Utrecht, 13 oktober 2009

Numerieke Wiskunde

Gerard Sleijpen

Universiteit Utrecht
Department of Mathematics

http://www.math.uu.nl/people/sleijpen

Evaluatiefouten

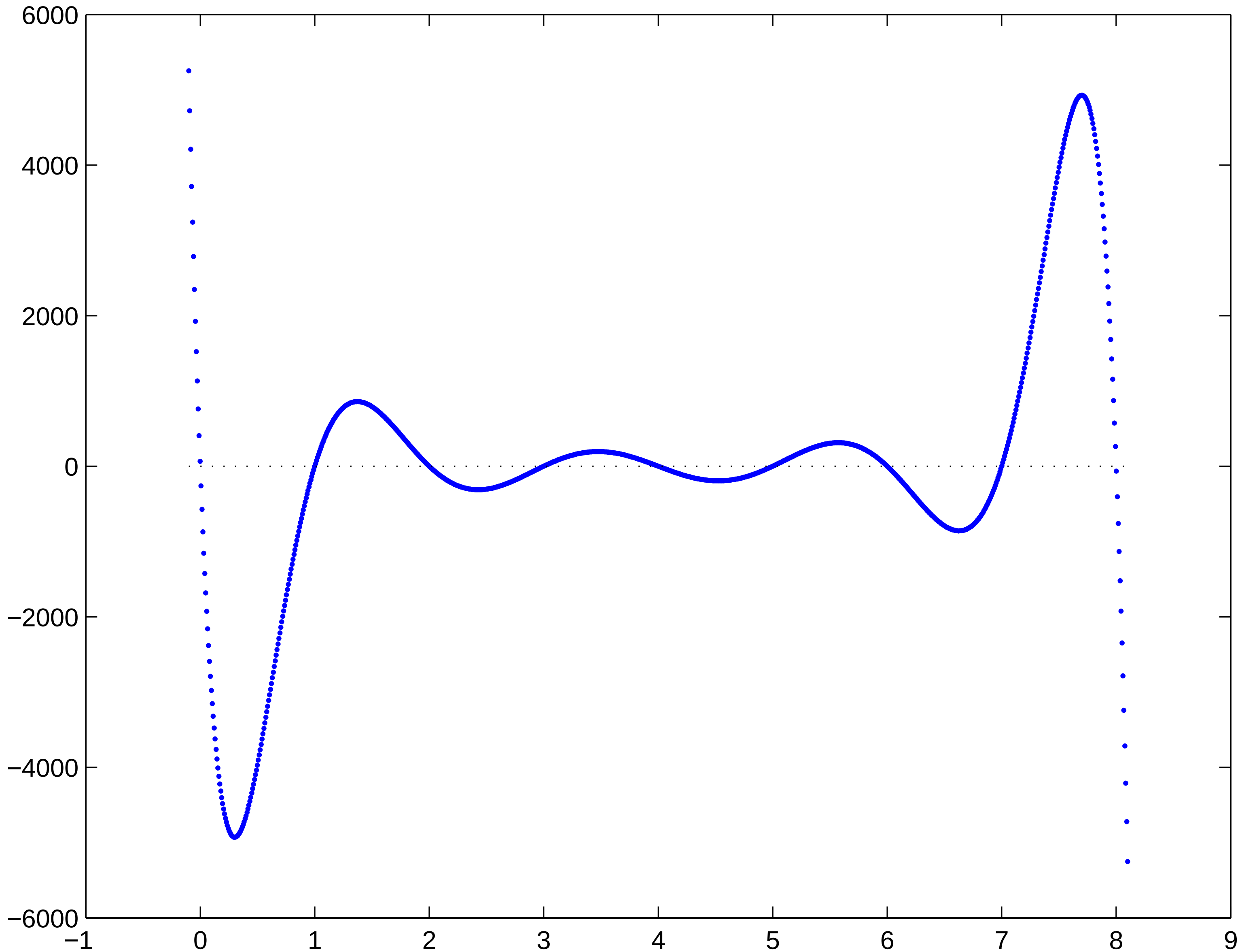
Voorbeeld. Beschouw $f(x) \equiv -x(1-x)(2-x)\cdot\ldots\cdot(x-8)$.
Hoe groot is de evaluatie fout in $f(7)$?

Schrijf uit als machten van x:

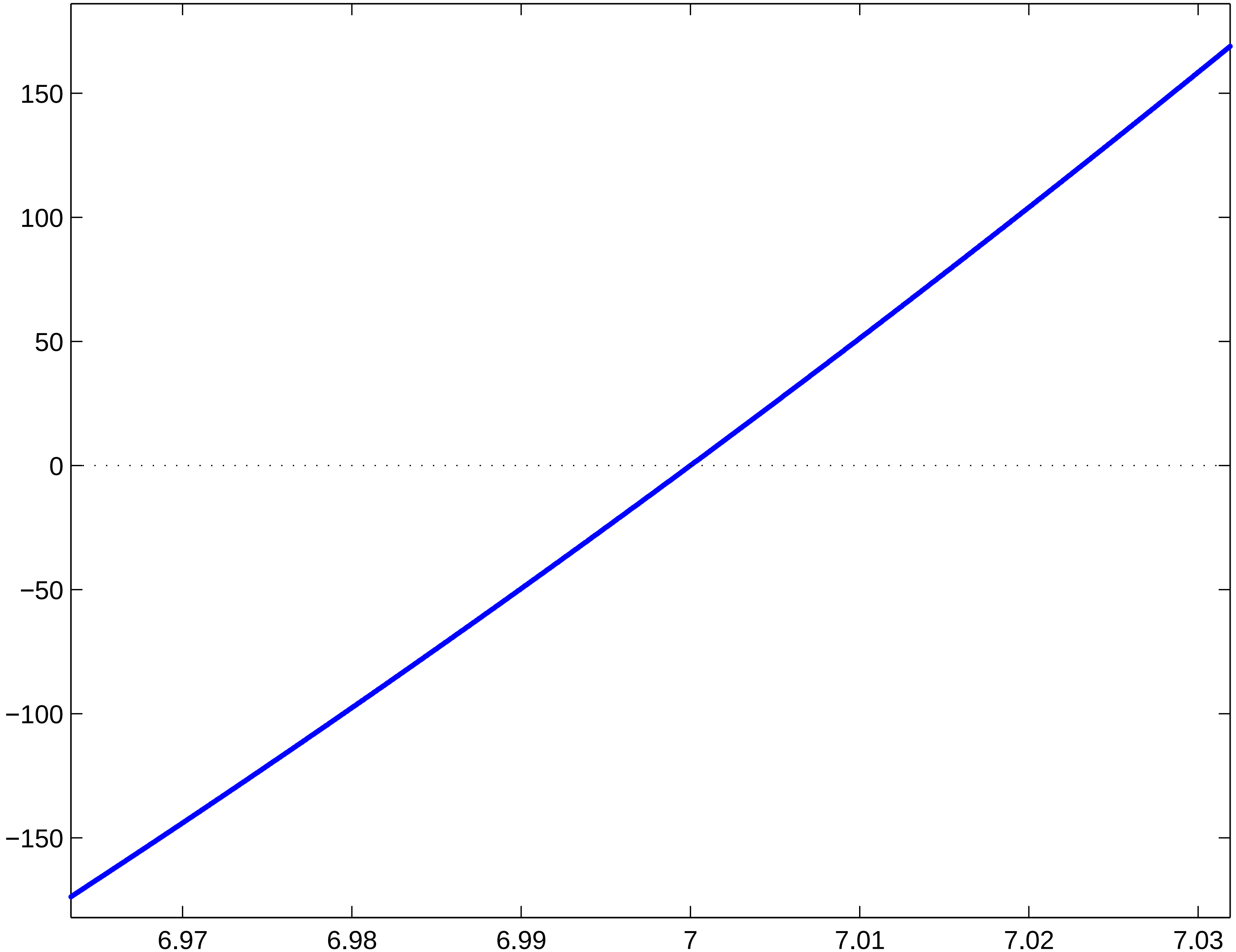
$$f(x) = a_1x^9 + a_2x^8 + a_3x^7 + \ldots + a_9x + a_{10},$$

waarbij $a = [-1, 36, -546, 4536, -22449, 67284, -118124, 109584, -40320, 0]$.

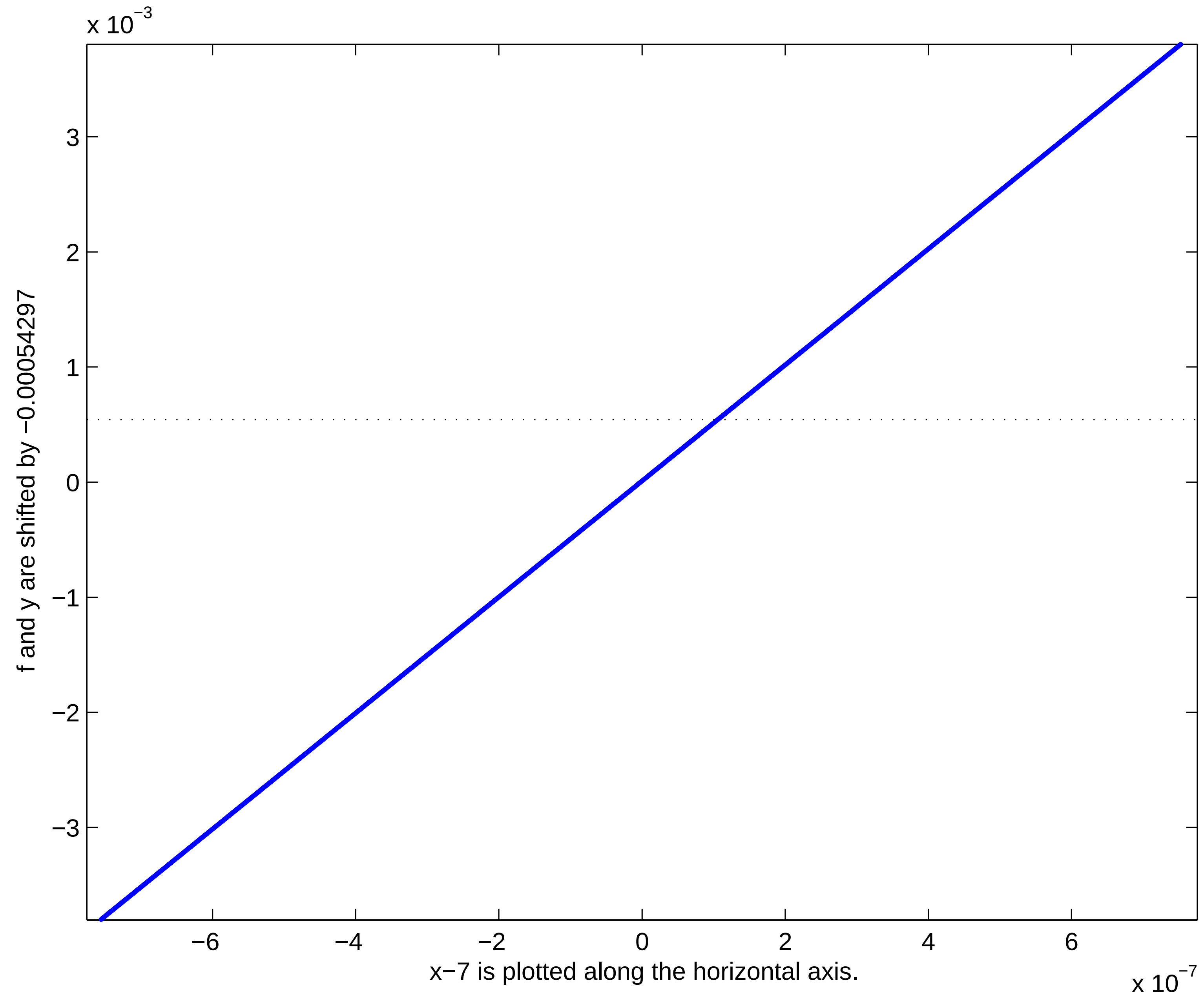
We zoomen in rond $x = 7$

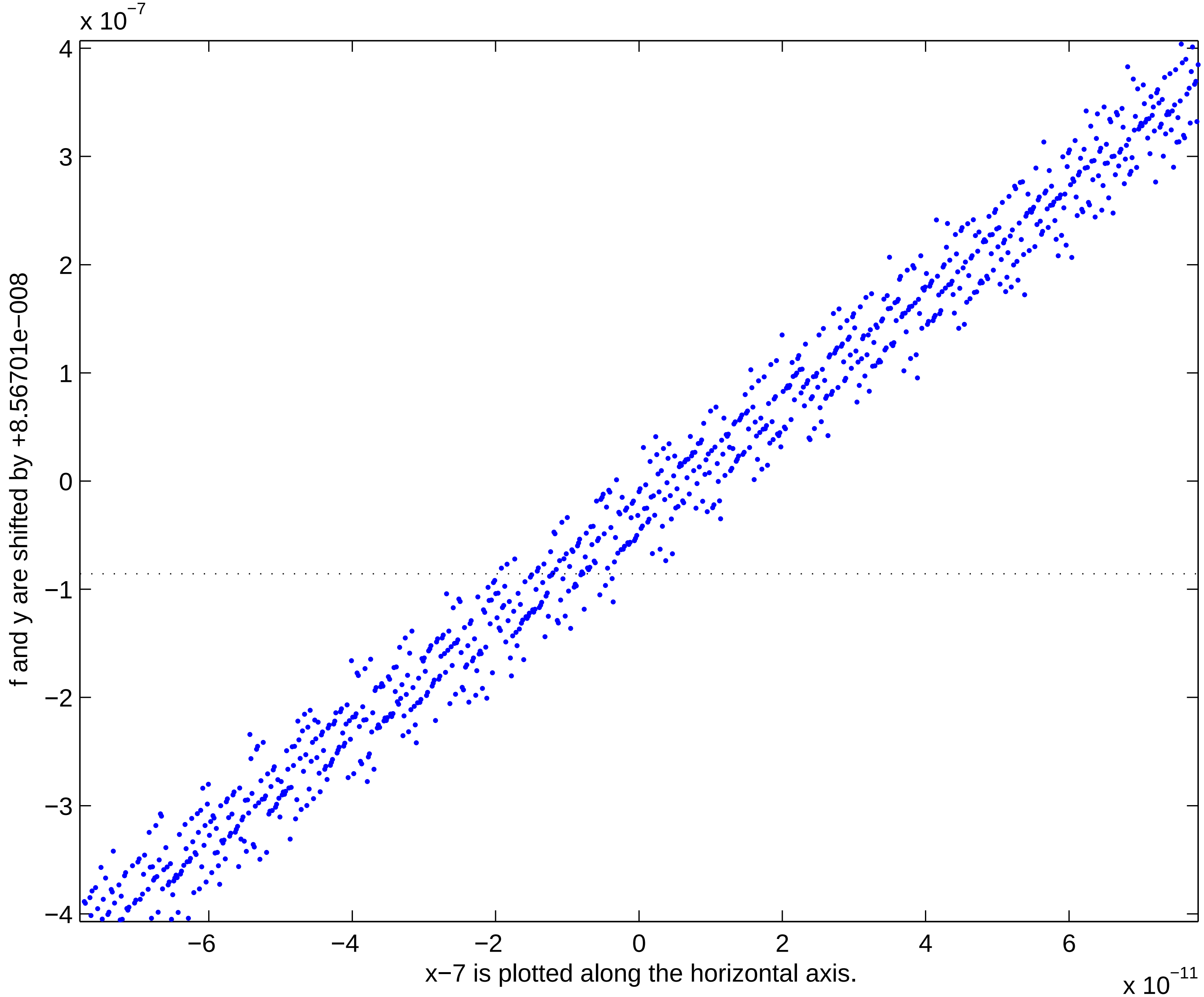


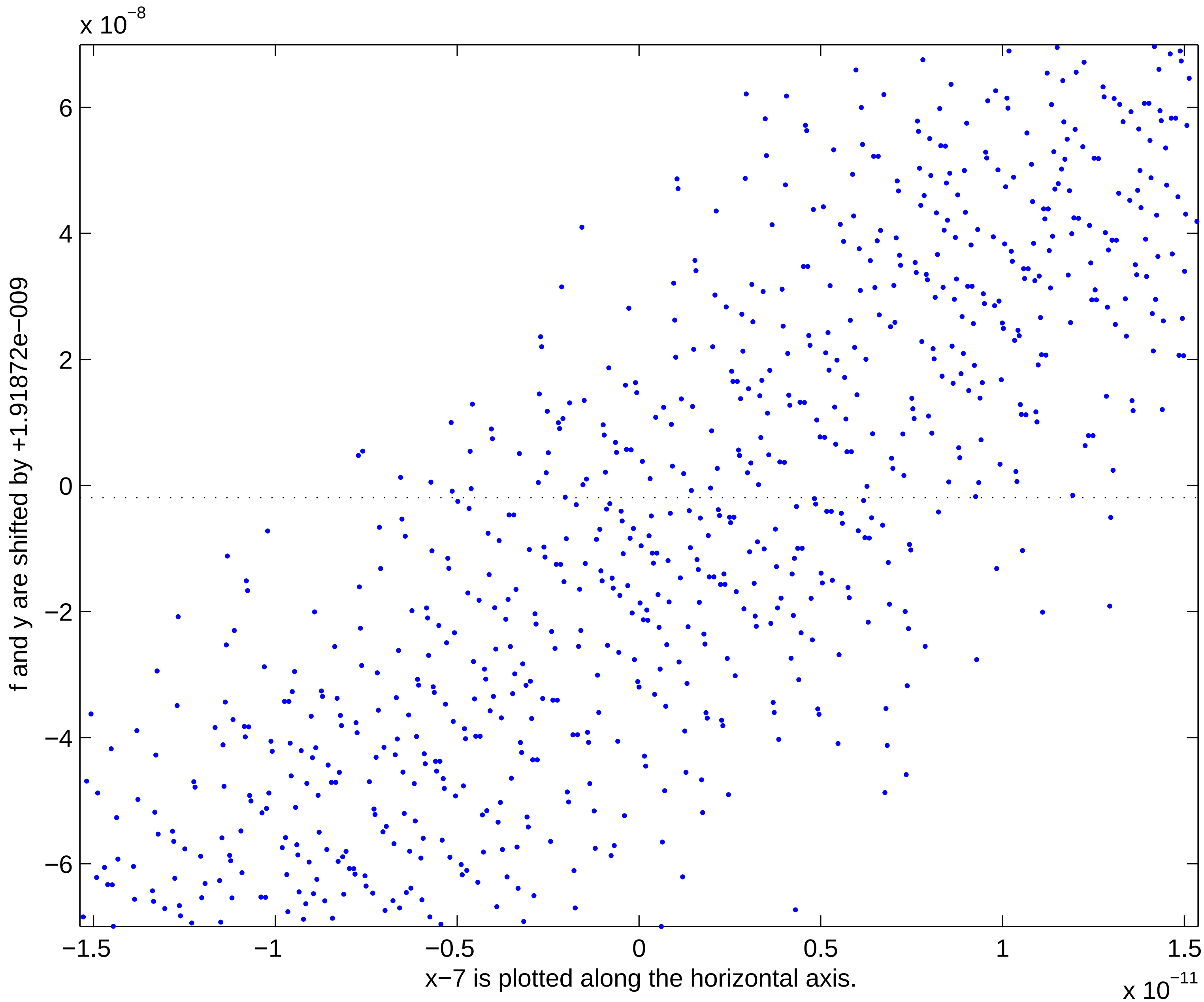
Graph of the function 'pol8' (blue) and of y=0 (black :).



Graph of the function 'pol8' (blue) and of y=0 (black :).


x 10^−3
3
2
1
0
−1
−2
−3
f and y are shifted by −0.00054297
−6
−4
−2
0
2
4
6
x−7 is plotted along the horizontal axis.
x 10^−7


x 10^−7
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
f and y are shifted by +8.56701e−008
−6
−4
−2
0
2
4
6
x−7 is plotted along the horizontal axis.
x 10^−11


x 10^-8
6
4
2
0
−2
−4
−6
f and y are shifted by +1.91872e−009
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
x−7 is plotted along the horizontal axis.
x 10^-11

Evaluatiefouten

Voorbeeld. Beschouw $f(x) \equiv -x(1-x)(2-x)\cdot\ldots\cdot(x-8)$. Hoe groot is de evaluatie fout in $f(7)$?

Schrijf uit als machten van x:

$$f(x) = a_1x^9 + a_2x^8 + a_3x^7 + \ldots + a_9x + a_{10},$$

waarbij $a = [-1, 36, -546, 4536, -22449, 67284, -118124, 109584, -40320, 0]$.

We zoomen in rond $x = 7$

Evalueren van f in x levert $f(x) + \xi g(x)$

met $g(x) = 18|a_1||x|^9 + 17|a_2||x|^8 + \ldots + 3|a_9||x| + |a_{10}|$.

In $x = 7$ is $g(x) = 2.4\,10^{10}$.

Evaluatiefouten

Voorbeeld. Beschouw $f(x) \equiv -x(1-x)(2-x)\cdot\ldots\cdot(x-8)$.
Hoe groot is de evaluatie fout in $f(7)$?

Schrijf uit als machten van x:

$$f(x) = a_1 x^9 + a_2 x^8 + a_3 x^7 + \ldots + a_9 x + a_{10},$$

waarbij $a = [-1, 36, -546, 4536, -22449, 67284, -118124, 109584, -40320, 0]$.

We zoomen in rond $x = 7$

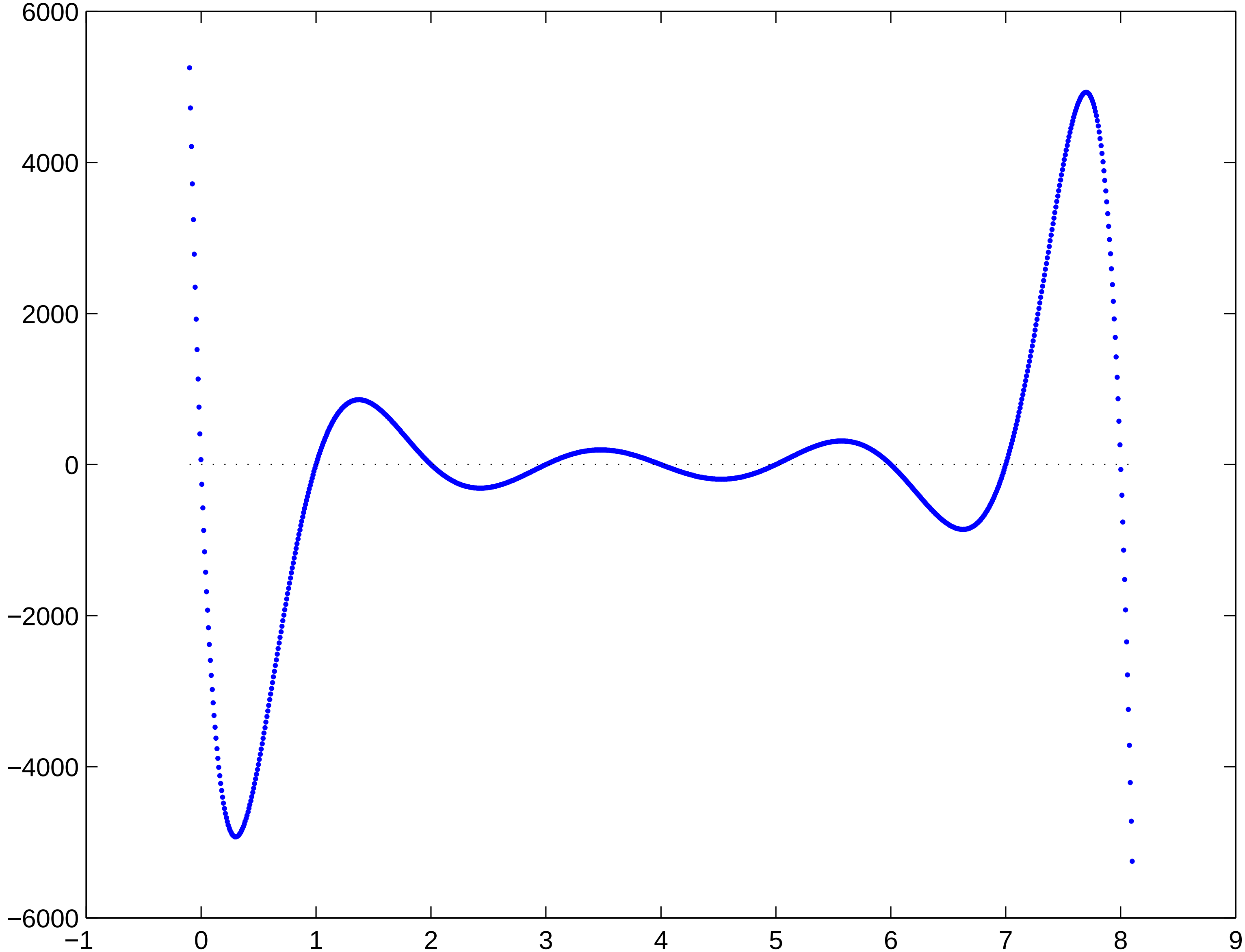
Evalueren van f in x levert $f(x) + \xi g(x)$

met $g(x) = 18|a_1||x|^9 + 17|a_2||x|^8 + \ldots + 3|a_9||x| + |a_{10}|$.

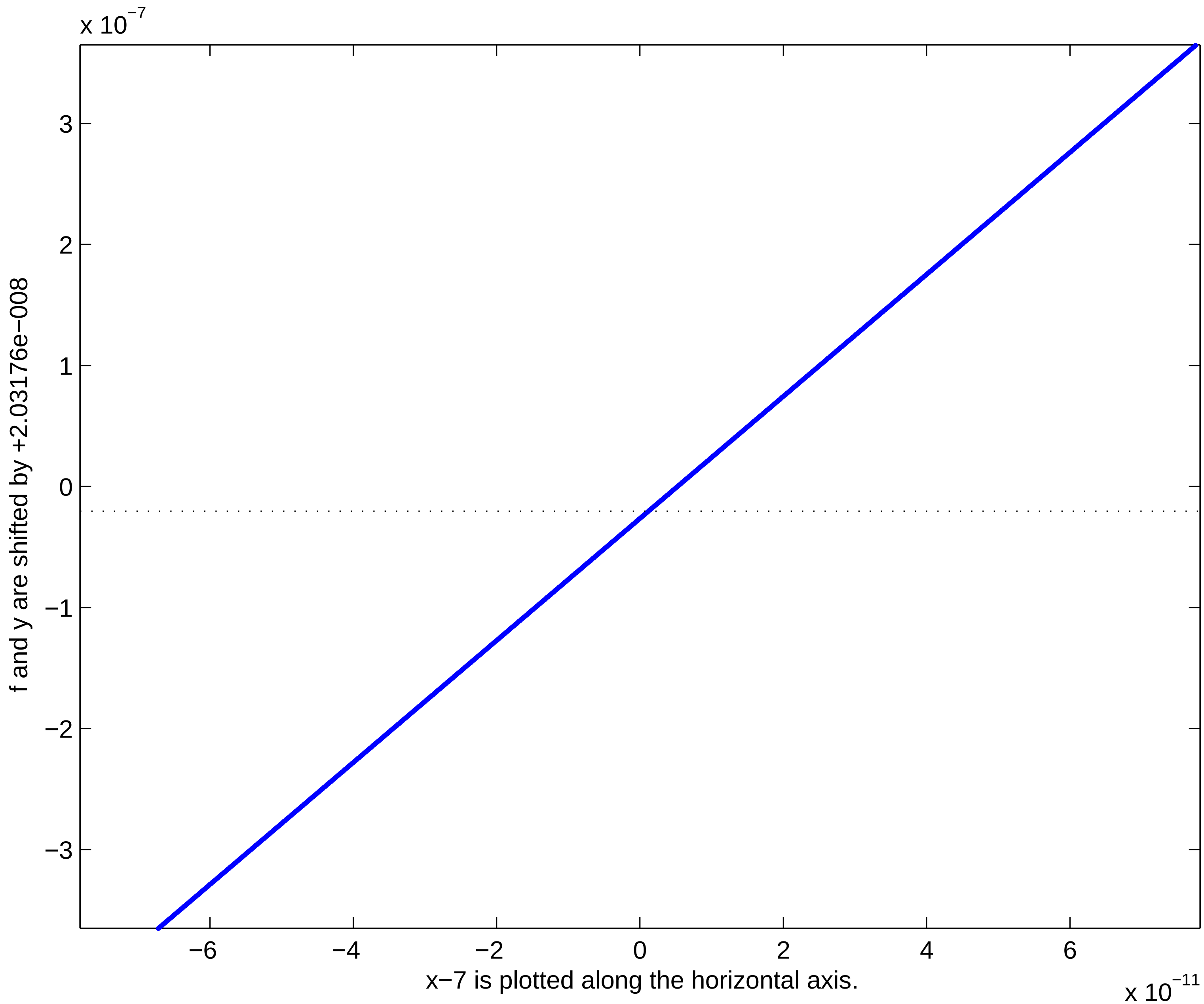
In $x = 7$ is $g(x) = 2.4\,10^{10}$.

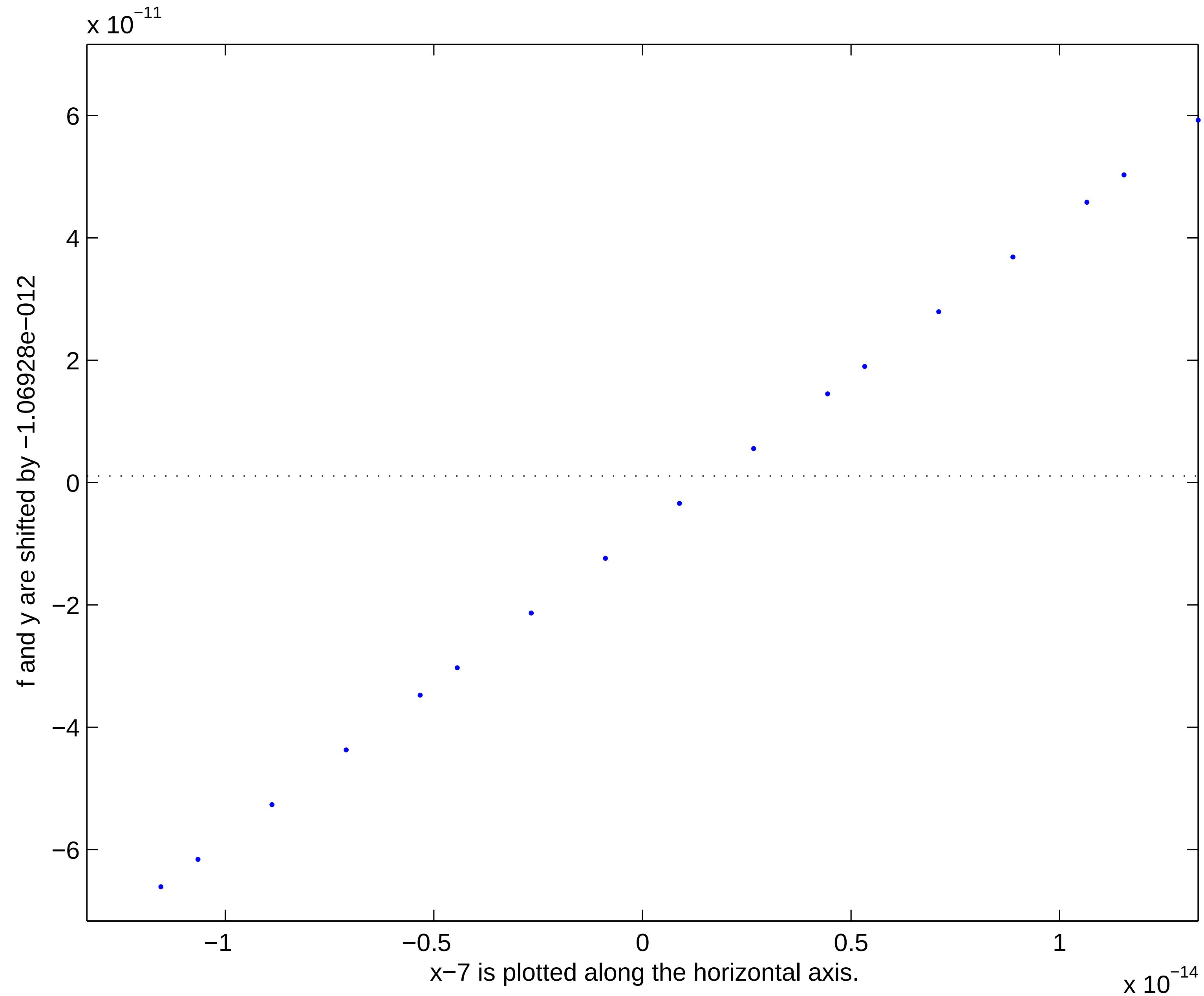
Andere manier van evalueren: volgens

$$f(x) \equiv -x(1-x)(2-x)\cdot\ldots\cdot(x-8).$$

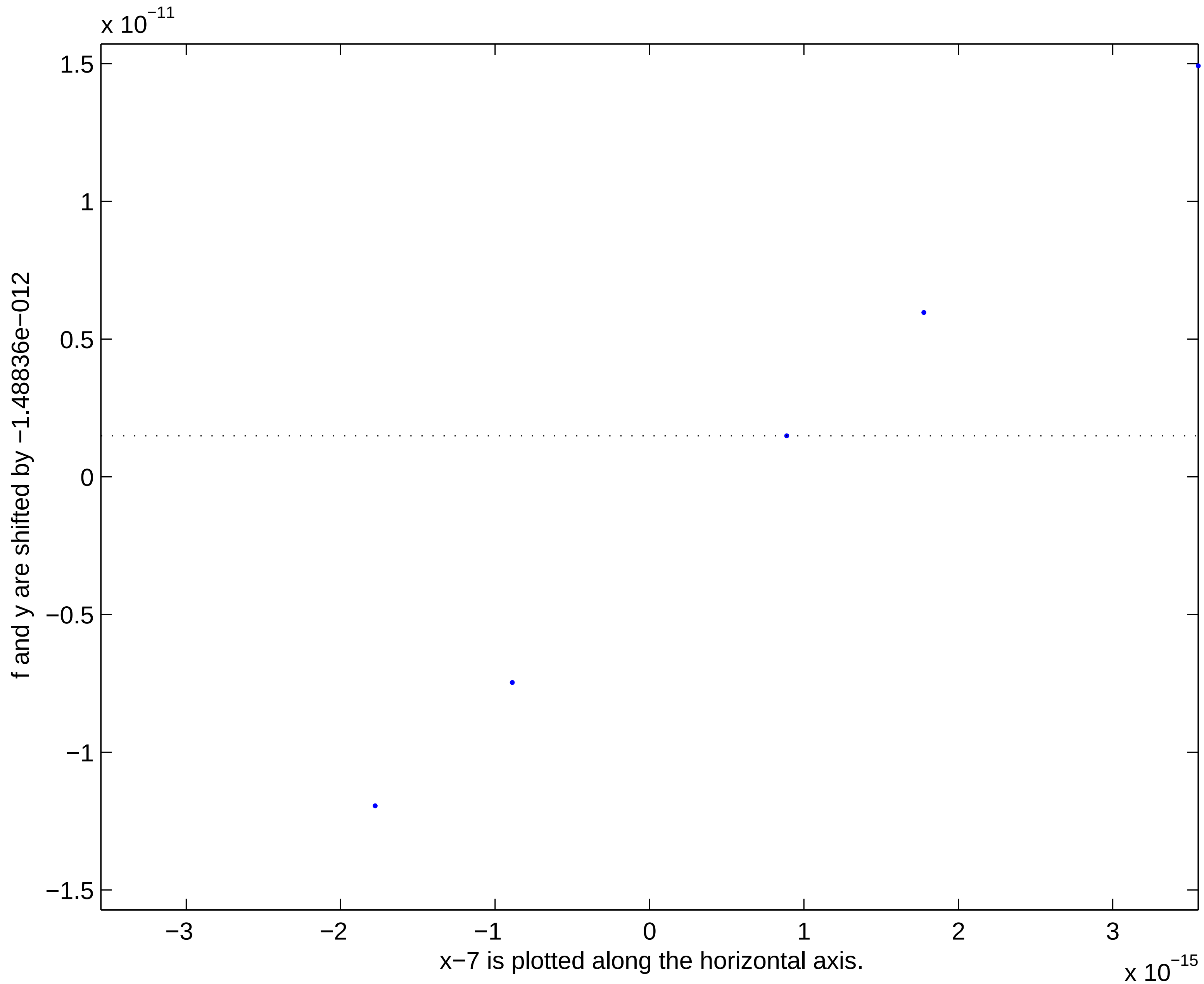


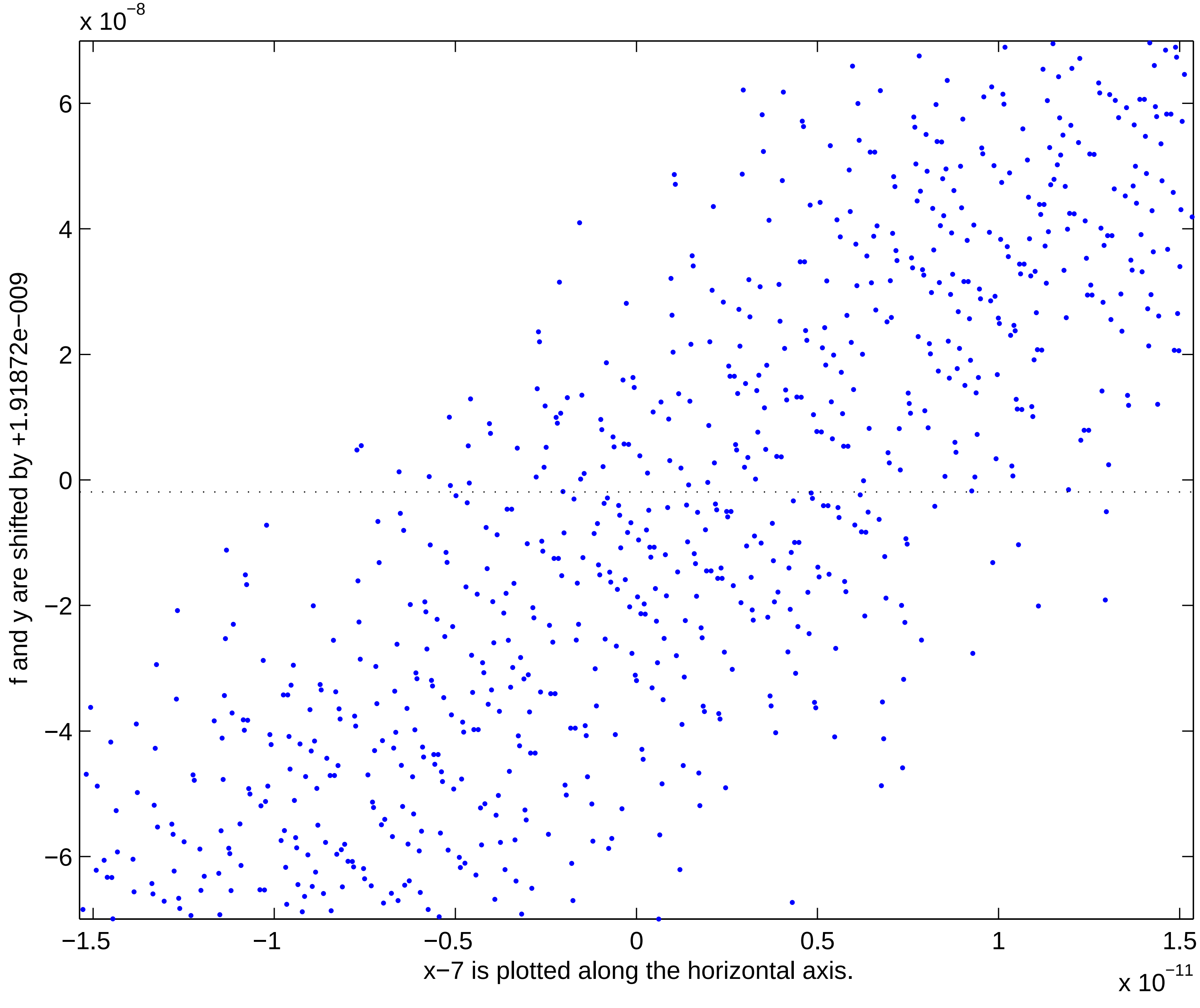
Graph of the function 'pol8' (blue) and of y=0 (black :).


x 10^−7
3
2
1
0
−1
−2
−3
−6
−4
−2
0
2
4
6
f and y are shifted by +2.03176e−008
x−7 is plotted along the horizontal axis.
x 10^−11



x 10^−11
6
4
2
0
−2
−4
−6
f and y are shifted by −1.06928e−012
−1
−0.5
0
0.5
1
x−7 is plotted along the horizontal axis.
x 10^−14


x 10^−11
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
f and y are shifted by −1.48836e−012
−3
−2
−1
0
1
2
3
x−7 is plotted along the horizontal axis.
x 10^−15


x 10^−8
6
4
2
0
−2
−4
−6
f and y are shifted by +1.91872e−009
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
x−7 is plotted along the horizontal axis.
x 10^−11

Approximatiefouten

Approximatiefouten (ook wel benaderingsfouten genoemd) hebben een structuur. Die kan je uitbuiten.

Voorbeeld. Als f voldoende glad is, dan zijn er c_i zodat

$$f'(x) - D_h(f)(x) = c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \ldots \quad \text{voor} \quad h \to 0.$$

Hierbij is

$$D_h(f)(x) \equiv \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{voor} \quad h > 0$$

Als f voldoende glad

$$f'(x) - D_h(f)(x) = c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \dots$$

Schrijf $I \equiv f'(x)$ en $D(h) = D_h(f)(x)$.

Als h 1) voldoende klein (zodat $c_2 h^2 \ll c_1 h$) en (*)
2) niet te klein (rekenfouten spelen geen rol)

dan $I - D(h) \approx c_1 h$ en $\boxed{I - D(\tfrac{1}{2}h) \approx D(\tfrac{1}{2}h) - D(h)}$

Als f voldoende glad

$$f'(x) - D_h(f)(x) = c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \ldots$$

Schrijf $I \equiv f'(x)$ en $D(h) = D_h(f)(x)$.

Als h 1) voldoende klein (zodat $c_2 h^2 \ll c_1 h$) en $(*)$
2) niet te klein (rekenfouten spelen geen rol)

dan $I - D(h) \approx c_1 h$ en $\boxed{I - D(\frac{1}{2}h) \approx D(\frac{1}{2}h) - D(h)}$

Dus $I \approx D(\frac{1}{2}h) + (D(\frac{1}{2}h) - D(h))$.

Is $\boxed{T(h) \equiv 2D(\frac{1}{2}h) - D(h)}$ beter dan $D(\frac{1}{2}h)$?

Als f voldoende glad

$$f'(x) - D_h(f)(x) = c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \ldots$$

Schrijf $I \equiv f'(x)$ en $D(h) = D_h(f)(x)$.

Als h 1) voldoende klein (zodat $c_2 h^2 \ll c_1 h$) en (∗)
2) niet te klein (rekenfouten spelen geen rol)

dan $I - D(h) \approx c_1 h$ en $\boxed{I - D(\tfrac{1}{2}h) \approx D(\tfrac{1}{2}h) - D(h)}$

Dus $I \approx D(\frac{1}{2}h) + (D(\frac{1}{2}h) - D(h))$.

Is $\boxed{T(h) \equiv 2D(\tfrac{1}{2}h) - D(h)}$ beter dan $D(\frac{1}{2}h)$?

$$\begin{aligned} I - T(h) &= 2(I - D(\tfrac{1}{2}h)) - (I - D(h)) \\ &= 2(c_1 \tfrac{1}{2}h + c_2 \tfrac{1}{4}h^2 + \ldots) - (c_1 h + c_2 h^2 + \ldots) \\ &= -\tfrac{1}{2}c_2 h^2 - \tfrac{3}{4}c_3 h^3 - \ldots = c_2' h^2 + c_3' h^3 + \ldots \end{aligned}$$

Als f voldoende glad

$$f'(x) - D_h(f)(x) = c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \ldots$$

Schrijf $I \equiv f'(x)$ en $D(h) = D_h(f)(x)$.

Als h 1) voldoende klein (zodat $c_2 h^2 \ll c_1 h$) en $(*)$
2) niet te klein (rekenfouten spelen geen rol)

dan $I - D(h) \approx c_1 h$ en $\boxed{I - D(\tfrac{1}{2}h) \approx D(\tfrac{1}{2}h) - D(h)}$

$$\boxed{V(h) \equiv \frac{D(\frac{1}{2}h) - D(h)}{D(\frac{1}{4}h) - D(\frac{1}{2}h)} \approx 2}$$

$$V(h) = \frac{(I - D(h)) - (I - D(\frac{1}{2}h))}{(I - D(\frac{1}{2}h)) - (I - D(\frac{1}{4}h))} \approx \frac{c_1 h - c_1 \frac{1}{2} h}{c_1 \frac{1}{2} h - c_1 \frac{1}{4} h} = 2 \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Als f voldoende glad

$$f'(x) - D_h(f)(x) = c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \ldots$$

Schrijf $I \equiv f'(x)$ en $D(h) = D_h(f)(x)$.

Als h 1) voldoende klein (zodat $c_2 h^2 \ll c_1 h$) en $(*)$
2) niet te klein (rekenfouten spelen geen rol)

dan $I - D(h) \approx c_1 h$ en $\boxed{I - D(\tfrac{1}{2}h) \approx D(\tfrac{1}{2}h) - D(h)}$

$$\boxed{V(h) \equiv \frac{D(\frac{1}{2}h) - D(h)}{D(\frac{1}{4}h) - D(\frac{1}{2}h)} \approx 2}$$

Als $V(h) \approx 2$ (en $V(\frac{1}{2}h) \approx 2, \ldots$)

dan hebben we er **vertrouwen** in dat $(*)$ geldt.

Approximatiefouten

Approximatiefouten (ook wel benaderingsfouten genoemd) hebben een structuur. Die kan je uitbuiten.

Voorbeeld. Stel voor $p, q \in \mathbb{N}$, $p < q$,

$$I - D(h) = ch^p + dh^q + \dots$$

voor 'n grootheid I en 'n benadering $D(h)$.

Approximatiefouten

Approximatiefouten (ook wel benaderingsfouten genoemd) hebben een structuur. Die kan je uitbuiten.

Voorbeeld. Stel voor $p, q \in \mathbb{N}$, $p < q$,

$$I - D(h) = ch^p + dh^q + \ldots$$

voor 'n grootheid I en 'n benadering $D(h)$.

Opmerking. Ook bruikbaar als $D(h)$ niet voor alle $h > 0$ gedefineerd is.
Voorbeeld. Met $h = \frac{1}{n}$, voor $n \in \mathbb{N}$, is $D(h)$ de omtrek van een n-zijdige regelmatige ingeschreven veelhoek van een cirkel met diameter 1. (Opgave 19).

Stel voor $p, q \in \mathbb{N}$, $p < q$,

$$I - D(h) = ch^p + dh^q + \ldots$$

h voldoende klein: $I - D(h) \approx ch^p$, $I - D(\frac{1}{2}h) \approx (\frac{1}{2})^p ch^p$

$$\boxed{I - D(\tfrac{1}{2}h) \approx \frac{1}{2^p - 1} \left(D(\tfrac{1}{2}h) - D(h)\right)}$$

Stel voor $p, q \in \mathbb{N}$, $p < q$,

$$I - D(h) = ch^p + dh^q + \dots$$

h voldoende klein: $I - D(h) \approx ch^p$, $I - D(\tfrac{1}{2}h) \approx (\tfrac{1}{2})^p ch^p$

$$\boxed{I - D(\tfrac{1}{2}h) \approx \frac{1}{2^p - 1}\left(D(\tfrac{1}{2}h) - D(h)\right)}$$

Dus $I \approx D(\tfrac{1}{2}h) + \frac{1}{2^p-1}[D(\tfrac{1}{2}h) - D(h)] = \frac{1}{2^p-1}\left[2^p D(\tfrac{1}{2}h) - D(h)\right]$.

Is $\boxed{T(h) \equiv \frac{1}{2^p - 1}\left(2^p D(\tfrac{1}{2}h) - D(h)\right)}$ beter dan $D(\tfrac{1}{2}h)$?

$$\begin{aligned} I - T(h) &= \tfrac{1}{2^p-1}\left[2^p(I - D(\tfrac{1}{2}h)) - (I - D(h)\right] \\ &= \tfrac{1}{2^p-1}\left[\left(\frac{2^p}{2^q} - 1\right) h^q + \dots\right] \\ &= d' h^q + \dots \end{aligned}$$

Stel voor $p, q \in \mathbb{N}$, $p < q$,

$$I - D(h) = ch^p + dh^q + \ldots$$

h voldoende klein: $I - D(h) \approx ch^p$, $I - D(\frac{1}{2}h) \approx (\frac{1}{2})^p ch^p$

$$V(h) \equiv \frac{D(\frac{1}{2}h) - D(h)}{D(\frac{1}{4}h) - D(\frac{1}{2}h)} \approx \frac{ch^p - c(\frac{1}{2})^p h^p}{c(\frac{1}{2})^p h^p - c(\frac{1}{4})^p h^p} = 2^p$$

Als $V(h) \approx 2^p$ (en $V(\frac{1}{2}h) \approx 2^p$, ...)

dan vertrouwen we er op dat

- h voldoende klein is zo dat $|dh^q + \ldots| \ll ch^p$,
- maar niet zo klein dat rekenfouten domineren.

$V(h)$ noemen we het **vertrouwensgetal**.

Romberg schema

$$
\begin{array}{llll}
h - D(h) & & & \\
 & T_1(h) & & \\
\tfrac{1}{2}h - D(\tfrac{1}{2}h) & & T_2(h) & \\
 & T_1(\tfrac{1}{2}h) & & T_3(h) \\
\tfrac{1}{4}h - D(\tfrac{1}{4}h) & & T_2(\tfrac{1}{2}h) & \\
 & T_1(\tfrac{1}{4}h) & & \\
\tfrac{1}{8}h - D(\tfrac{1}{8}h) & & &
\end{array}
$$

Als in j-de kolom fout evenredig h^p (bereken de $V_j(h)$) dan

- schat fout $I - T_j(\frac{1}{2}h)$ volgens $\boxed{\dfrac{1}{2^p - 1}\left[T_j(\tfrac{1}{2}h) - T_j(h)\right]}$

- corrigeer volgens $\boxed{T_{j+1}(h) = \dfrac{1}{2^p - 1}\left[2^p T_j(\tfrac{1}{2}h) - T_j(h)\right]}$

Romberg schema

Romberg schema is een interpolatie schema.

Ter herinnering. Als p_0 f interpoleert op x_0, x_1, x_2

p_1 f interpoleert op x_1, x_2, x_3

dan interpoleert

$$p(x) = \frac{x - x_3}{x_0 - x_3} p_0(x) + \frac{x - x_0}{x_3 - x_0} p_1(x)$$

f op x_0, x_1, x_2, x_3.

Romberg schema

Romberg schema is een interpolatie schema.

Ter herinnering. Als p_0 $D(h)$ interpoleert op h_0, h_1, h_2

p_1 $D(h)$ interpoleert op h_1, h_2, h_3

dan interpoleert

$$p(x) = \frac{x - h_3}{h_0 - h_3} p_0(x) + \frac{x - h_0}{h_3 - h_0} p_1(x)$$

$D(h)$ op h_0, h_1, h_2, h_3.

Romberg schema

Romberg schema is een interpolatie schema.

Ter herinnering. Als p_0 $D(h)$ interpoleert op h_0, h_1, h_2
p_1 $D(h)$ interpoleert op h_1, h_2, h_3

dan interpoleert

$$p(x) = \frac{x - h_3}{h_0 - h_3} p_0(x) + \frac{x - h_0}{h_3 - h_0} p_1(x)$$

$D(h)$ op h_0, h_1, h_2, h_3 en

$$\begin{aligned} p(0) &= \frac{-h_3}{h_0 - h_3} p_0(0) + \frac{-h_0}{h_3 - h_0} p_1(0) \\ &= \frac{1}{h_0 - h_3} \left[h_0 p_1(0) - h_3 p_0(0) \right] \end{aligned}$$

Extrapoleert.

Romberg schema

Romberg schema is een interpolatie schema.

Ter herinnering. Als p_0 $D(h)$ interpoleert op h_0, h_1, h_2
p_1 $D(h)$ interpoleert op h_1, h_2, h_3

dan interpoleert

$$p(x) = \frac{x - h_3}{h_0 - h_3} p_0(x) + \frac{x - h_0}{h_3 - h_0} p_1(x)$$

$D(h)$ op h_0, h_1, h_2, h_3 en

$$\begin{aligned} p(0) &= \frac{-h_3}{h_0 - h_3} p_0(0) + \frac{-h_0}{h_3 - h_0} p_1(0) \\ &= \frac{1}{h_0 - h_3} \left[h_0 p_1(0) - h_3 p_0(0) \right] \end{aligned}$$

Fout: $I - p(0) = (-h_0)(-h_1)(-h_2)(-h_3)\frac{1}{4!}$??

Romberg schema

Als $I - D(h) = c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \ldots$

$$
\begin{array}{ccccccc}
h_0 - D(h_0) & & & & & & \\
 & \searrow & & & & & \\
 & & T_{1,0} & & & & \\
 & \nearrow & & \searrow & & & \\
h_1 - D(h_1) & & & & T_{2,0} & & \\
 & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & T_{1,1} & & & & T_{3,0} \\
 & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
h_2 - D(h_2) & & & & T_{2,1} & & \\
 & \searrow & & \nearrow & & & \\
 & & T_{1,2} & & & & \\
 & \nearrow & & & & & \\
h_3 - D(h_3) & & & & & &
\end{array}
$$

Als in j-de kolom fout evenredig h^{j+1} (bereken de $V_{j,\cdot}$) dan

- schat fout $I - T_{j,1}$ volgens $\boxed{\dfrac{h_{j+1}}{h_0 - h_{j+1}} \left[T_{j,1} - T_{j,0} \right]}$

- corrigeer volgens $\boxed{T_{j+1,0} = \dfrac{1}{h_0 - h_{j+1}} \left[h_0 T_{j,1} - h_{j+1} T_{j,0} \right]}$

Romberg schema

Als $I - D(h) = c_1 h^2 + c_2 h^4 + c_3 h^6 + \ldots$

$$
\begin{array}{cccc}
h_0 - D(h_0) & & & \\
 & T_{1,0} & & \\
h_1 - D(h_1) & & T_{2,0} & \\
 & T_{1,1} & & T_{3,0} \\
h_2 - D(h_2) & & T_{2,1} & \\
 & T_{1,2} & & \\
h_3 - D(h_3) & & &
\end{array}
$$

Als in j-de kolom fout evenredig h^{2j+2} (bereken de $V_{j,.}$) dan

- schat fout $I - T_{j,1}$ volgens $\boxed{\dfrac{h_{j+1}^2}{h_0^2 - h_{j+1}^2}\left[T_{j,1} - T_{j,0}\right]}$

- corrigeer volgens $\boxed{T_{j+1,0} = \dfrac{1}{h_0^2 - h_{j+1}^2}\left[h_0 T_{j,1} - h_{j+1} T_{j,0}\right]}$

Romberg schema

Als $I - D(h) = c_1 h^2 + c_2 h^4 + c_3 h^6 + \ldots$

Romberg schema

Als $I - D(h) = c_1 h^2 + c_2 h^4 + c_3 h^6 + \ldots$

dan interpoleer

de functie $\widetilde{D}(h) \equiv c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \ldots$

op $h_0^2, h_1^2, \ldots$

Dan $\widetilde{D}(h^2) = D(h)$ en op $\widetilde{D}(h)$ is het schema gebaseerd op $c_1 h + c_2 h^2 + \ldots$ van toepassing.

Romberg schema

Waarom andere rij h dan $h, \frac{1}{2}h, \frac{1}{4}h, \ldots$?

Voorbeeld. $h, \alpha h, \alpha^2 h, \alpha^3 h, \ldots$ met $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$.

Voordeel: Voor dezelfde minimale $\alpha^q h$ ($> \frac{1}{2}^p h$ voor $p < q$) verder in het Romberg schema $T_{q,0}$. Gewoonlijk is $T_{q,0}$ (met $h_j = \alpha^j h$) nauwkeuriger dan $T_{p,0}$ (met $h_j = \frac{1}{2}^p h$). Het even nauwkeurig resultaat $T_{p,\ell}$ vereist een kleinere $h_{j+\ell} = (\frac{1}{2})^{j+\ell} h$ en kan aanleiding geven tot grotere effecten van afrondfouten.

Romberg schema

Waarom andere rij h dan $h, \frac{1}{2}h, \frac{1}{4}h, \ldots$?

Voorbeeld. $h, \alpha h, \alpha^2 h, \alpha^3 h, \ldots$ met $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$.

Voordeel: Voor dezelfde minimale $\alpha^q h$ ($> \frac{1}{2}^p h$ voor $p < q$) verder in het Romberg schema $T_{q,0}$. Gewoonlijk is $T_{q,0}$ (met $h_j = \alpha^j h$) nauwkeuriger dan $T_{p,0}$ (met $h_j = \frac{1}{2}^p h$). Het even nauwkeurig resultaat $T_{p,\ell}$ vereist een kleinere $h_{j+\ell} = (\frac{1}{2})^{j+\ell} h$ en kan aanleiding geven tot grotere effecten van afrondfouten.

Voorbeeld. Bulirch rij $h, \frac{1}{2}h, \frac{1}{3}h, \frac{1}{4}h, \frac{1}{6}h, \ldots$

Voordeel: grotere efficiëntie bij numeriek integreren

Samenvatting

- Evaluatiefouten hebben **geen** duidelijke structuur.
  Een majorant kan relatief eenvoudig afgeleid worden.

- Approximatiefouten hebben een mooie structuur
  en die kan uitgebuit worden:
  - fouten kunnen 'automatisch' geschat worden
  - er kan 'automatisch' vastgesteld worden
    of deze schatting betrouwbaar is
  - benaderingen kunnen m.b.v. de geschatte fout
    gecorrigeerd worden
  - deze procedure kan recursief worden toegepast.