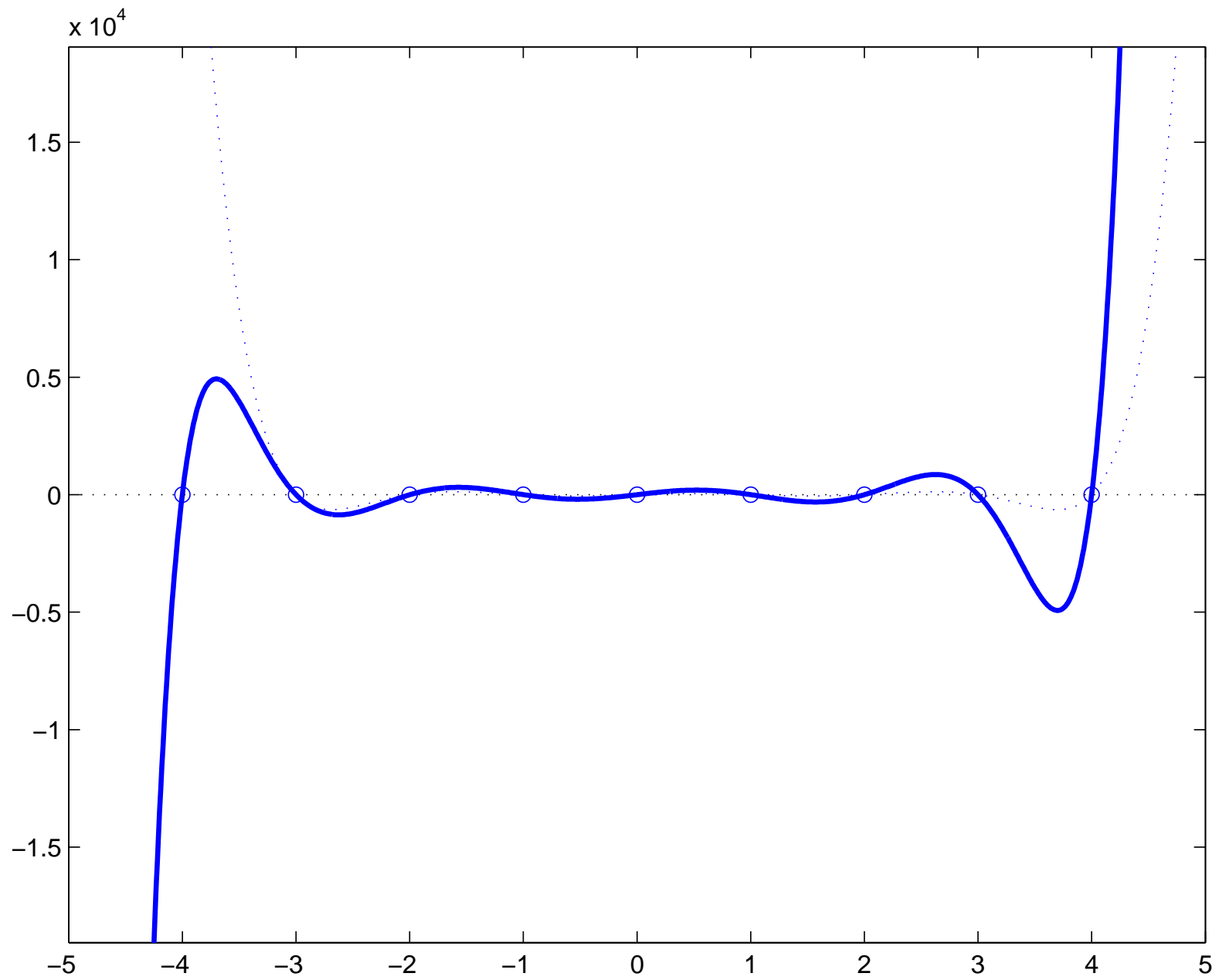












We wensen  $f$  in het punt  $x$  te benaderen door interpolatie met een  $k$ de graads polynoom.

Waar kunnen we het beste  $x_0, \dots, x_k$  kiezen?

- We willen  $f$  met zo weinig mogelijk functiewaarden over een heel interval, zeg  $[-1, +1]$ , benaderen met een fout kleiner dan, zeg  $10^{-4}$ .  
We kunnen de steunpunten  $x_i$  overal kiezen in  $[-1, +1]$ .

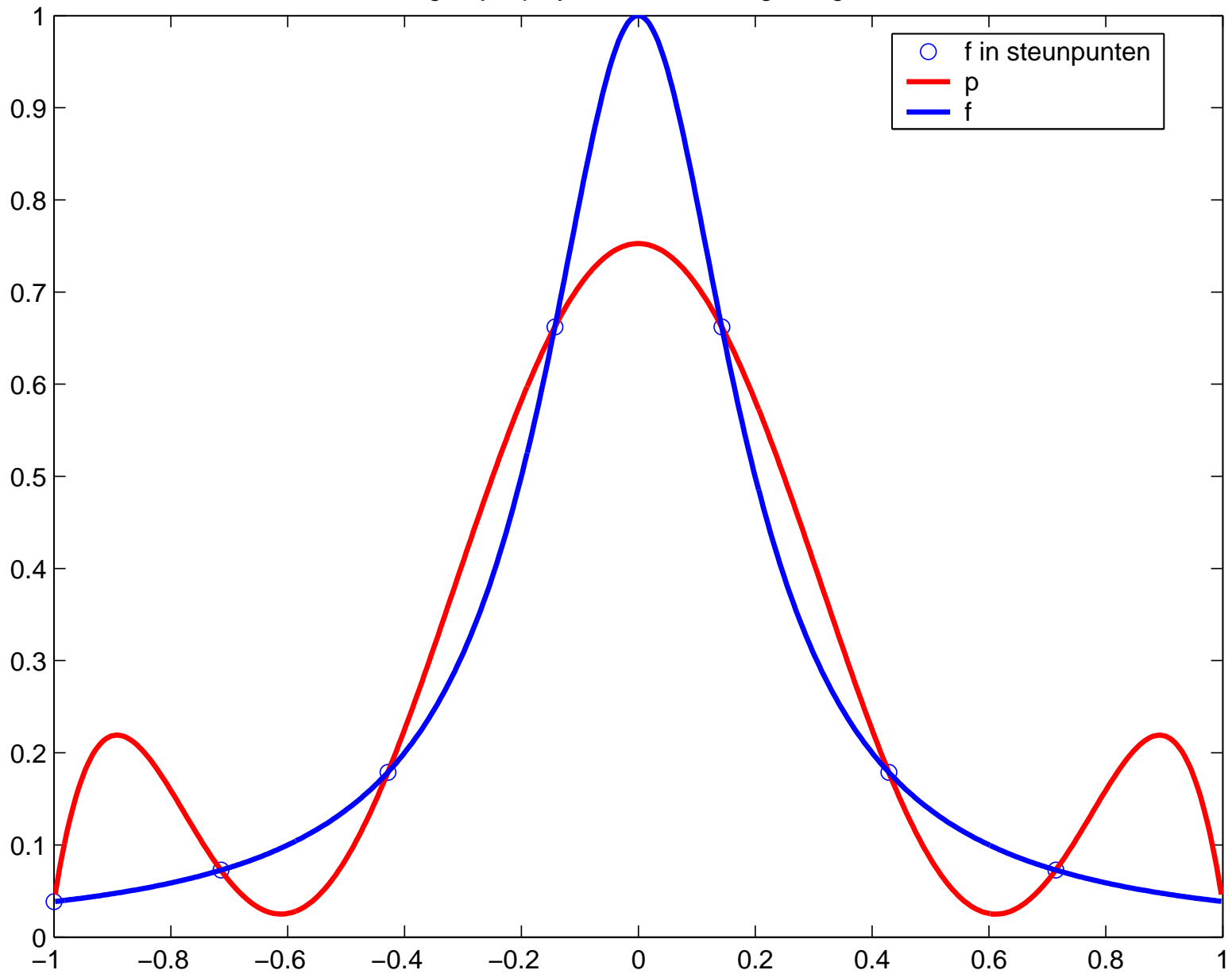
We wensen  $f$  in het punt  $x$  te benaderen door interpolatie met een  $k$ de graads polynoom.

Waar kunnen we het beste  $x_0, \dots, x_k$  kiezen?

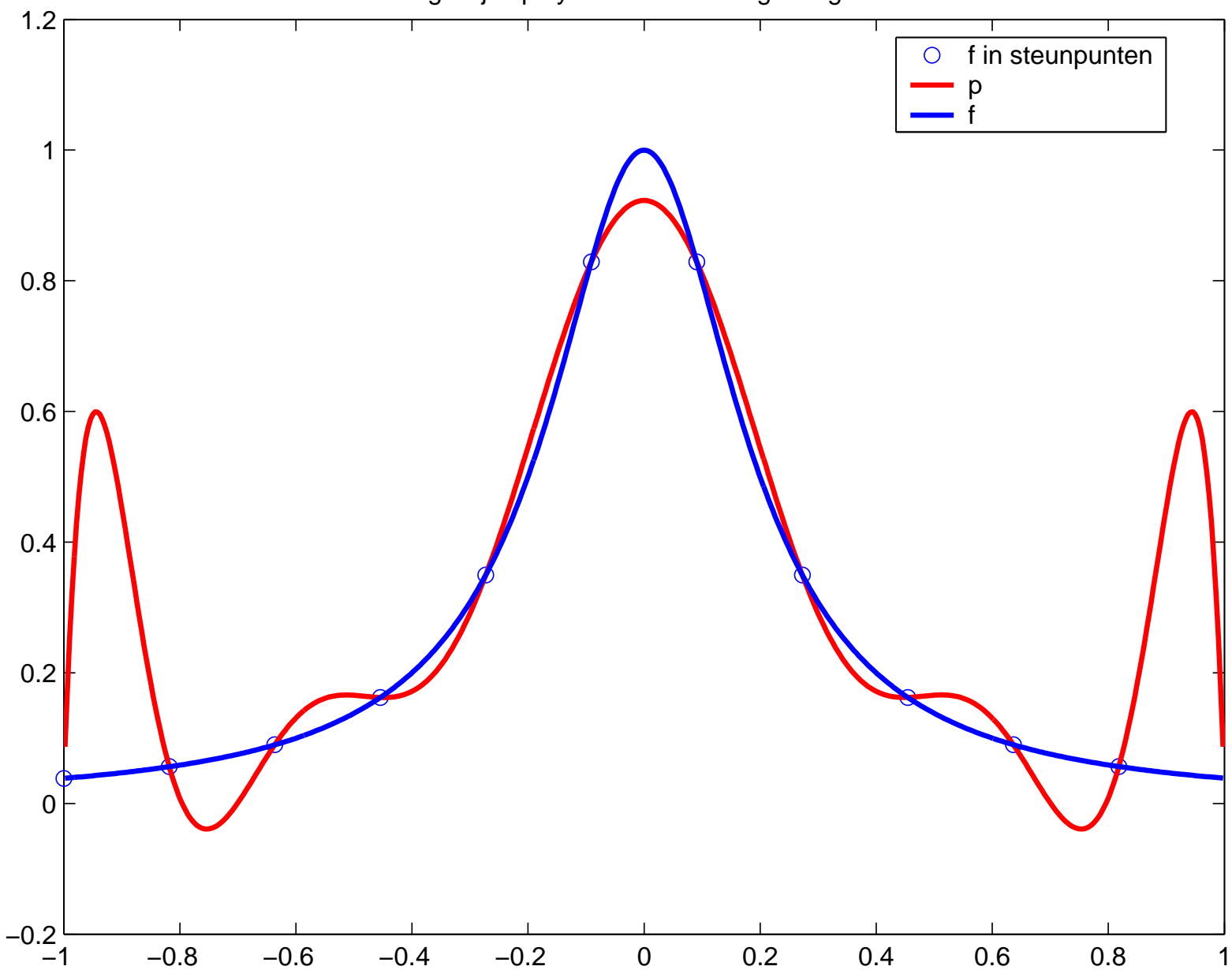
- We willen  $f$  met zo weinig mogelijk functiewaarden over een heel interval, zeg  $[-1, +1]$ , benaderen met een fout kleiner dan, zeg  $10^{-4}$ .  
We kunnen de steunpunten  $x_j$  overal kiezen in  $[-1, +1]$ .

Equidistant:  $x_j = -1 + jh$  ( $j = 0, \dots, k$ ) met  $h = 2/k$ ?

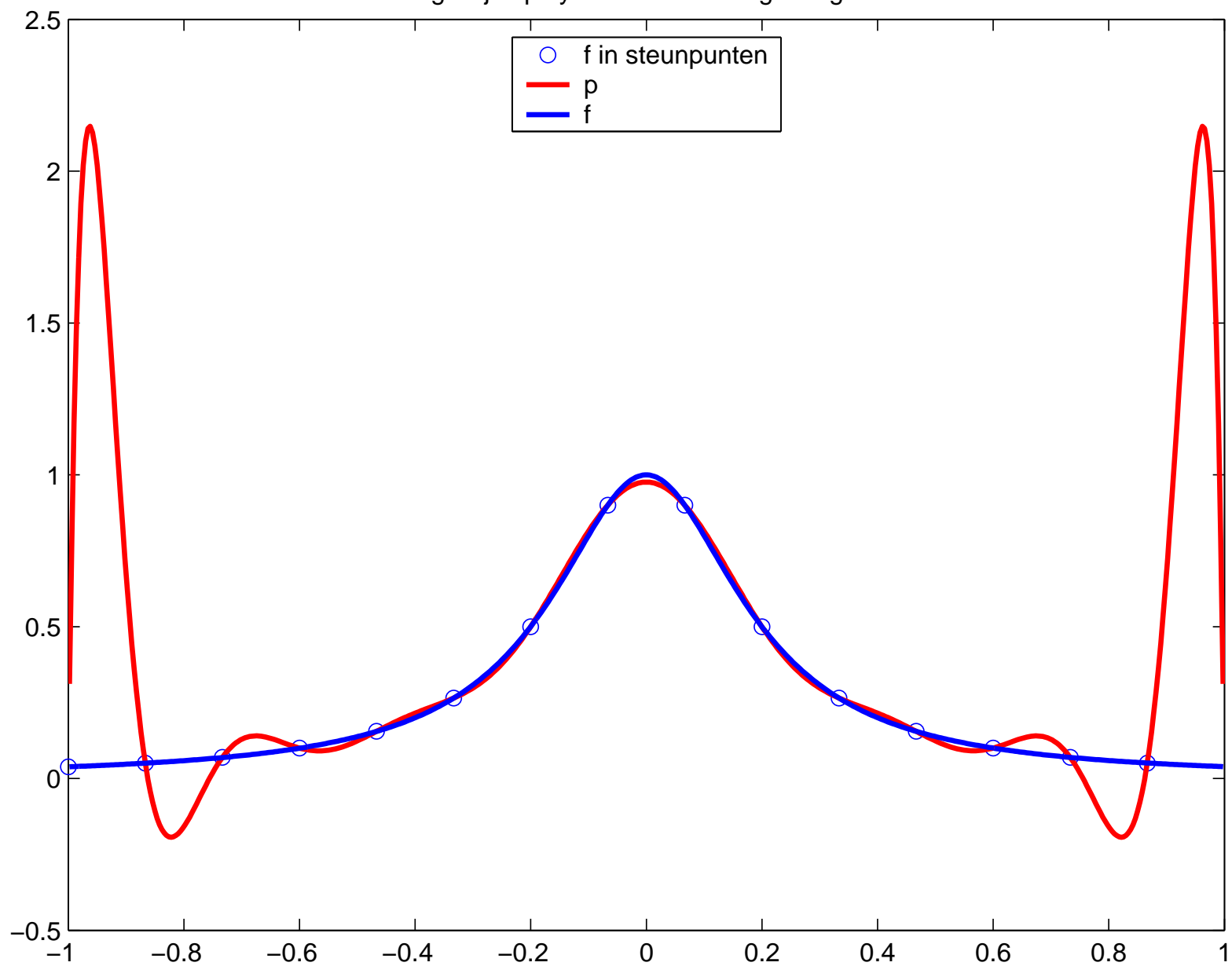
Stuksgewijze polynoom benadering van graad 6



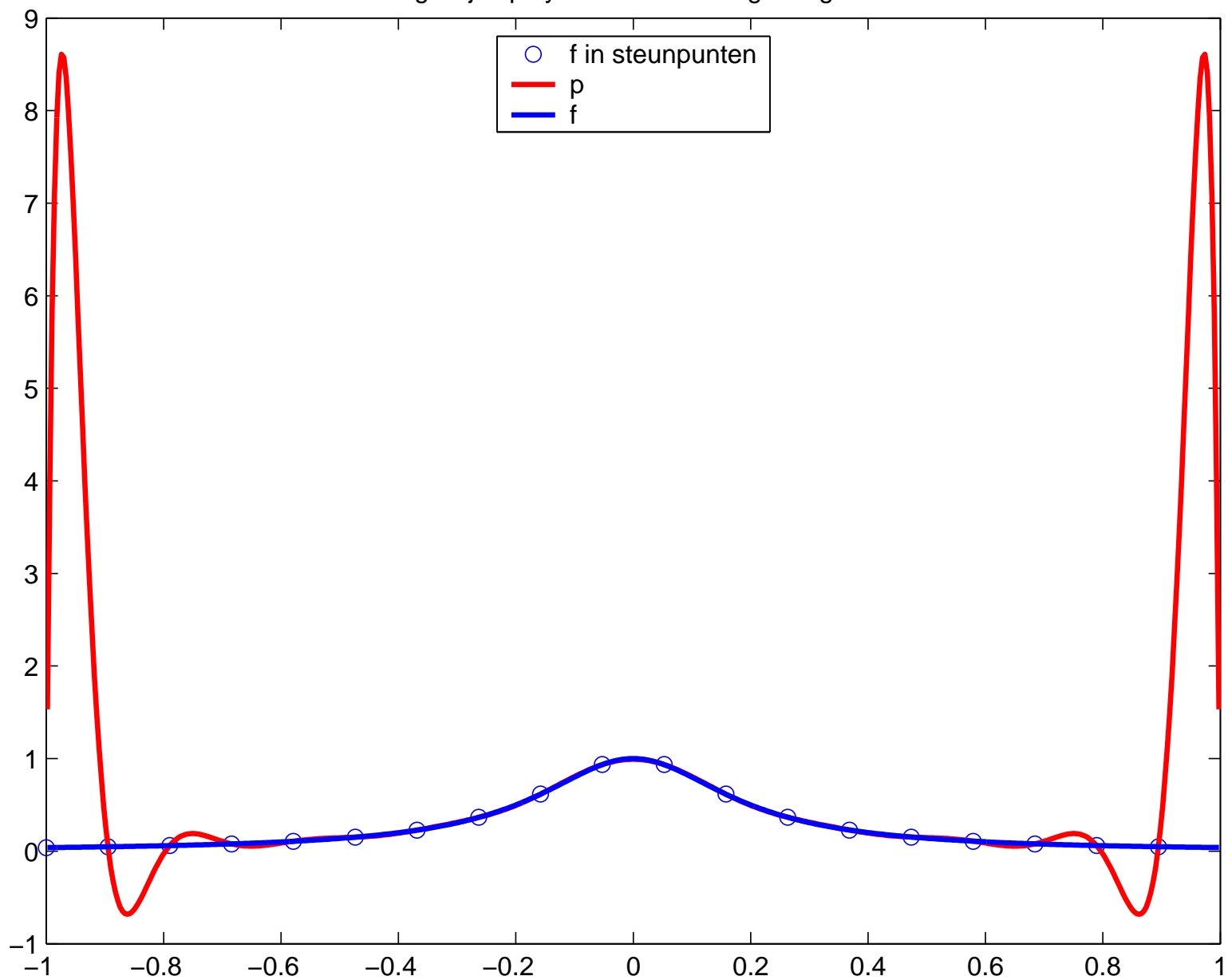
Stuksgewijze polynoom benadering van graad 10



Stuksgewijze polynoom benadering van graad 14

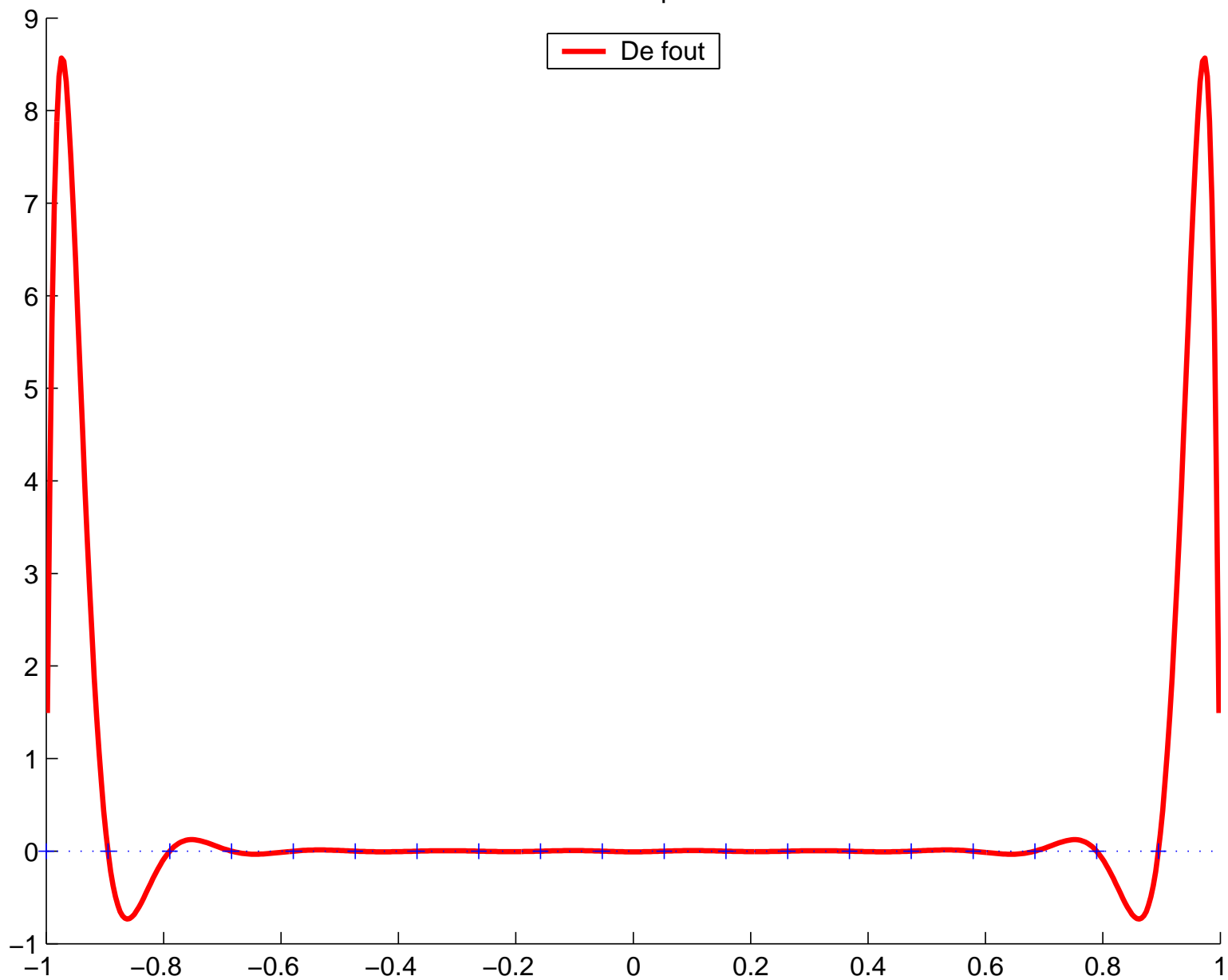


Stuksgewijze polynoom benadering van graad 18



De fout p-f

De fout



We wensen  $f$  in het punt  $x$  te benaderen door interpolatie met een  $k$ de graads polynoom.

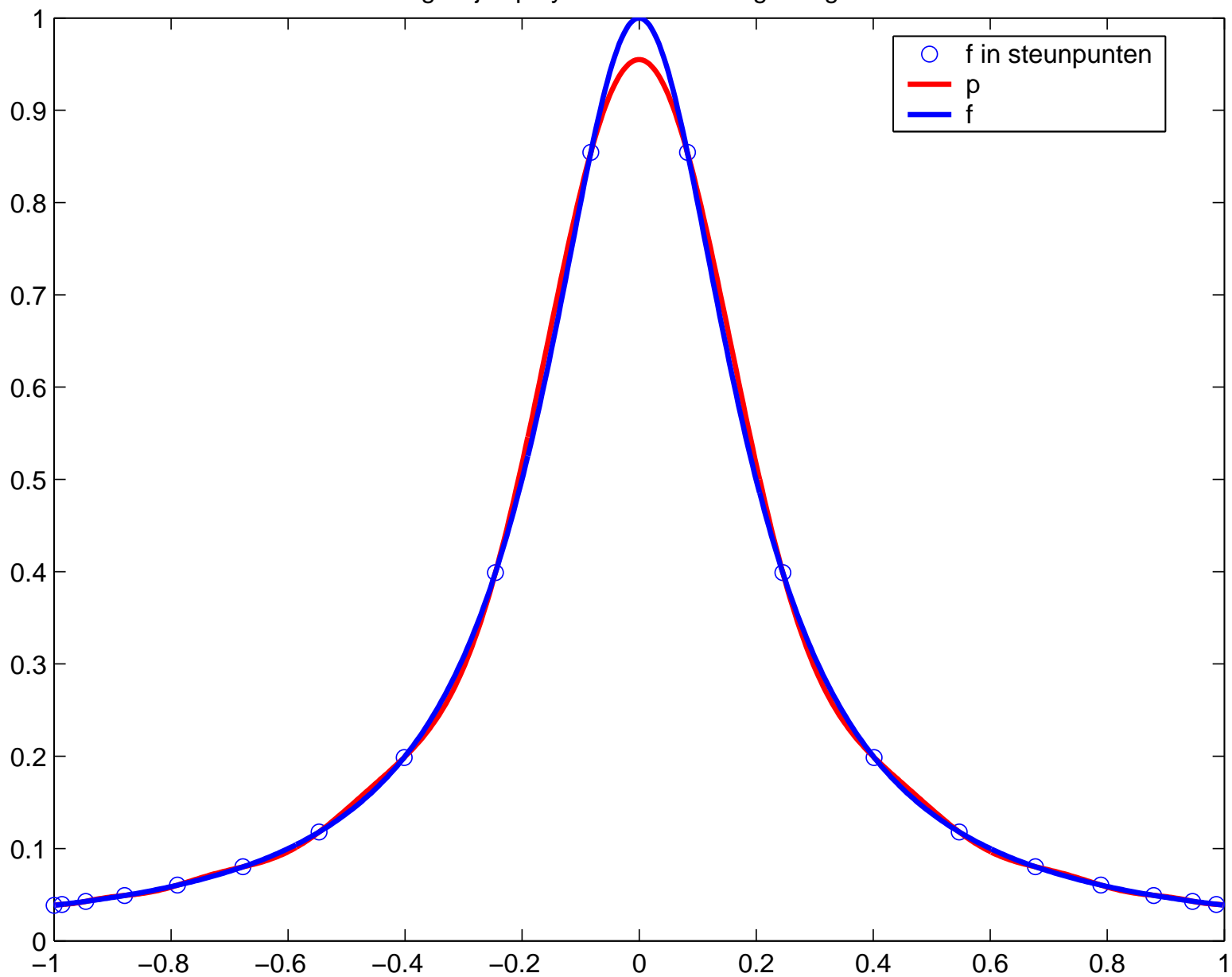
Waar kunnen we het beste  $x_0, \dots, x_k$  kiezen?

- We willen  $f$  met zo weinig mogelijk functiewaarden over een heel interval, zeg  $[-1, +1]$ , benaderen met een fout kleiner dan, zeg  $10^{-4}$ .  
We kunnen de steunpunten  $x_i$  overal kiezen in  $[-1, +1]$ .

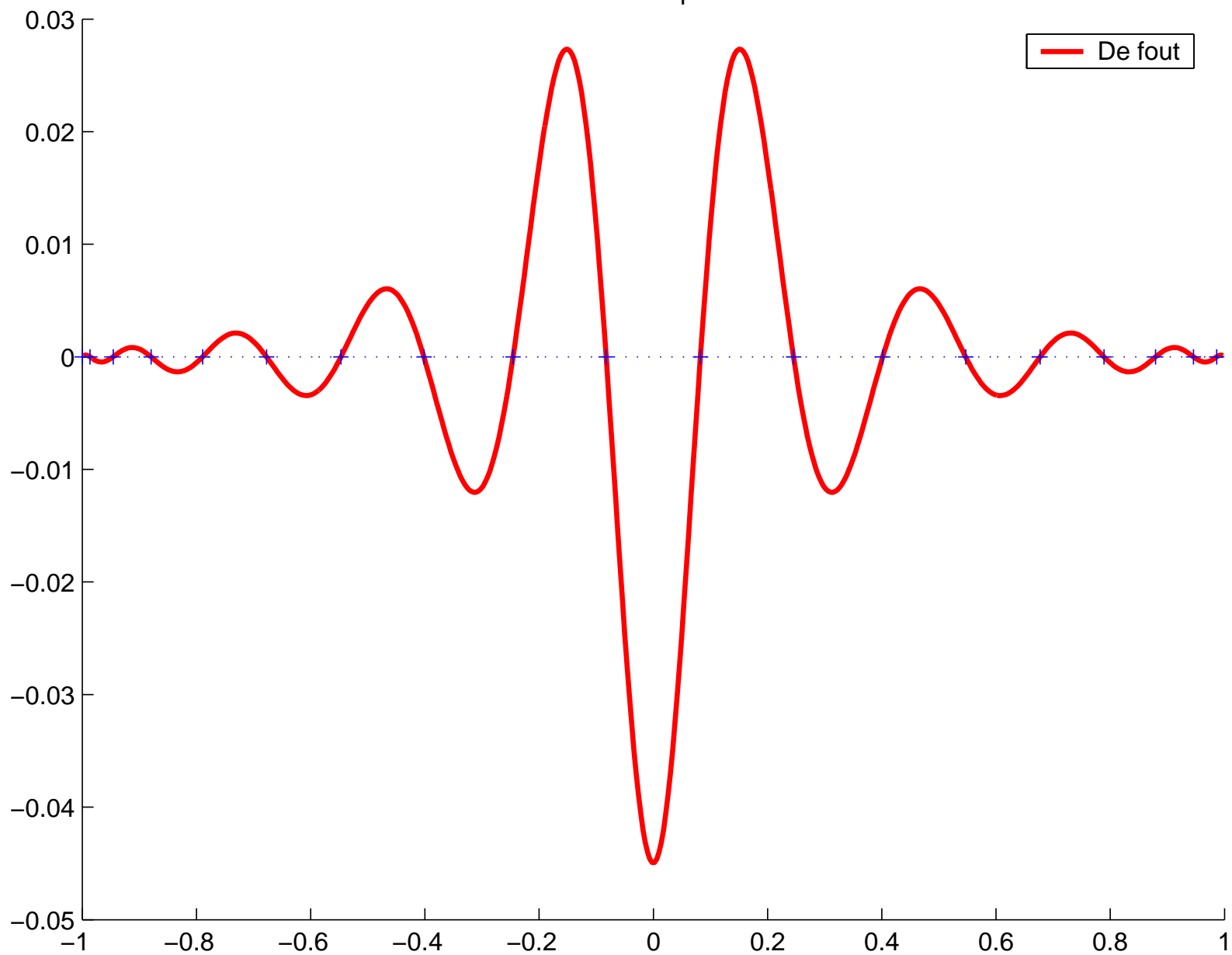
Meer verdichten aan de rand: met  $h = 2/k$

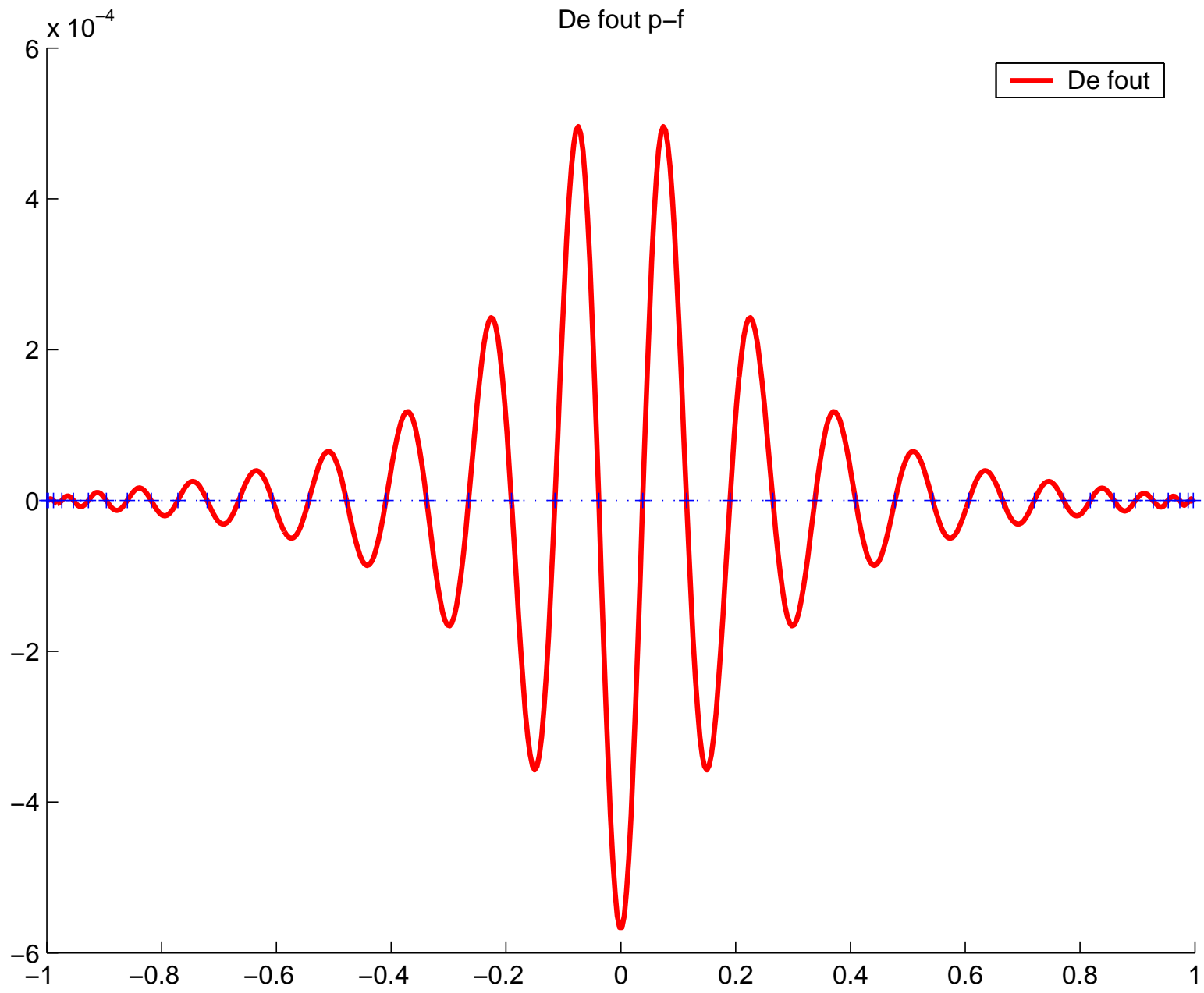
$$x_j = \sin\left(\frac{\pi}{2}(-1 + jh)\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}jh\right) \quad (j = 0, \dots, k)?$$

Stuksgewijze polynoom benadering van graad 18



De fout p-f





Hieronder  $f \in C^{(1)}([-1, 1])$

en  $p_k$  interpoleert  $f$  op  $(x_0, x_1, \dots, x_k)$ .

$x_j = -1 + j \frac{2}{k} \quad \exists f \quad p_k \not\rightarrow f \quad x$  in de buurt van 1

$x_j = 0 \quad \exists f \quad p_k \not\rightarrow f \quad x$  in de buurt van 1

$x_j = \cos\left(\frac{\pi j}{k}\right) \quad \forall f \quad p_k \rightarrow f \quad \text{ook } x \text{ in de buurt van 1}$

Opmerkingen:

$\exists f$  zelfs  $\exists f \in C^{(\infty)}([-1, 1])$ .

$\forall f$  geldt niet  $\forall f \in C([-1, 1])$

Convergentie volgt niet uit schattingen

voor  $(x - x_0) \dots (x - x_k)$  en  $f^{(k+1)}(\xi)$ .

# Effecten van (af rond)fouten in $f$ -waarden

**Voorbeeld.** Lip op  $x_0, x_1, x_2, x_3$ :  $x_i \neq x_j$  voor  $i \neq j$ .

Definieer

$$L_0(x) \equiv \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

# Effecten van (af rond)fouten in $f$ -waarden

**Voorbeeld.** Lip op  $x_0, x_1, x_2, x_3$ :  $x_i \neq x_j$  voor  $i \neq j$ .

Definieer

$$L_1(x) \equiv \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

# Effecten van (af rond)fouten in $f$ -waarden

**Voorbeeld.** Lip op  $x_0, x_1, x_2, x_3$ :  $x_i \neq x_j$  voor  $i \neq j$ .

Definieer

$$L_2(x) \equiv \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

# Effecten van (af rond)fouten in $f$ -waarden

**Voorbeeld.** Lip op  $x_0, x_1, x_2, x_3$ :  $x_i \neq x_j$  voor  $i \neq j$ .

Definieer

$$L_3(x) \equiv \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

# Effecten van (af rond)fouten in $f$ -waarden

**Voorbeeld.** LIP op  $x_0, x_1, x_2, x_3$ :  $x_i \neq x_j$  voor  $i \neq j$ .

Definieer

$$L_0(x) \equiv \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

Dan  $L_j(x_i) = 0$  als  $i \neq j$  en  $L_j(x_j) = 1$ .

Als  $p = f$  op  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$ , dan

$$p(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x)$$

# Effecten van (af rond)fouten in $f$ -waarden

**Voorbeeld.** Lip op  $x_0, x_1, x_2, x_3$ :  $x_i \neq x_j$  voor  $i \neq j$ .

Definieer

$$L_0(x) \equiv \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

Dan  $L_j(x_i) = 0$  als  $i \neq j$  en  $L_j(x_j) = 1$ .

Als  $p = f$  op  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$ , dan

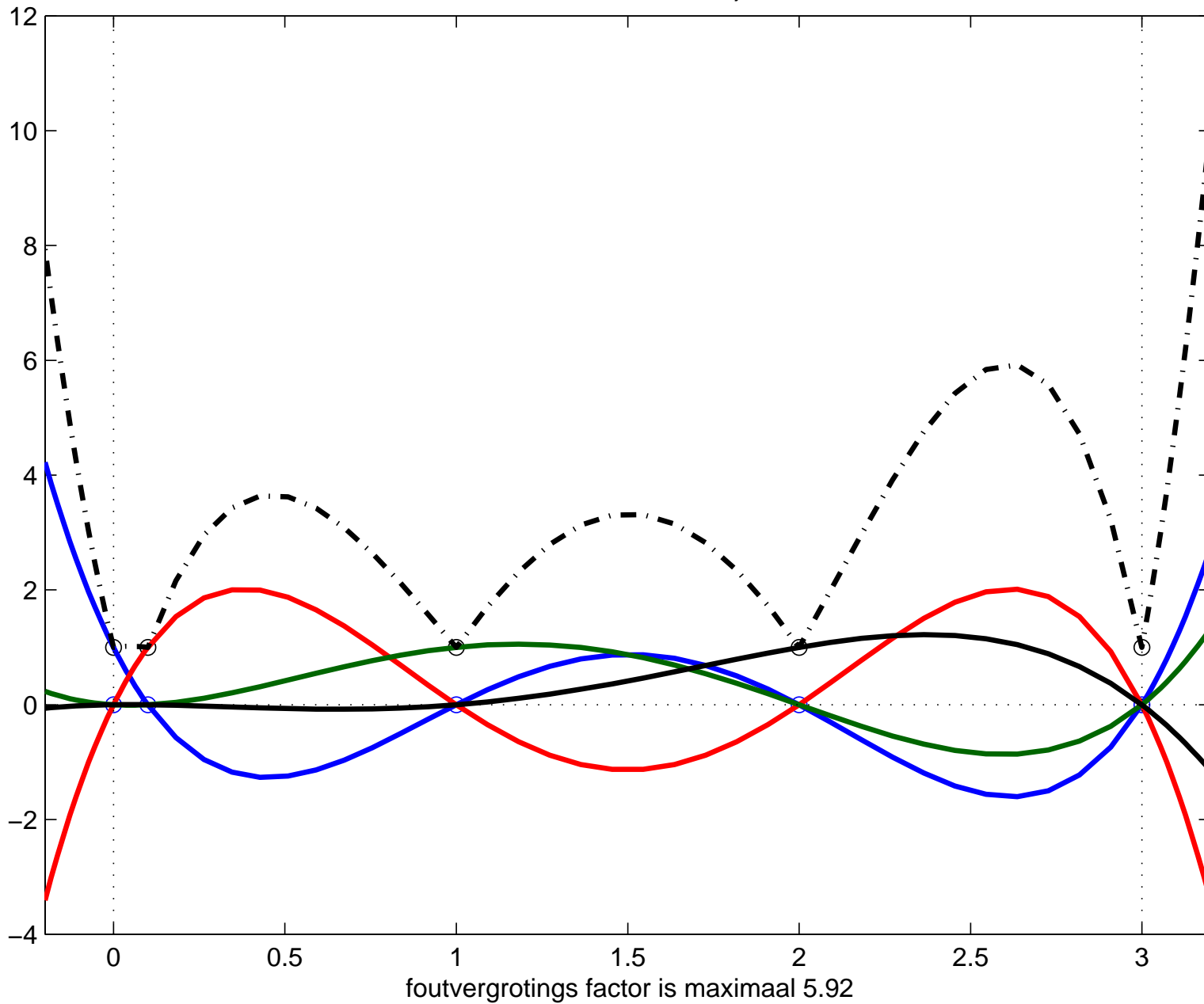
$$p(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x)$$

$$f^*(x_j) = f(x_j) + \epsilon_j \text{ met } |\epsilon_j| \leq \epsilon:$$

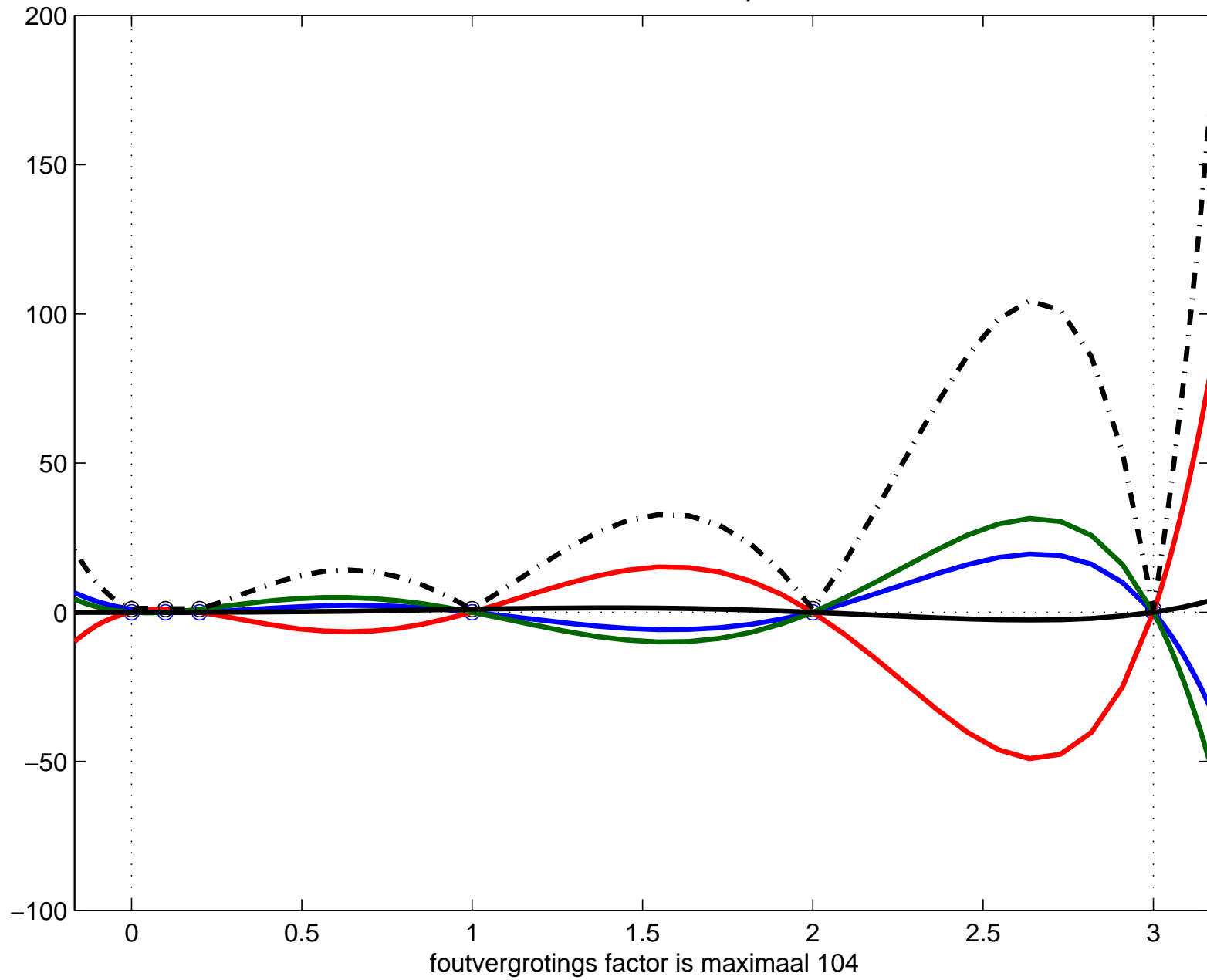
$$|p^*(x) - p(x)| \leq \epsilon \sum_j |L_j(x)|$$

Op volgende pagina's: grafieken  $L_j$  en  $\sum_j |L_j(x)|$  (— · — ·)

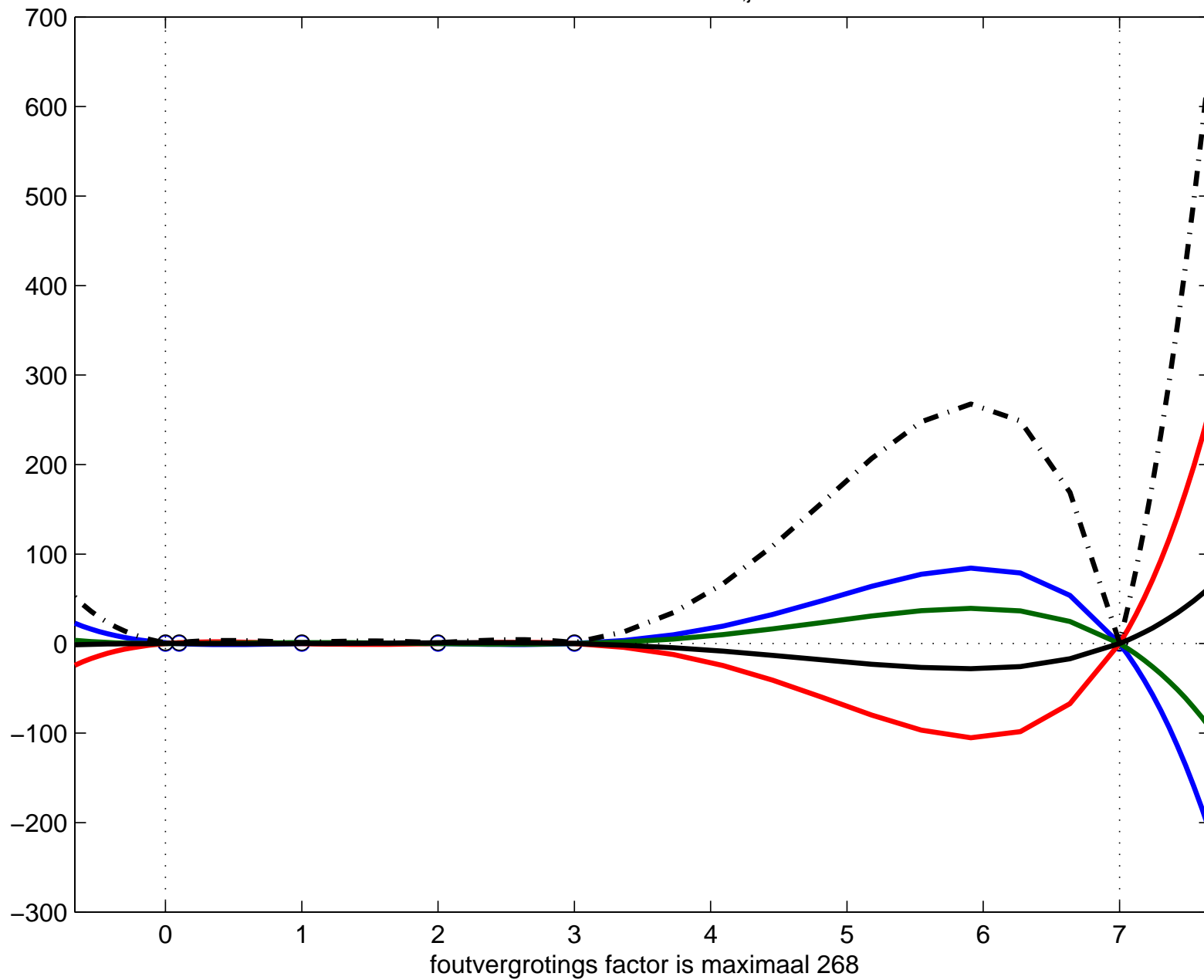
interpolatie van graad 4, basisfuncties  $L_{4,j}$ , foutvergrotingsfunctie



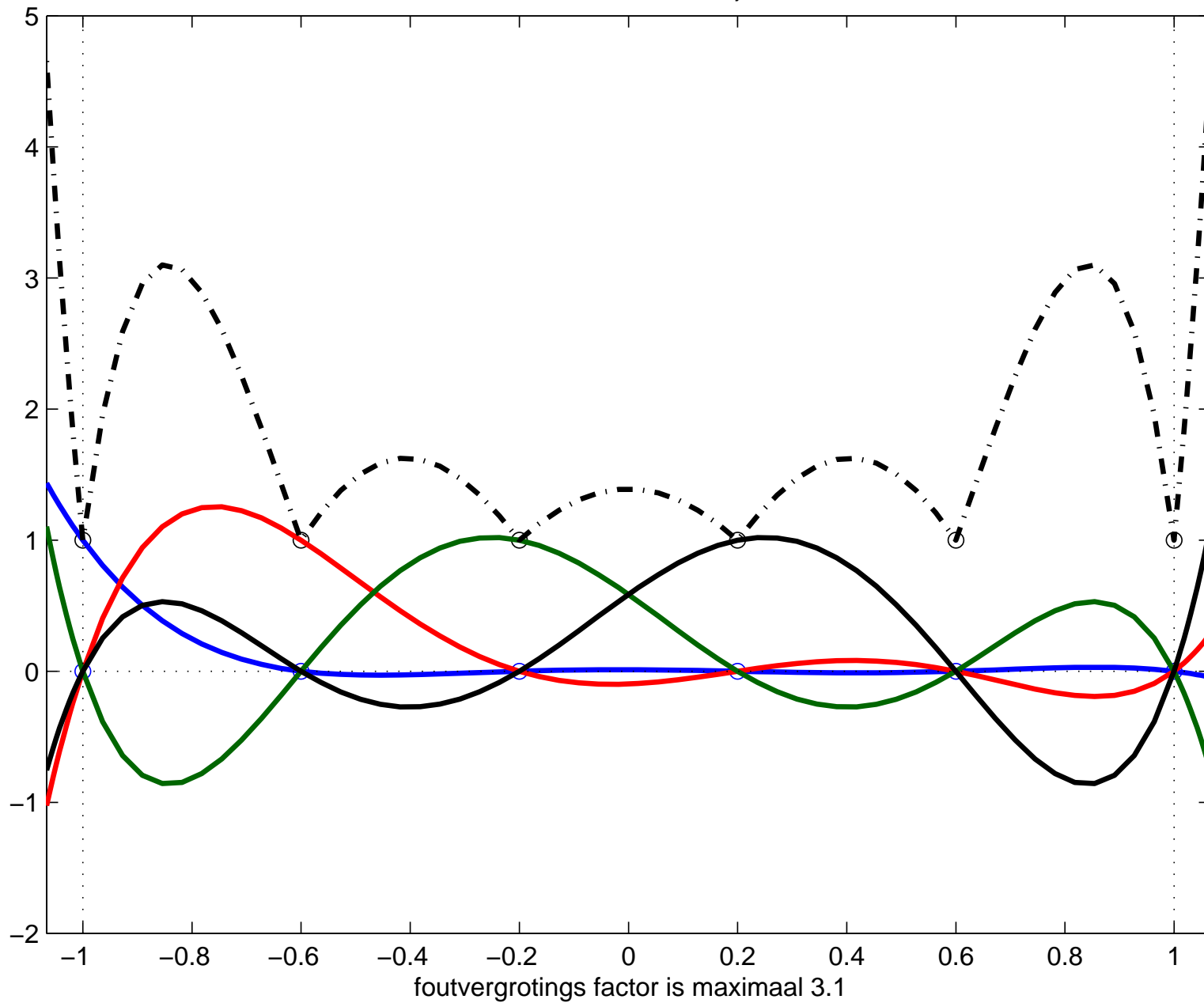
interpolatie van graad 5, basisfuncties  $L_{5,j}$ , foutvergrotingsfunctie



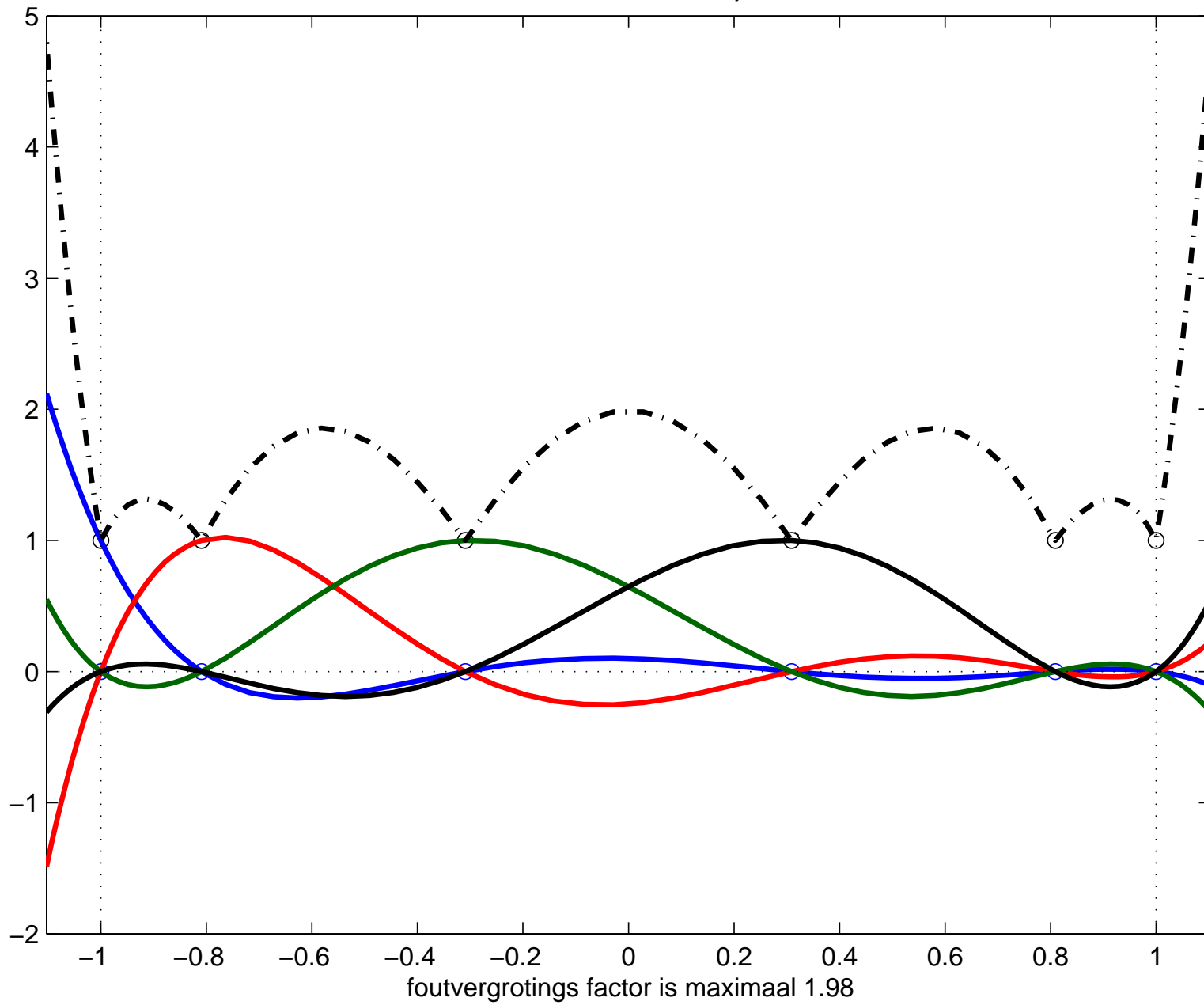
interpolatie van graad 5, basisfuncties  $L_{5,j}$ , foutvergrotingsfunctie



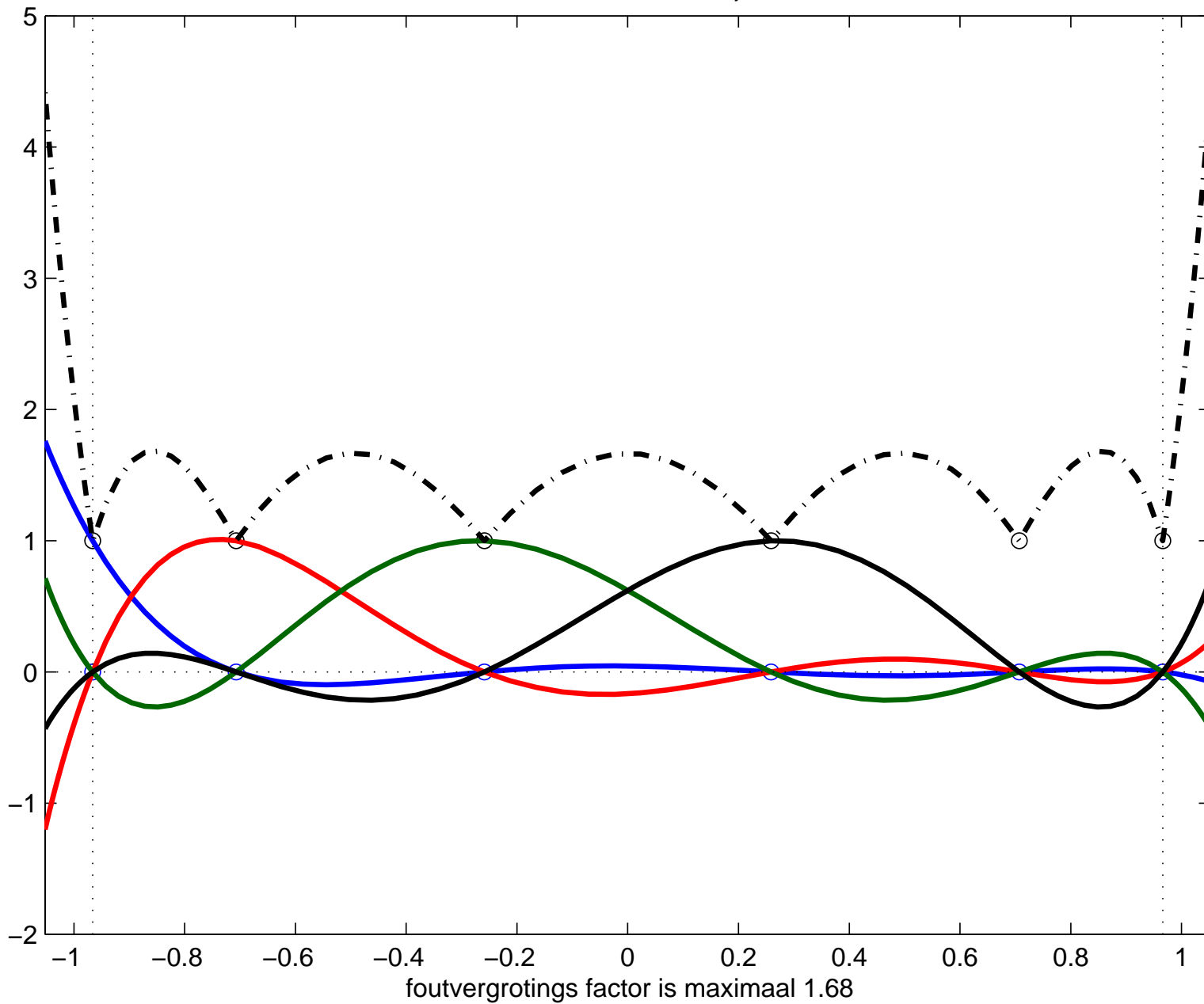
interpolatie van graad 5, basisfuncties  $L_{5,j}$ , foutvergrotingsfunctie



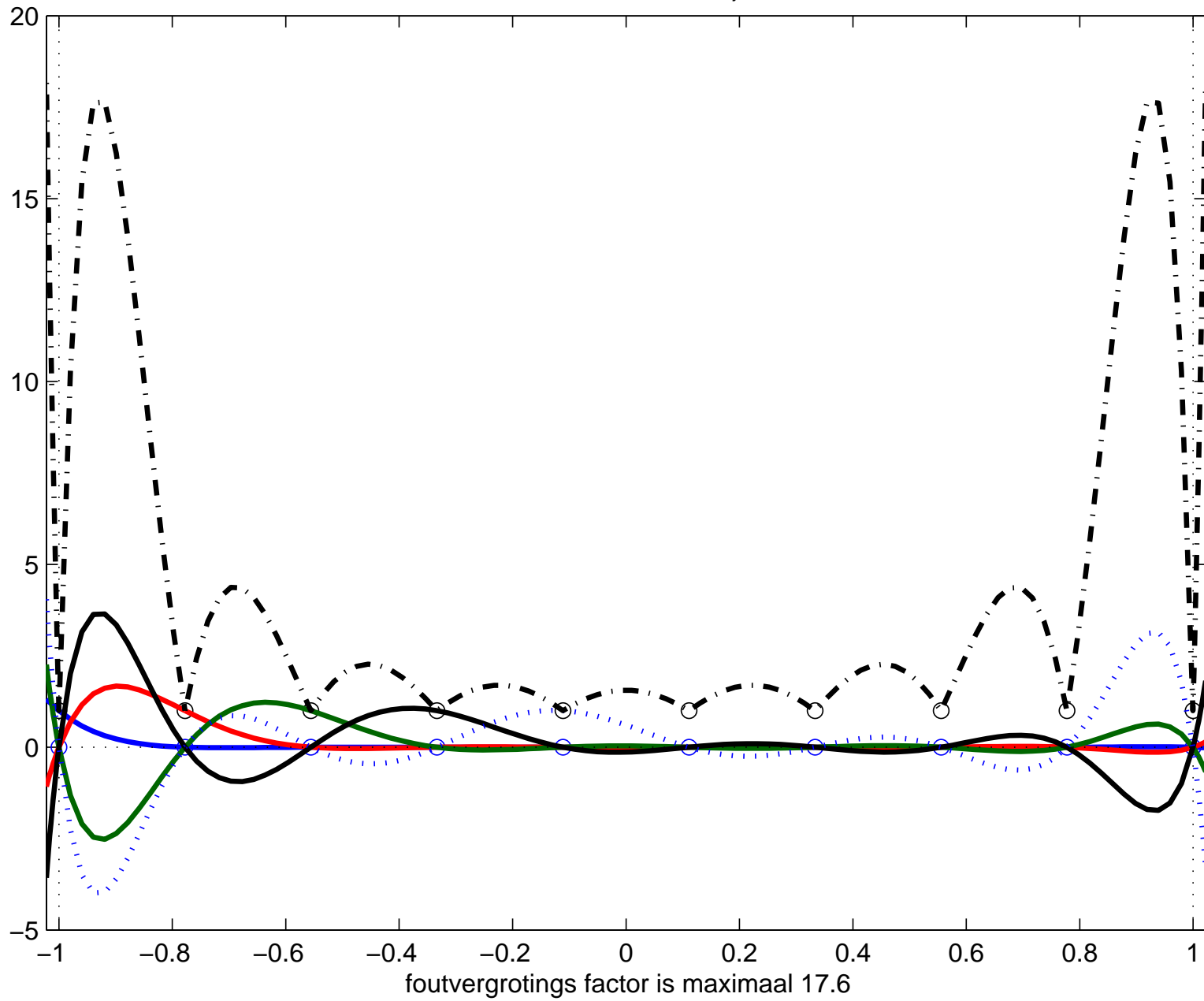
interpolatie van graad 5, basisfuncties  $L_{5,j}$ , foutvergrotingsfunctie



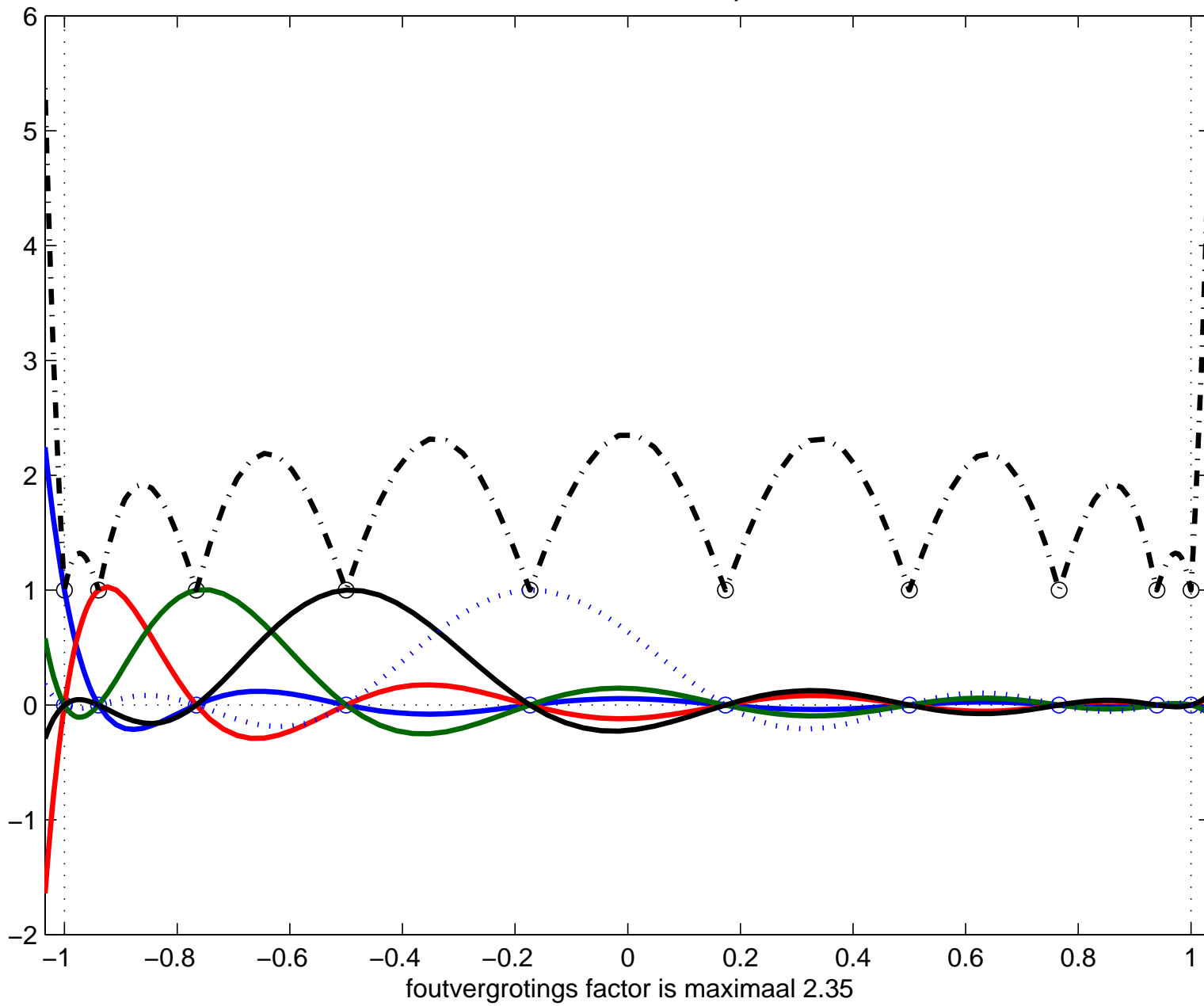
interpolatie van graad 5, basisfuncties  $L_{5,j}$ , foutvergrotingsfunctie



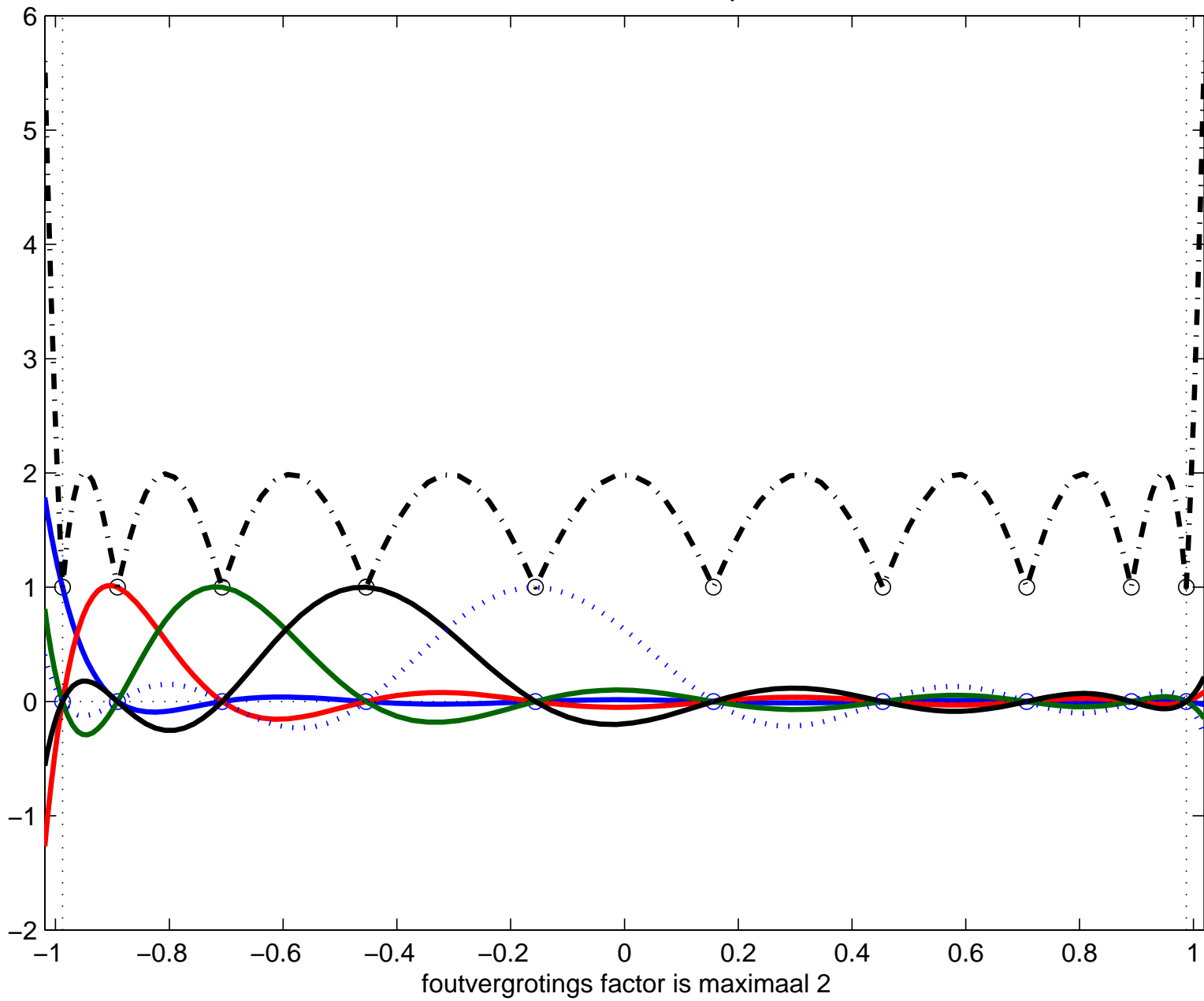
interpolatie van graad 9, basisfuncties  $L_{9,j}$ , foutvergrotingsfunctie



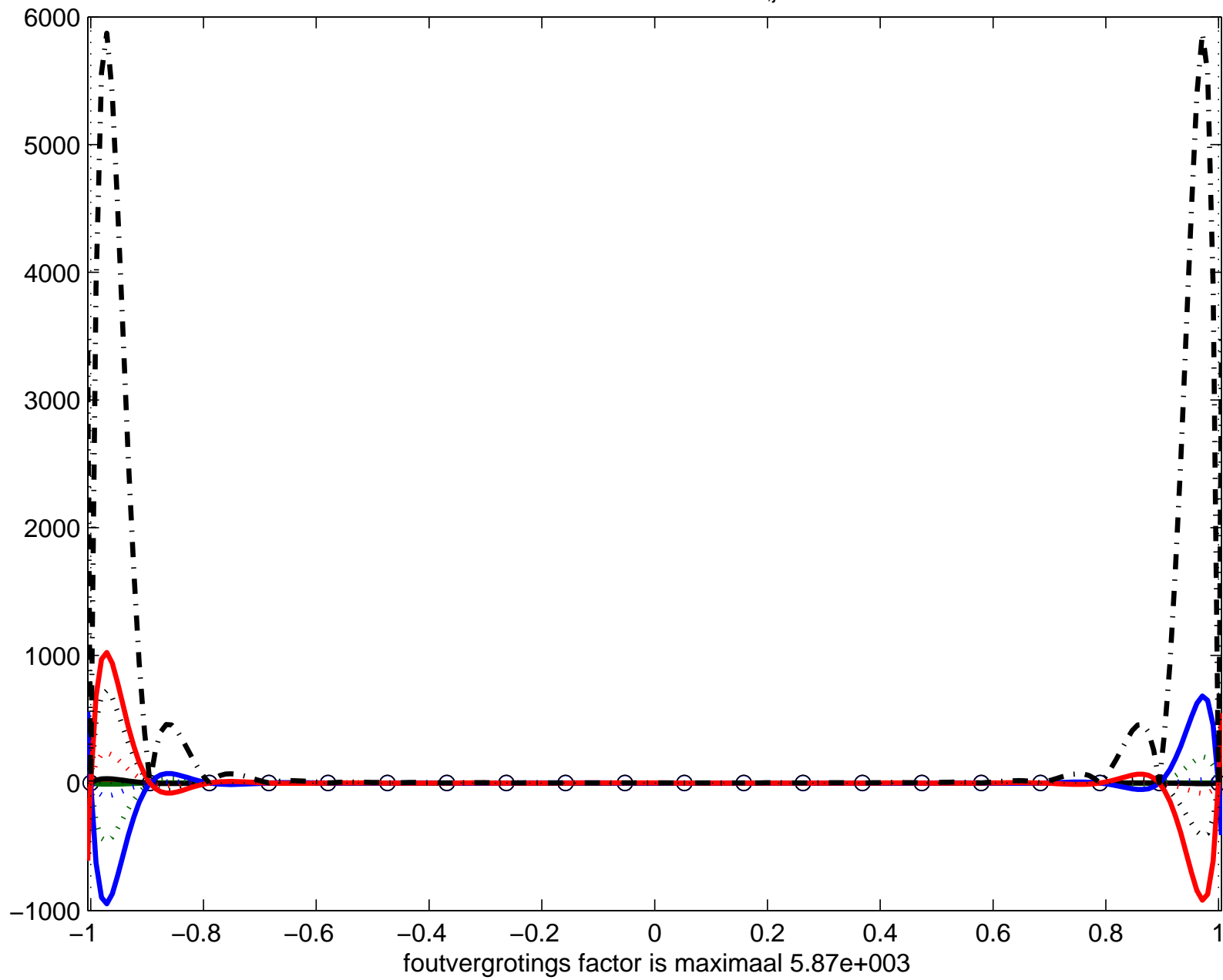
interpolatie van graad 9, basisfuncties  $L_{9,j}$ , foutvergrotingsfunctie



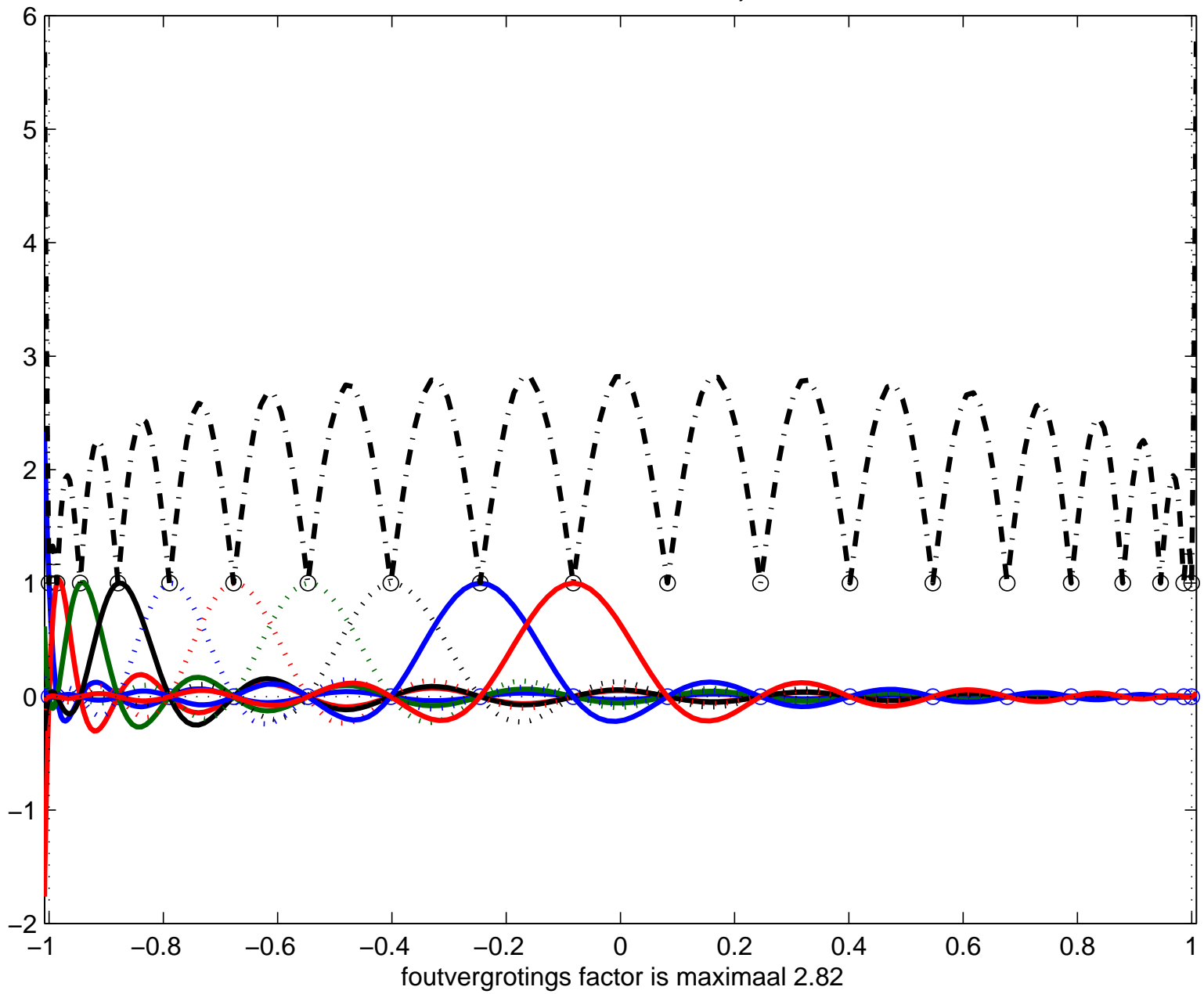
interpolatie van graad 9, basisfuncties  $L_{9,j}$ , foutvergrotingsfunctie



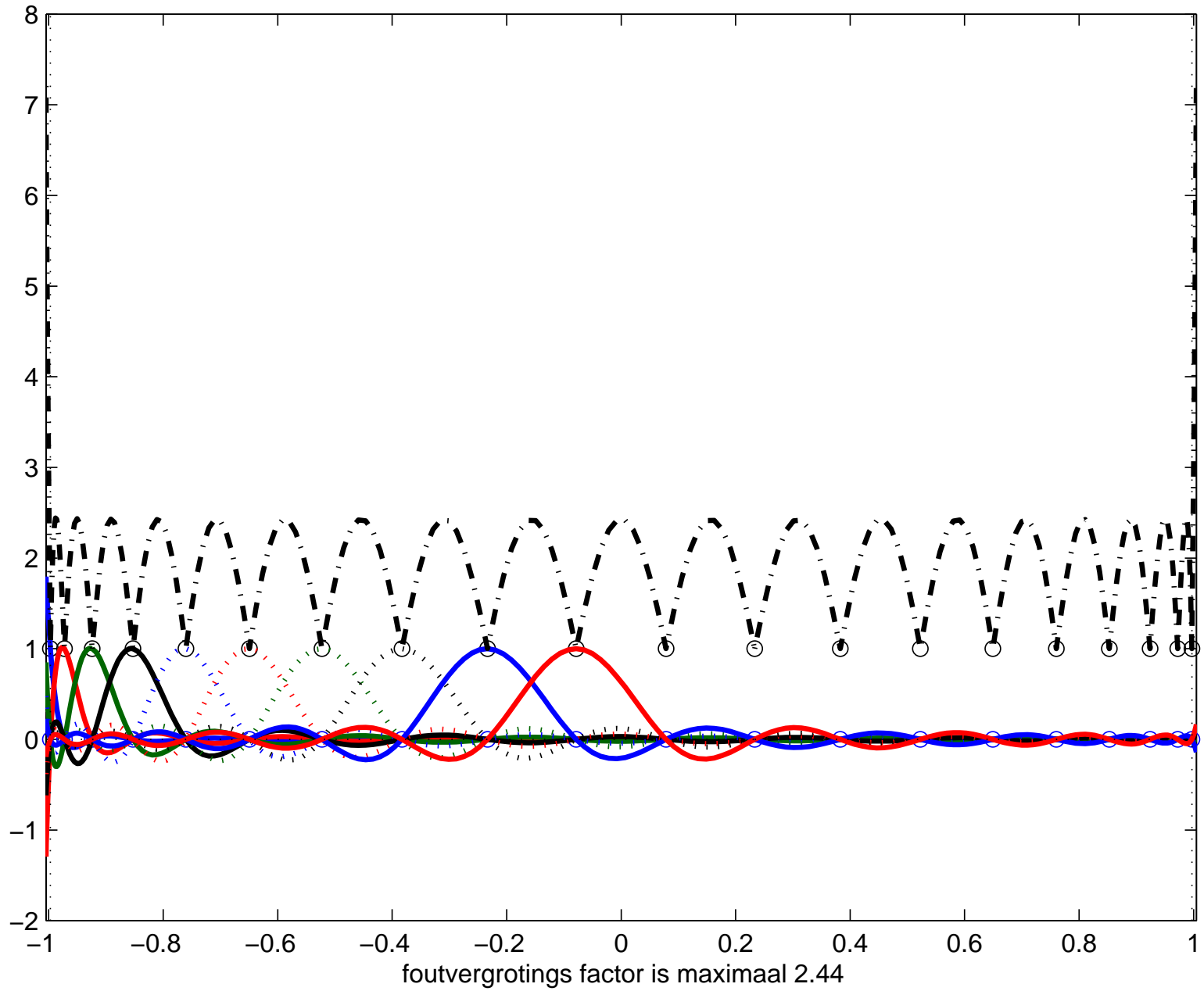
interpolatie van graad 19, basisfuncties  $L_{19,j}$ , foutvergrotingsfunctie



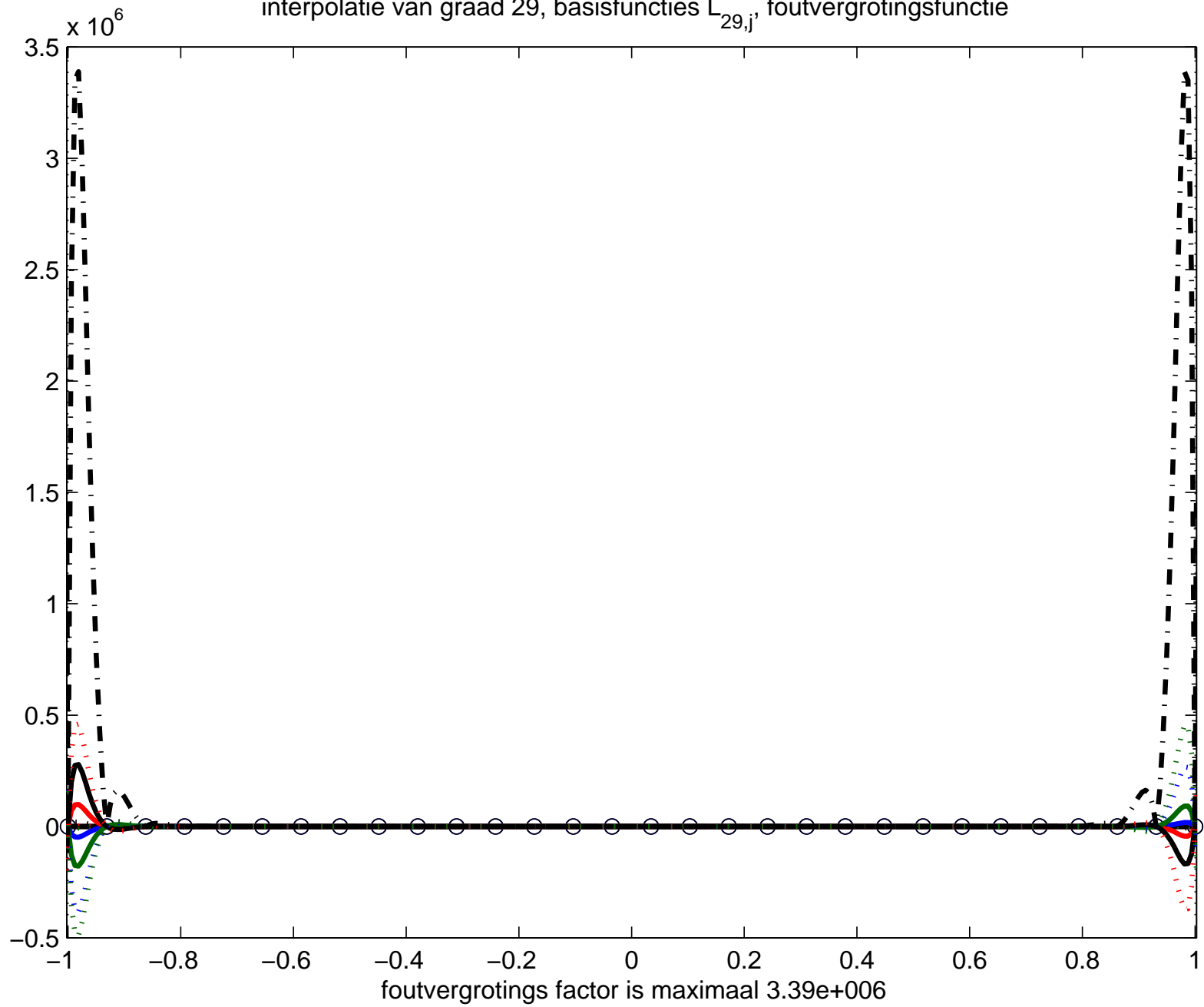
interpolatie van graad 19, basisfuncties  $L_{19,j}$ , foutvergrotingsfunctie



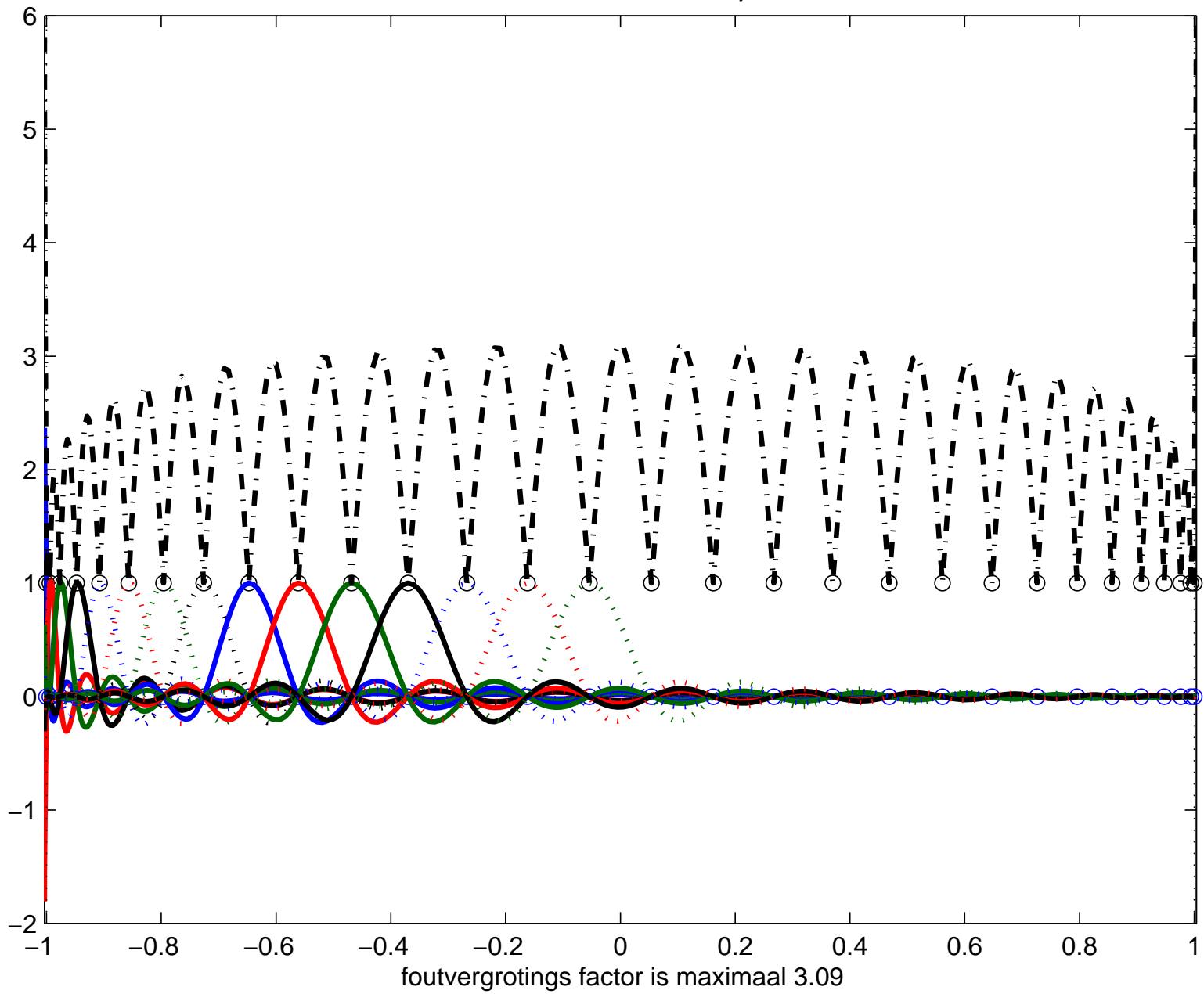
interpolatie van graad 19, basisfuncties  $L_{19,j}$ , foutvergrotingsfunctie



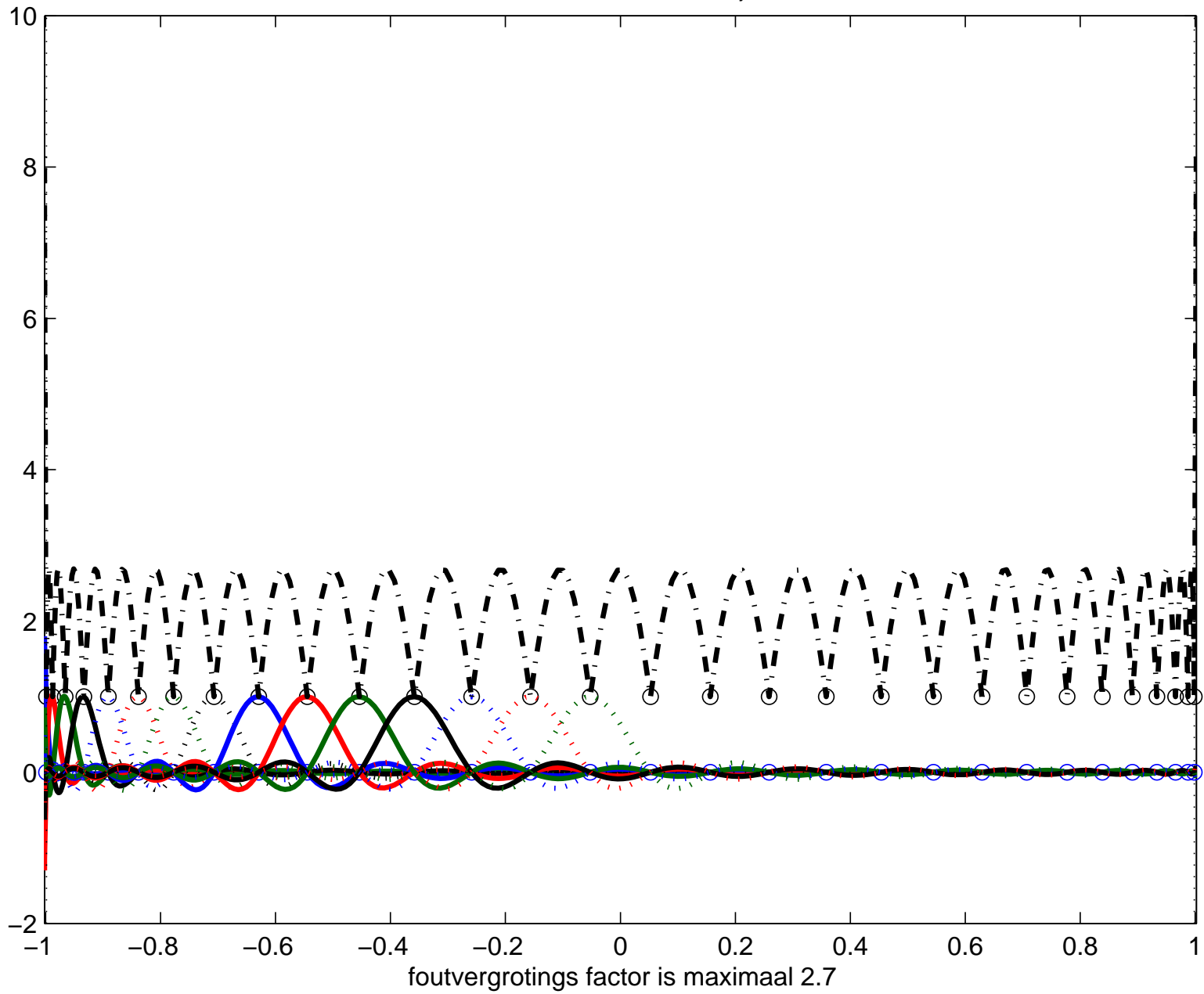
interpolatie van graad 29, basisfuncties  $L_{29,j}$ , foutvergrotingsfunctie



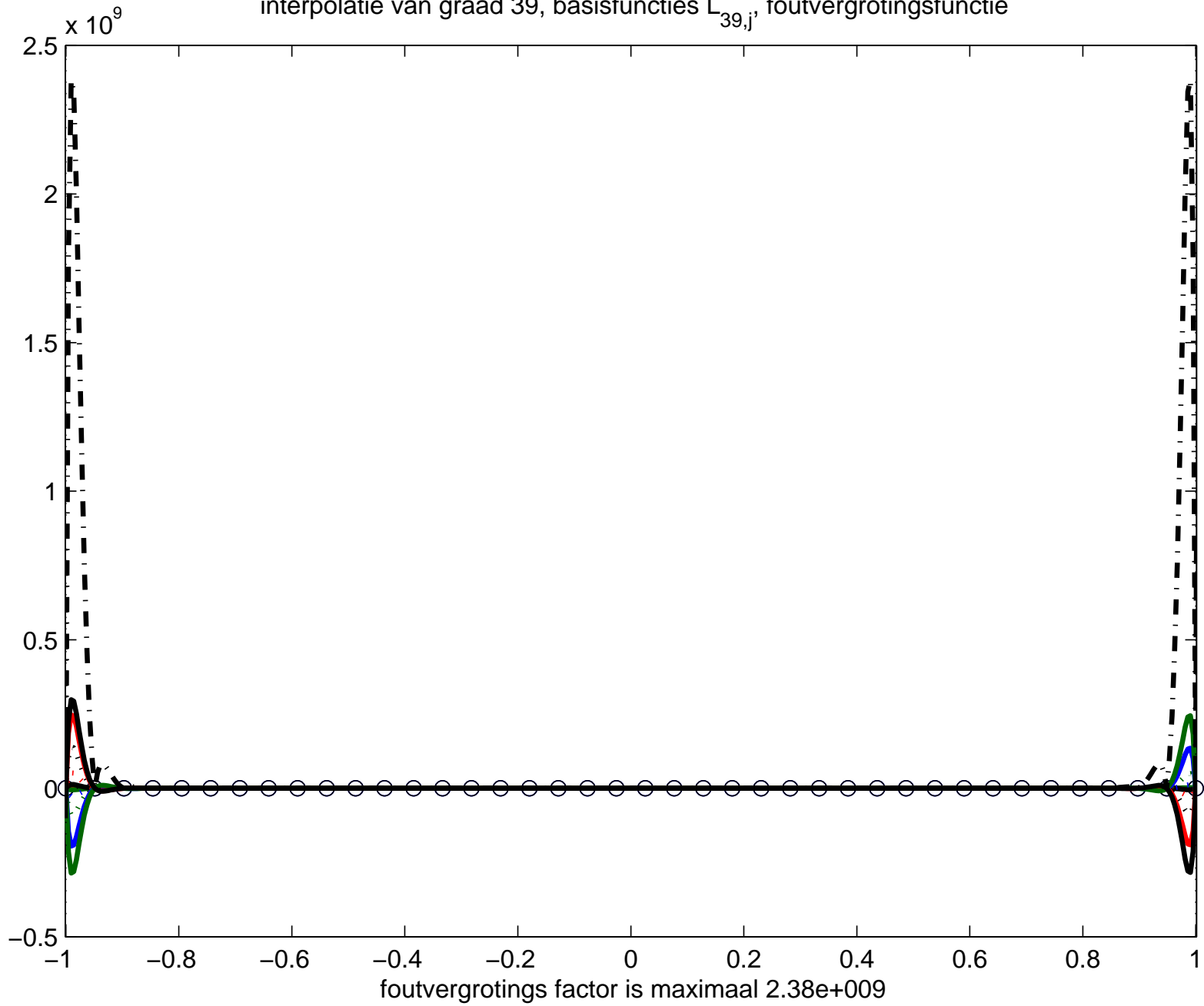
interpolatie van graad 29, basisfuncties  $L_{29,j}$ , foutvergrotingsfunctie



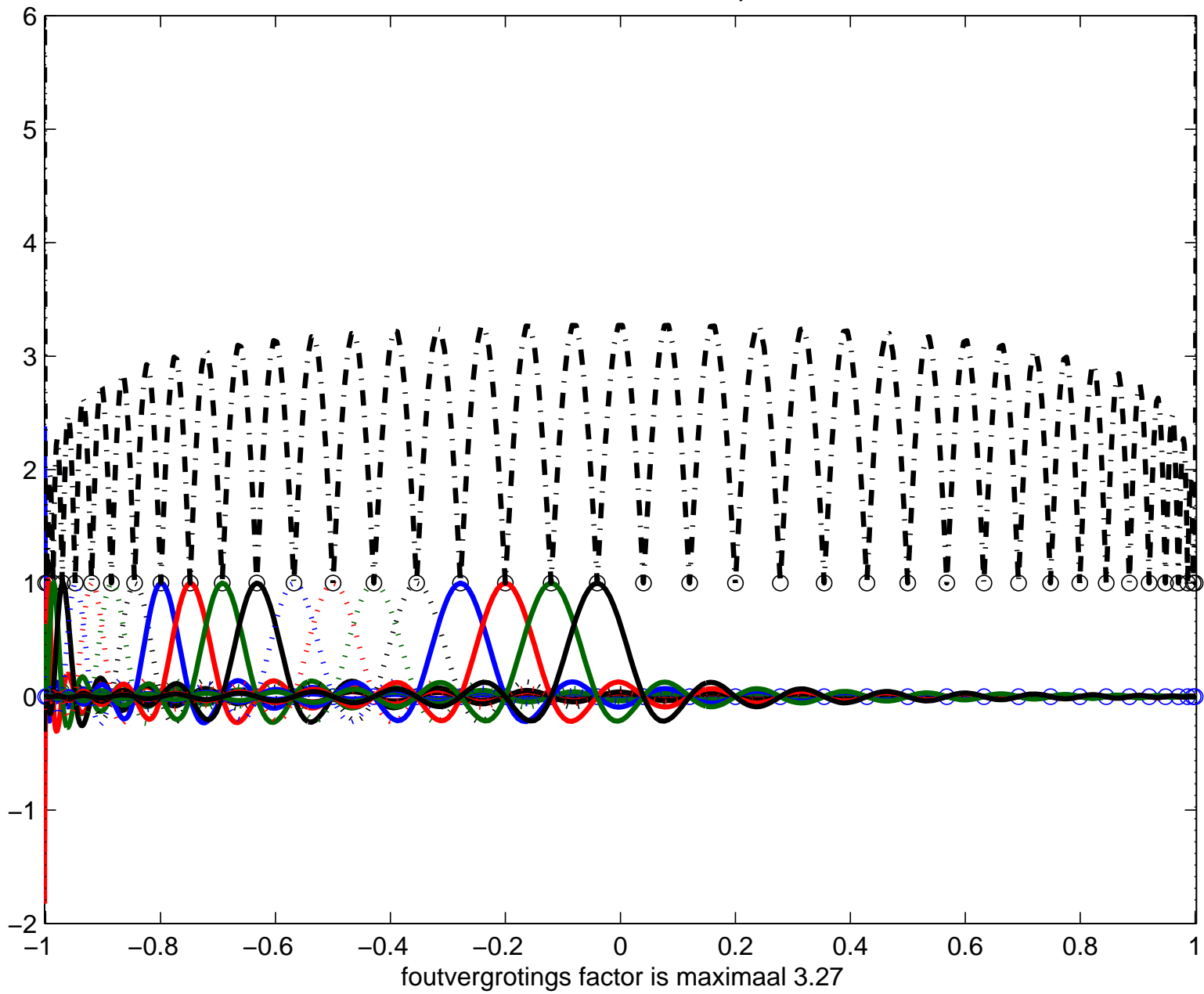
interpolatie van graad 29, basisfuncties  $L_{29,j}$ , foutvergrotingsfunctie



interpolatie van graad 39, basisfuncties  $L_{39,j}$ , foutvergrotingsfunctie

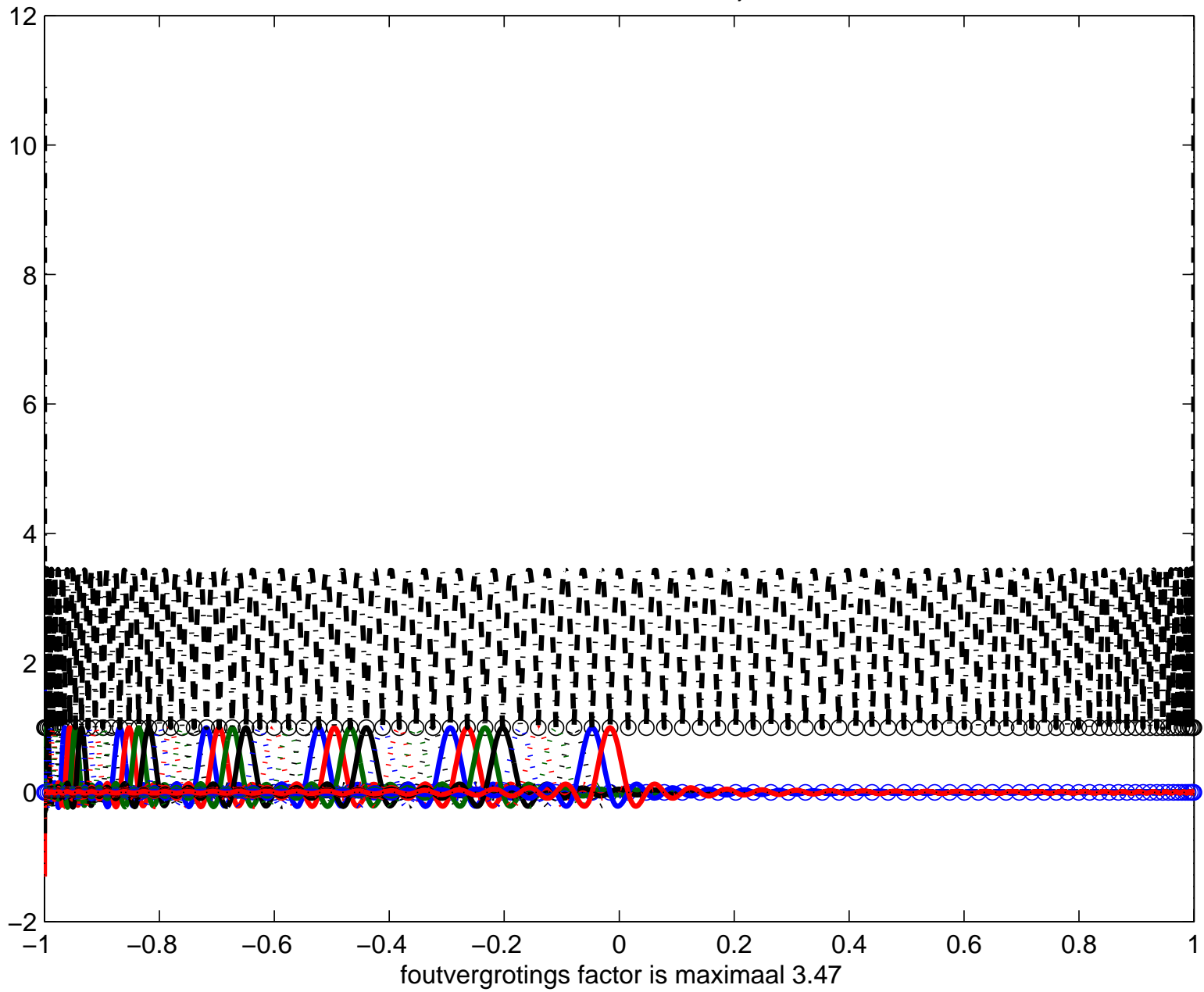


interpolatie van graad 39, basisfuncties  $L_{39,j}$ , foutvergrotingsfunctie





interpolatie van graad 99, basisfuncties  $L_{99,j}$ , foutvergrotingsfunctie



## Conclusies.

- Interpoleren op een equidistante punten rij

$$x_j = -1 + \frac{2j}{k} \quad (j = 0, \dots, k)$$

is, vooral in 'rand intervallen' gevoelig voor fouten op  $f$  waarden.

- Interpoleren op een puntenrij die zich verdicht aan de rand volgens

$$x_j = \cos\left(\pi \frac{j}{k}\right) \quad \text{of} \quad x_j = \cos\left(\pi \frac{j+0.5}{k+1}\right) \quad (j = 0, \dots, k)$$

is vrijwel ongevoelig voor fouten op  $f$  (groeit ten hoogste met een factor van orde  $\log k$ ).