Utrecht, 2 december 2014

Numerieke Wiskunde

Gerard Sleijpen

Universiteit Utrecht
Department of Mathematics

http://www.staff.science.uu.nl/~sleij101/

Nauwkeurigheid

fout $\equiv$ ware waarde - verkregen waarde

Voorbeeld. $f'(x) - \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\frac{1}{2}hf''(\xi)$

voor zekere ξ tussen x en $x+h$

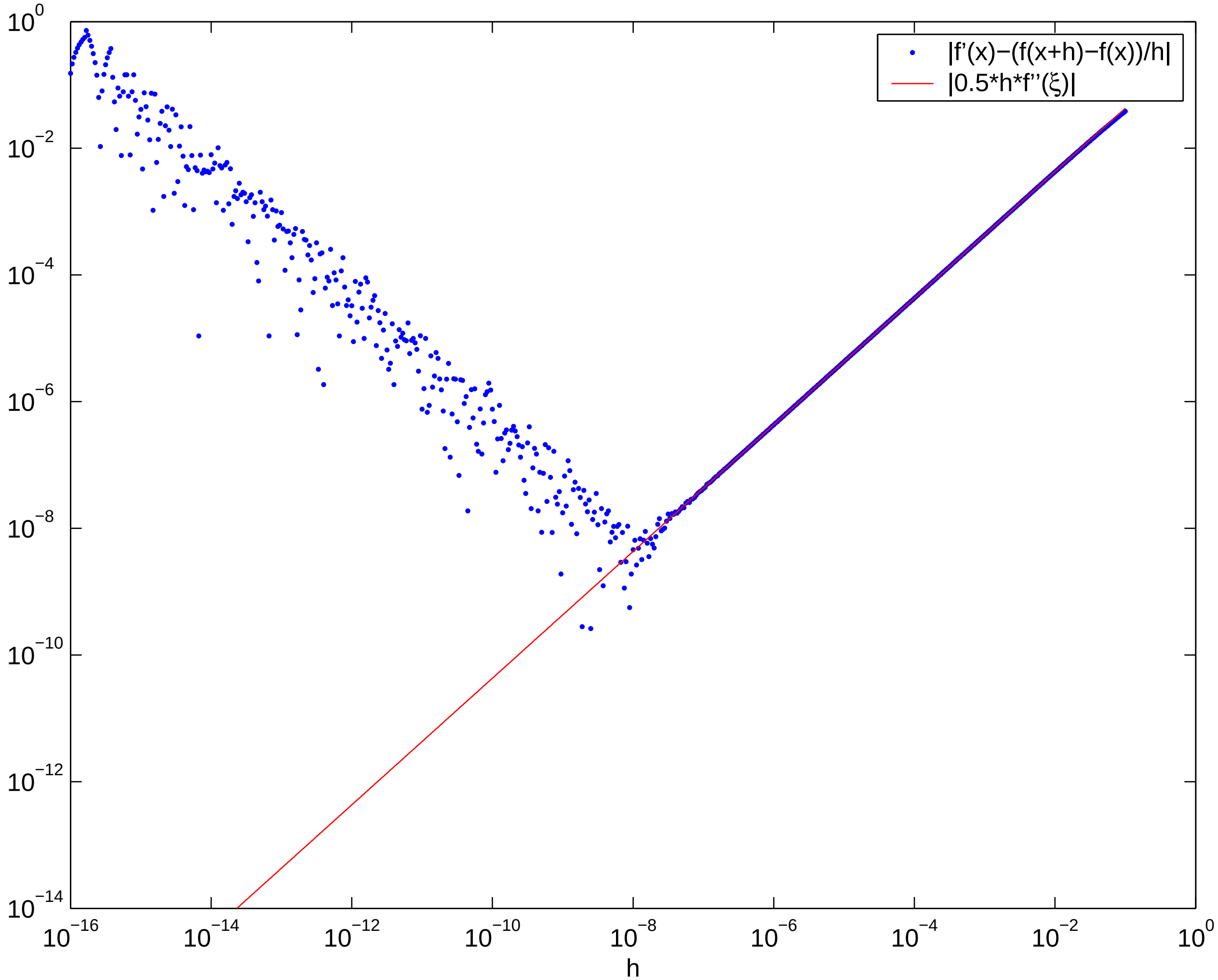
Getallenvoorbeeld. $f(x) = x\sin(x)$. Bereken $f'(\frac{\pi}{4})$.

Analytisch: $f'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$. $(*)$

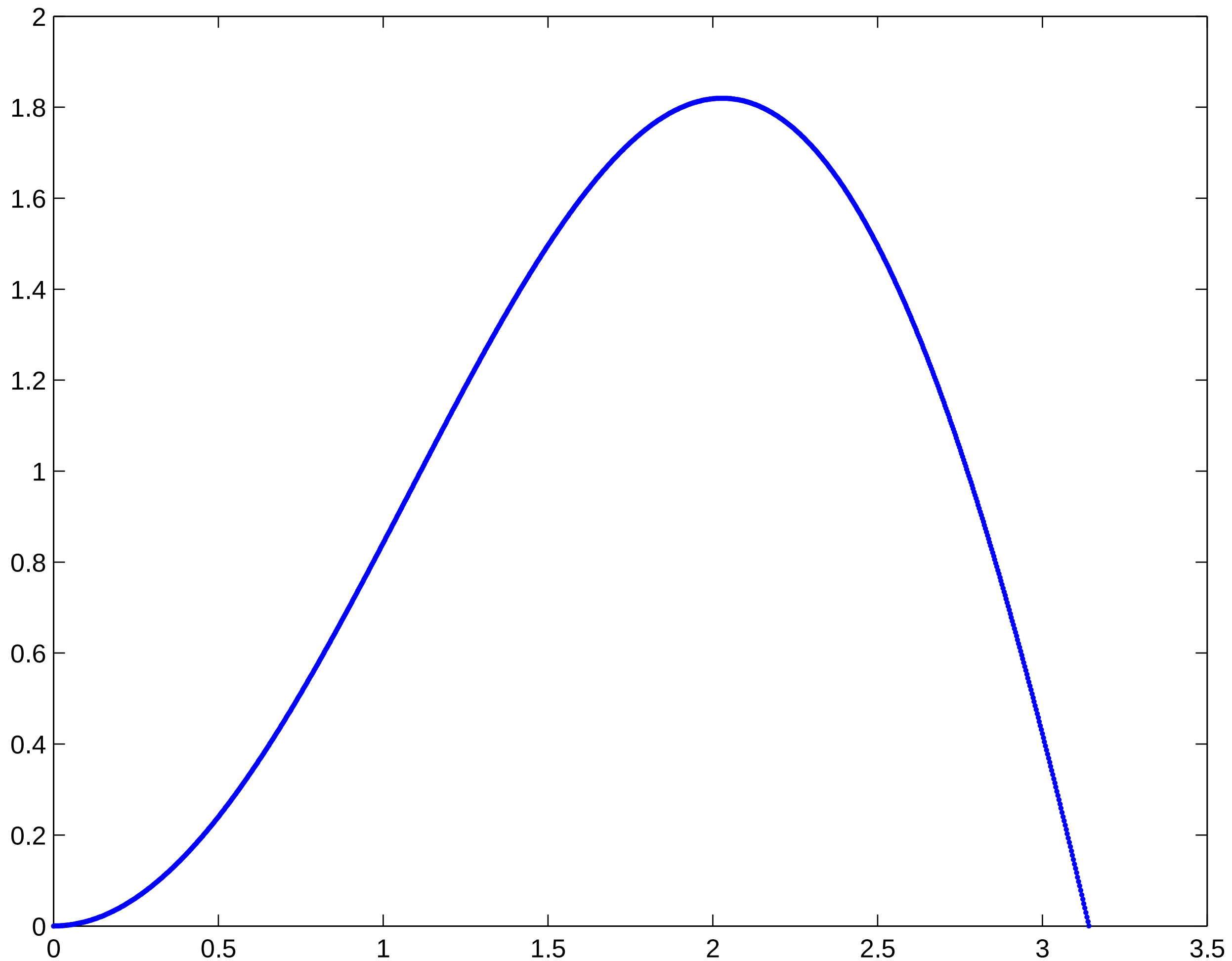
Numeriek: $D_h f(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. $(**)$

$f''(x) = 2\cos(x) - x\sin(x)$, $|f''(\xi)| \leq 2$, $|-\frac{1}{2}hf''(\xi)| \leq h$.

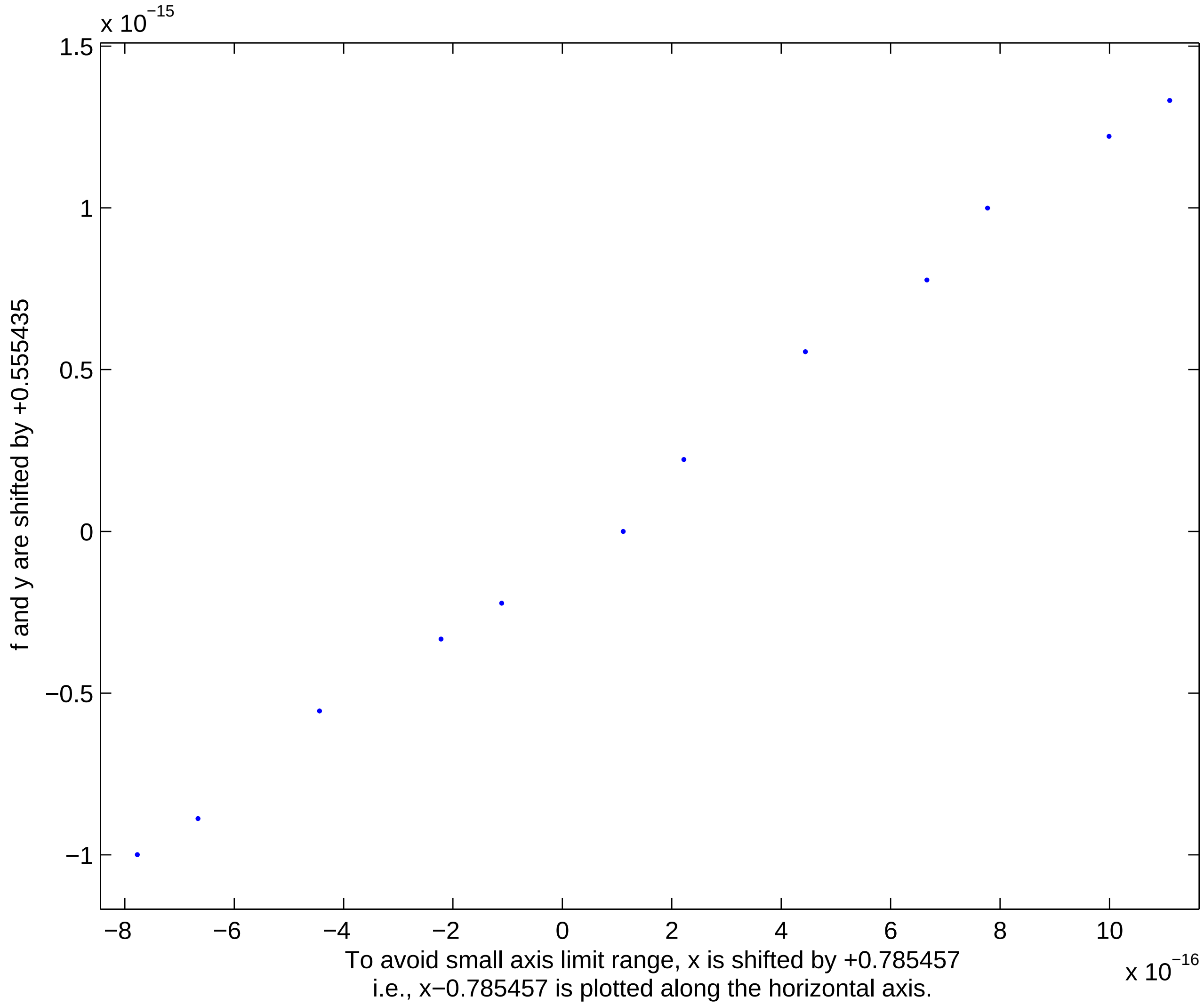
```
Met h=1.00e-003 is f'(x)-Df(x) = -4.289804e-004
Met h=1.00e-006 is f'(x)-Df(x) = -4.294664e-007
Met h=1.00e-009 is f'(x)-Df(x) = +1.762046e-008
Met h=1.00e-012 is f'(x)-Df(x) = +3.254716e-005
Met h=1.00e-015 is f'(x)-Df(x) = +4.122182e-002
```

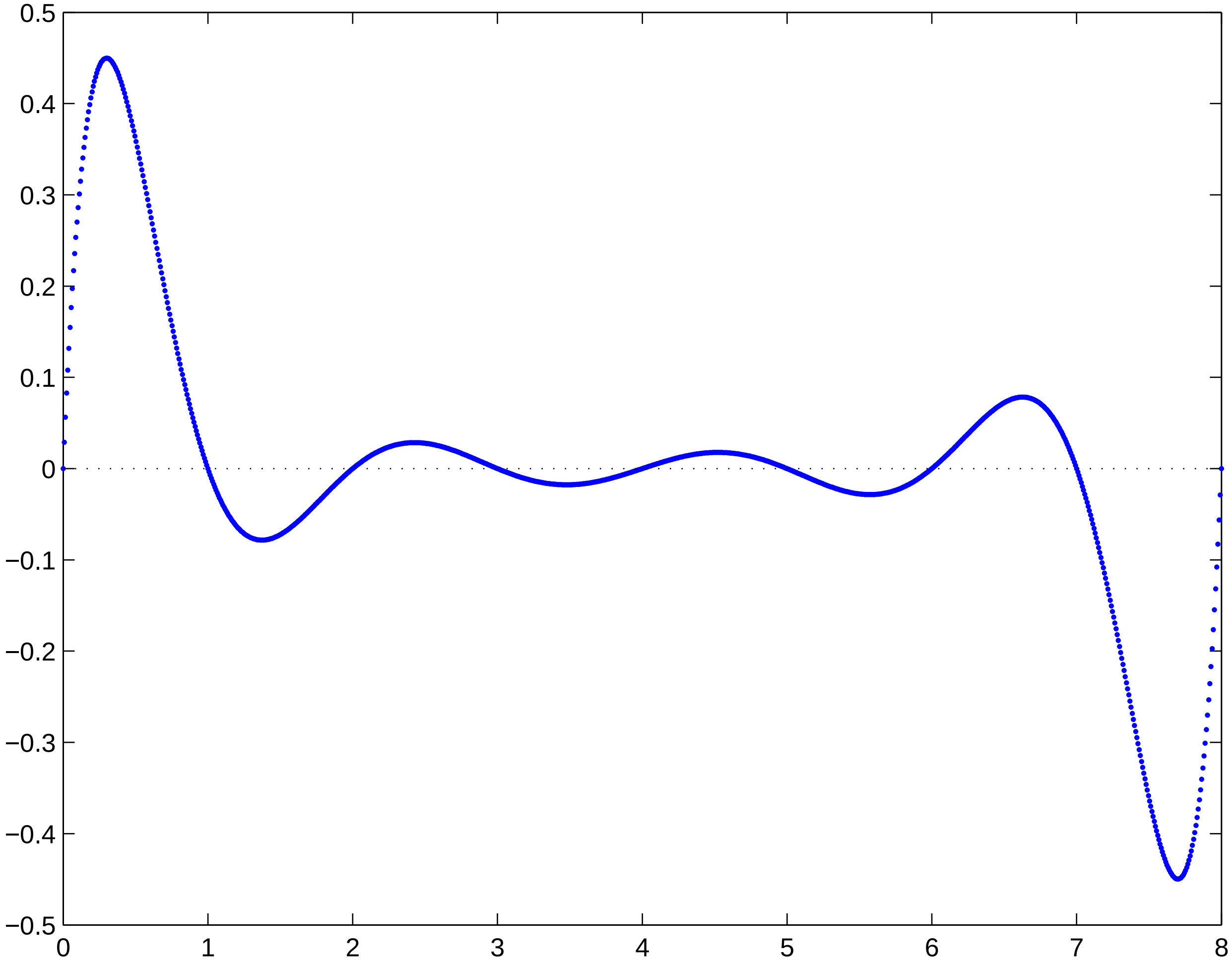


|f'(x)−(f(x+h)−f(x))/h|
|0.5*h*f''(ξ)|
10^0
10^−2
10^−4
10^−6
10^−8
10^−10
10^−12
10^−14
10^−16
h

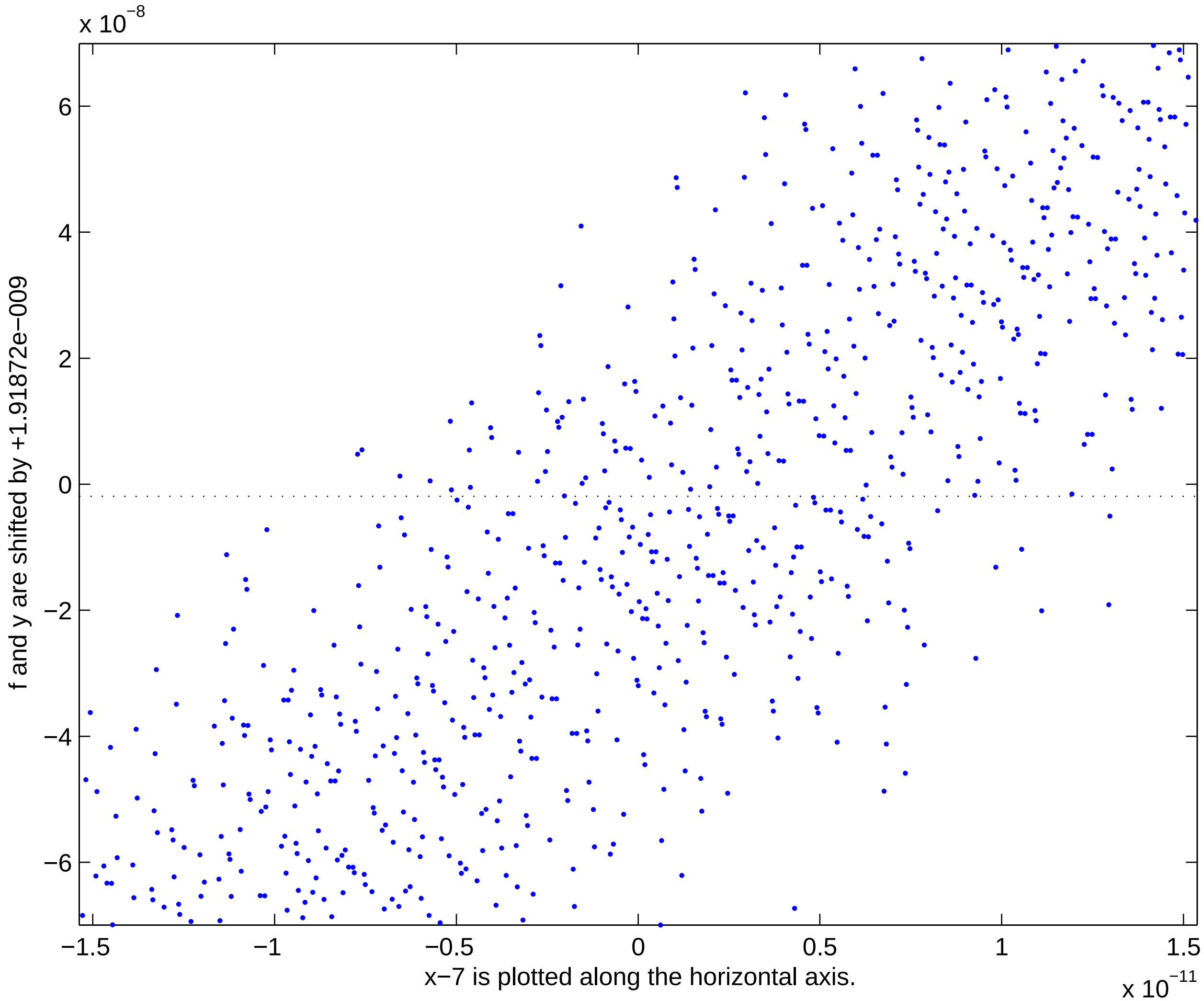


Graph of the function 'x.*sin(x)' (blue) and of y=0 (black :).


x 10^−15
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
f and y are shifted by +0.555435
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
10
x 10^−16
To avoid small axis limit range, x is shifted by +0.785457
i.e., x−0.785457 is plotted along the horizontal axis.



Graph of the function 'pol8' (blue) and of y=0 (black :).


x 10^−8
6
4
2
0
−2
−4
−6
f and y are shifted by +1.91872e−009
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
x−7 is plotted along the horizontal axis.
x 10^−11

De computer rekent met een beperkt (16) aantal decimalen. Dit leidt tot afrondfouten.

Conclusie. Fout heeft twee componenten:

1) **Benaderingsfout**, ook wel **approximatiefout**:
   fout door een wiskundige benaderingsformule te gebruiken

2) **Evaluatiefout**:
   het effect van afrondfouten

Voorbeeld. α, $\alpha^\star$ exacte, resp., berekende grootheid,
Zij $f^\star(x+h)$ de berekende functie waarde $f(x+h)$.
Dan $|f(x+h) - f^\star(x+h)| \leq \epsilon$ zekere $\epsilon > 0$.
   $\epsilon = 1.3\,10^{-16}$ in geval $f(x) = x\sin(x)$
   $\epsilon \approx 4\,10^{-8}$ in geval f 9de graads polynoom

Opmerking. Bovengrens ϵ kan geschat worden.

Verder **geen** structuur in de evaluatiefout!

De computer rekent met een beperkt (16) aantal decimalen. Dit leidt tot afrondfouten.

Conclusie. Fout heeft twee componenten:

1) **Benaderingsfout**, ook wel **approximatiefout**:
fout door een wiskundige benaderingsformule te gebruiken

2) **Evaluatiefout**:
het effect van afrondfouten

$$\text{Fout} = \text{approximatiefout} + \text{evaluatiefout}$$

$$f'(x) - D_h f^\star(x) = [f'(x) - D_h f(x)] + [D_h f(x) - D_h^\star f(x)]$$

Approximatiefout **heeft structuur** $= -\frac{1}{2} h f''(\xi) \approx \frac{1}{2} h f''(x)$

Evaluatiefout heeft **schatbare bovengrens**, $\leq \frac{2\epsilon}{h}$

verder **geen** bruikbare structuur

$$f'(x) \approx D_h^{\star} f(x) \qquad\qquad c \equiv -\tfrac{1}{2} f''(x)$$

Hoe kiezen we h?

1) **Als schattingen voor ϵ en $|c| = |\frac{1}{2} f''(x)|$ beschikbaar zijn.**

$$\frac{\epsilon}{h_{\text{best}}} = |c|\, h_{\text{best}}, \qquad h_{\text{best}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{|c|}}, \qquad \frac{\epsilon}{h_{\text{best}}} + |c|\, h_{\text{best}} = 2\sqrt{\epsilon\, |c|}$$

Hoe nauwkeurig moeten die schattingen zijn?

Vaak voldoende als

de fout in een of twee cijfers bekend is.

$$f'(x) \approx D_h^\star f(x) \qquad\qquad c \equiv -\tfrac{1}{2} f''(x)$$

Hoe kiezen we h?

1) **Als schattingen voor ϵ en $|c| = |\frac{1}{2} f''(x)|$ beschikbaar zijn.**

2) **Anders.**

Uit grafiek leren we dat

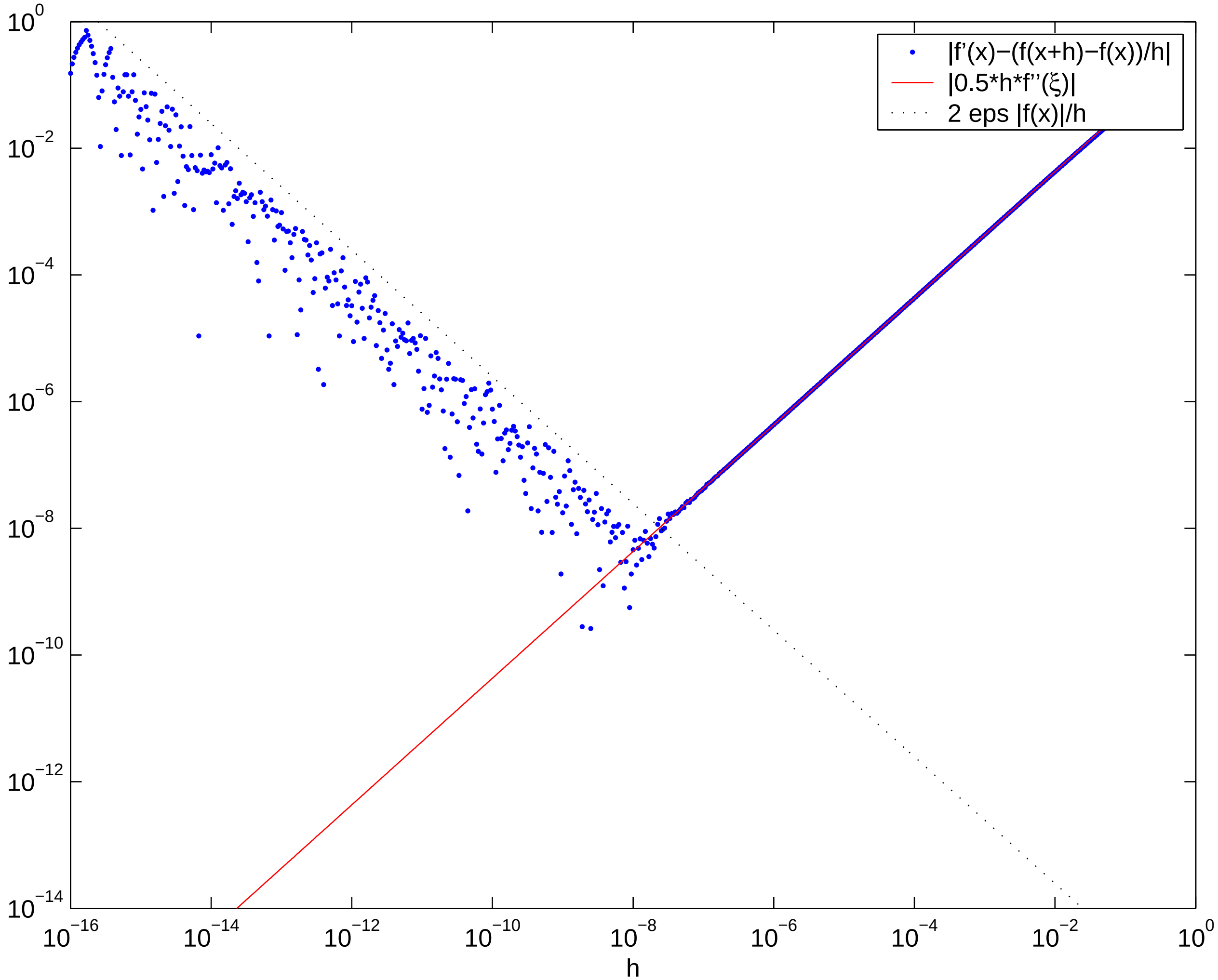
$$\textbf{fout} \approx ch \ \ \textbf{als} \ \ h > h_{\text{best}}$$

Strategie: kies h_0
bereken $D^\star_{h_0} f(x)$, $D^\star_{\frac{1}{2}h_0} f(x)$, $D^\star_{\frac{1}{4}h_0} f(x)$

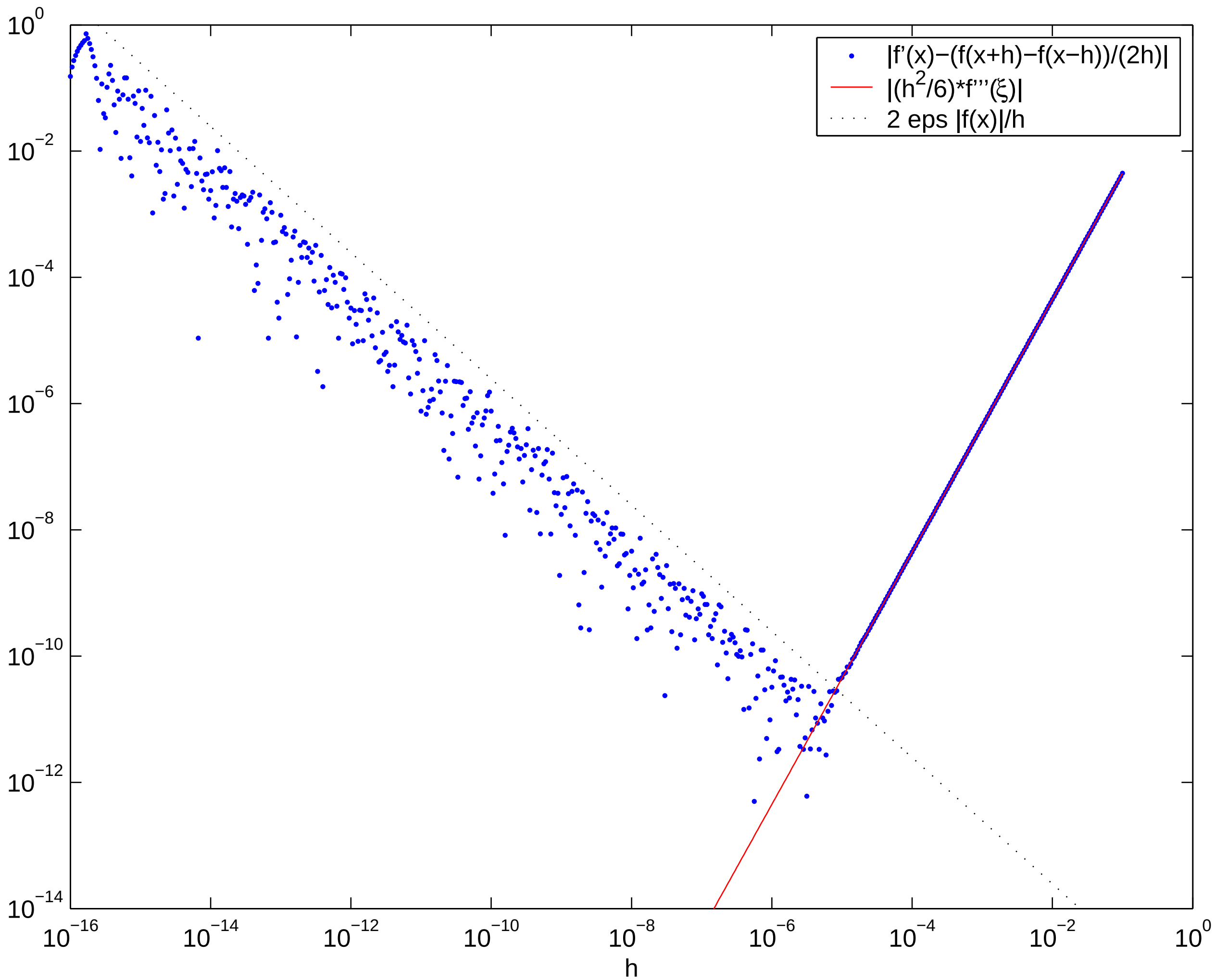
Als $[D^\star_{\frac{1}{4}h_0} f(x) - D^\star_{\frac{1}{2}h_0} f(x)] \approx \frac{1}{2}[D^\star_{\frac{1}{2}h_0} f(x) - D^\star_{h_0} f(x)]$,

dan $\text{fout}_{\frac{1}{2}h_0} \approx D^\star_{\frac{1}{2}h_0} f(x) - D^\star_{h_0} f(x)$

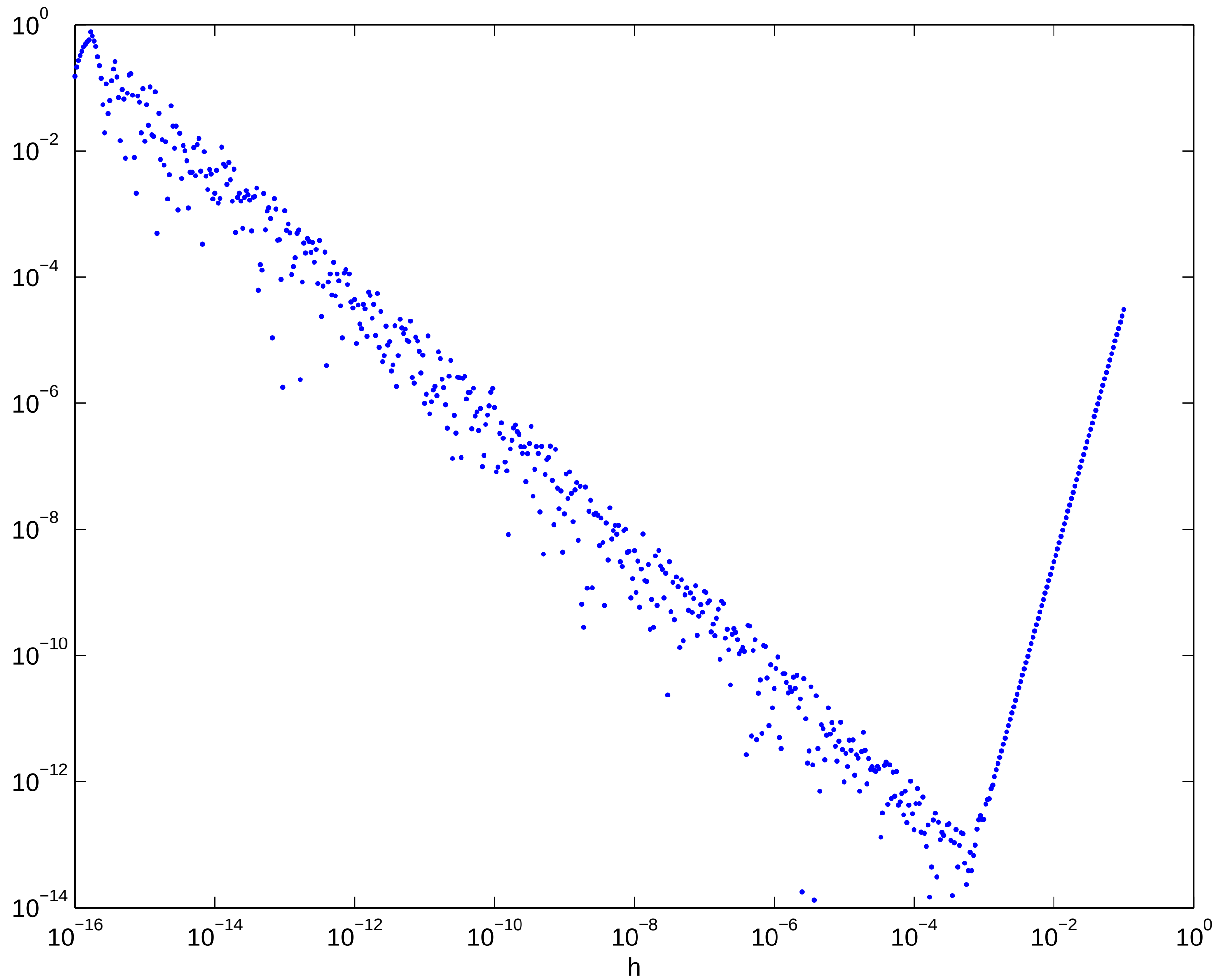
anders, kies grotere h_0 en probeer opnieuw.



|f'(x)−(f(x+h)−f(x))/h|
|0.5*h*f''(ξ)|
2 eps |f(x)|/h
10^0
10^−2
10^−4
10^−6
10^−8
10^−10
10^−12
10^−14
10^−16
h



|f'(x)−(f(x+h)−f(x−h))/(2h)|
|(h^2/6)*f'''(ξ)|
2 eps |f(x)|/h
10^0
10^-2
10^-4
10^-6
10^-8
10^-10
10^-12
10^-14
10^-16
10^-14
10^-12
10^-10
10^-8
10^-6
10^-4
10^-2
10^0
h



10^{0}
10^{-2}
10^{-4}
10^{-6}
10^{-8}
10^{-10}
10^{-12}
10^{-14}
10^{-16}
10^{-14}
10^{-12}
10^{-10}
10^{-8}
10^{-6}
10^{-4}
10^{-2}
10^{0}
h

Differentieer f in x met stapgrootte $h, \frac{1}{2}h, \frac{1}{4}h, \ldots$

1.30085742	1.26243656	1.25800942
1.28281157	1.26246523	1.26135208
1.27292253	1.26246703	1.26218834
1.26776509	1.26246714	1.26239744
1.26513362	1.26246715	1.26244972

Differentieer f in x met stapgrootte $h, \frac{1}{2}h, \frac{1}{4}h, \ldots$

1.30085742	1.26243656	1.25800942
1.28281157	1.26246523	1.26135208
1.27292253	1.26246703	1.26218834
1.26776509	1.26246714	1.26239744
1.26513362	1.26246715	1.26244972

-0.01805	2.867e-005	0.003343
-0.009889	1.796e-006	0.0008363
-0.005157	1.123e-007	0.0002091
-0.002631	7.022e-009	5.228e-005

Differentieer f in x met stapgrootte $h, \frac{1}{2}h, \frac{1}{4}h, \ldots$

1.30085742	1.26243656	1.25800942
1.28281157	1.26246523	1.26135208
1.27292253	1.26246703	1.26218834
1.26776509	1.26246714	1.26239744
1.26513362	1.26246715	1.26244972

-0.01805	2.867e-005	0.003343
-0.009889	1.796e-006	0.0008363
-0.005157	1.123e-007	0.0002091
-0.002631	7.022e-009	5.228e-005

1.825	15.96	3.997
1.917	15.99	3.999
1.96	16	4

Differentieer f in x met stapgrootte $h, \frac{1}{2}h, \frac{1}{4}h, \ldots$

1.26289613	1.26246670	1.26246715
1.26268175	1.26246704	1.26246715
1.26257448	1.26246712	1.26246715
1.26252082	1.26246714	1.26246715
1.26249399	1.26246715	1.26246715

Differentieer f in x met stapgrootte $h, \frac{1}{2}h, \frac{1}{4}h, \ldots$

1.26289613	1.26246670	1.26246715
1.26268175	1.26246704	1.26246715
1.26257448	1.26246712	1.26246715
1.26252082	1.26246714	1.26246715
1.26249399	1.26246715	1.26246715

-0.0002144	3.346e-007	1.434e-013
-0.0001073	8.365e-008	-7.394e-014
-5.366e-005	2.091e-008	4.07e-013
-2.683e-005	5.227e-009	-1.036e-012

Differentieer f in x met stapgrootte $h, \frac{1}{2}h, \frac{1}{4}h, \ldots$

1.26289613	1.26246670	1.26246715
1.26268175	1.26246704	1.26246715
1.26257448	1.26246712	1.26246715
1.26252082	1.26246714	1.26246715
1.26249399	1.26246715	1.26246715

-0.0002144	3.346e-007	1.434e-013
-0.0001073	8.365e-008	-7.394e-014
-5.366e-005	2.091e-008	4.07e-013
-2.683e-005	5.227e-009	-1.036e-012

1.998	4	-1.94
1.999	4	-0.1817
2	4.001	-0.3928