

Utrecht, 27 september 2011

Numerieke Wiskunde



Gerard Sleijpen

Universiteit Utrecht
Department of Mathematics

<http://www.staff.science.uu.nl/~sleij101/>

$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \dots + \alpha_kx^k$ **polynoom** graad $\leq k$.

Evaluatie: schema van Horner. Evalueer p in x volgens

$$\begin{array}{l} S_0 = \alpha_k, \\ \text{voor } j = 1, 2, \dots, k \\ S_j = \alpha_{k-j} + S_{j-1} * x \end{array}$$

Kost $2k$ flop (**f**loating **p**oint operaties): $k*$ en $k+$.

Vb. $p(x) = 3 + 2x + 7x^2 + 4x^3$:
Horner: $p(x) = 3 + (2 + (7 + 4x)x)x$

Variant:

$$\begin{array}{l} p(x) = 3 + 2(x - 1) + 7(x - 1)(x - \pi) + 9(x - 1)(x - \pi)x \\ \text{Horner: } p(x) = 3 + (2 + (7 + 9x)(x - \pi))(x - 1) \end{array}$$

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Benader f door 'eenvoudige' functies

Voorbeelden eenvoudige functies.

1. **Polynomen** (lineaire combinaties van x^k).
2. Stukken Fourier reeks (lin. comb. $\sin(2\pi kx)$, $\cos(2\pi kx)$)
3. Splines (gladde stuksgewijs polynomen)
4. ... $\ln(x)p(x)$, p polynoom
5. Rationale functies $\frac{p(x)}{q(x)}$ met p, q polynomen
6. Bessel functies, ...

Eigenschappen eenvoudige functies.

1. Efficiënt te evalueren
2. Efficiënt op te slaan (\rightsquigarrow compressie)
3. Gemakkelijk mee te manipuleren ($p', f p, \dots$)
 - basis voor algorithmes voor ingewikkeldere problemen
 - te gebruiken in analyse

Interpolatie

$(x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$ rij in $[a, b]$.

Terminologie. $p = f$ op (x_0, \dots, x_k)

als voor $i = 0, \dots, k$

$$\begin{array}{l} p(x_i) = f(x_i), \\ p'(x_i) = f'(x_i) \text{ als } x_{i-1} = x_i \\ p''(x_i) = f''(x_i) \text{ als } x_{i-2} = x_{i-1} = x_i \\ \dots \end{array}$$

Voorbeeld. $p = f$ op $(\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 1)$ als

$$\begin{array}{l} p(0) = f(0), p'(0) = f'(0), p''(0) = f''(0), \\ p(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}), p(1) = f(1). \end{array}$$

Definitie. Een polynoom p **interpoleert** f **op** (x_0, \dots, x_k) als $\text{graad}(p) \leq k$ en $p = f$ op (x_0, \dots, x_k) .

Interpolatie

$(x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$ rij in $[a, b]$.

Stelling. Er bestaat precies een pol. p van gr. $\leq k$ zodat

$$p = f \text{ op } (x_0, x_1, \dots, x_k)$$

Als f $k + 1$ maal continu differentieerbaar is op $[a, b]$ dan

$$f(x) - p(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_k)}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi)$$

voor zekere ξ tussen x_0, x_1, \dots, x_k en x .

Voorbeeld. $x_0 = x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$:

p is het **Taylor** pol. $f(0) + xf'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$.

$$f(x) - p(x) = \frac{x^{n+1}}{(k+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

Lagrange: $x_i \neq x_j$ als $i \neq j$

Hermite: iedere i , er is precies een $j \neq i$ met $x_i = x_j$.

Evaluatie

$$f[x_0] = f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k, x_{k+1}] \equiv \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_k] - f[x_1, \dots, x_k, x_{k+1}]}{x_0 - x_{k+1}}$$

$$\begin{array}{l} x_0 - f(x_0) \\ x_1 - f(x_1) \\ x_2 - f(x_2) \\ x_3 - f(x_3) \end{array} \begin{array}{l} \searrow \\ \searrow \\ \searrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} f[x_0, x_1] \\ f[x_1, x_2] \\ f[x_2, x_3] \end{array} \begin{array}{l} \searrow \\ \searrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} f[x_0, x_1, x_2] \\ f[x_1, x_2, x_3] \end{array} \begin{array}{l} \searrow \\ \searrow \end{array} f[x_0, x_1, x_2, x_3]$$

$$p(x) = f[x_1] + f[x_1, x_2](x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_1)(x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_1)(x - x_0)(x - x_2)$$

Interpolatie

$(x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$ rij in $[a, b]$.

Stelling. Er bestaat precies een pol. p van gr. $\leq k$ zodat

$$p = f \text{ op } (x_0, x_1, \dots, x_k)$$

Als f $k + 1$ maal continu differentieerbaar is op $[a, b]$ dan

$$f(x) - p(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_k)}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi)$$

voor zekere ξ tussen x_0, x_1, \dots, x_k en x .

Notatie. Laat $\alpha = f[x_0, \dots, x_k]$ de leidende coëfficiënt zijn van het het interpolatie polynoom p voor f op (x_0, x_1, \dots, x_k) .

Stelling. $f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$.

$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\xi)$ voor zekere ξ tussen x_0, \dots, x_k .

Voorbeeld. $f[x_0, x_0, x_0, x_0] = \frac{1}{3!} f^{(3)}(x_0)$

Evaluatie

$$f[x_0] = f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k, x_{k+1}] \equiv \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_k] - f[x_1, \dots, x_k, x_{k+1}]}{x_0 - x_{k+1}}$$

$$\begin{array}{l} x_0 - f(x_0) \\ x_1 - f(x_1) \\ x_2 - f(x_2) \\ x_3 - f(x_3) \end{array} \begin{array}{l} \searrow \\ \searrow \\ \searrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} f[x_0, x_1] \\ f[x_1, x_2] \\ f[x_2, x_3] \end{array} \begin{array}{l} \searrow \\ \searrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} f[x_0, x_1, x_2] \\ f[x_1, x_2, x_3] \end{array} \begin{array}{l} \searrow \\ \searrow \end{array} f[x_0, x_1, x_2, x_3]$$

Voorbeeld. $0 - f(0) \quad f[0, 0] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(0) - f(\epsilon)}{0 - \epsilon} = f'(0)$
 $0 - f(0) \quad f[0, 0, 0] = \lim_{\epsilon} f[0, \epsilon, 2\epsilon] = \frac{1}{2} f''(0)$
 $0 - f(0)$
 $h - f(h)$

We wensen f in het punt x te benaderen door interpolatie met een k de graads polynoom.

Waar kunnen we het beste x_0, \dots, x_k kiezen?

- f is bekend op t_i met, voor 'n stapgrootte $h > 0$,
 $t_{i+1} = t_i + h$ alle i .
- We willen f met zo weinig mogelijk functiewaarden over een heel interval, zeg $[-1, +1]$, benaderen met een fout kleiner dan, zeg 10^{-4} .
We kunnen de steunpunten x_i overal kiezen in $[-1, +1]$.

We wensen f in het punt x te benaderen door interpolatie met een k de graads polynoom.

Waar kunnen we het beste x_0, \dots, x_k kiezen?

- We willen f met zo weinig mogelijk functiewaarden over een heel interval, zeg $[-1, +1]$, benaderen met een fout kleiner dan, zeg 10^{-4} .
We kunnen de steunpunten x_i overal kiezen in $[-1, +1]$.

Equidistant: $x_j = -1 + jh$ ($j = 0, \dots, k$) met $h = 2/k$?

We wensen f in het punt x te benaderen door interpolatie met een k de graads polynoom.

Waar kunnen we het beste x_0, \dots, x_k kiezen?

- f is bekend op t_i met, voor 'n stapgrootte $h > 0$,
 $t_{i+1} = t_i + h$ alle i .

Kies x_0, \dots, x_k uit $\{t_i\}$ zodat

$$|(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_k)|$$

minimaal is.

Zorg er voor dat x in het 'middelste' interval $[x_j, x_{j+1}]$ ligt:

Als $x \in (t_i, t_{i+1})$, kies

$$x_0 = t_i, x_1 = t_{i+1}, x_2 = t_{i-1}, x_3 = t_{i+2}, x_4 = t_{i-2}, \dots$$

Voor motivatie: zie volgende grafieken

waarbij $t_i = i$, ($i \in \mathbb{Z}$), $x \in (0, 1)$

We wensen f in het punt x te benaderen door interpolatie met een k de graads polynoom.

Waar kunnen we het beste x_0, \dots, x_k kiezen?

- We willen f met zo weinig mogelijk functiewaarden over een heel interval, zeg $[-1, +1]$, benaderen met een fout kleiner dan, zeg 10^{-4} .
We kunnen de steunpunten x_i overal kiezen in $[-1, +1]$.

Meer verdichten aan de rand: met $h = 2/k$

$$x_j = \sin\left(\frac{\pi}{2}(-1 + jh)\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}jh\right) \quad (j = 0, \dots, k)?$$

Hieronder $f \in C^{(1)}([-1, 1])$

en p_k interpoleert f op (x_0, x_1, \dots, x_k) .

$$x_j = -1 + j \frac{2}{k} \quad \exists f \quad p_k \not\rightarrow f \quad x \text{ in de buurt van } 1$$

$$x_j = 0 \quad \exists f \quad p_k \not\rightarrow f \quad x \text{ in de buurt van } 1$$

$$x_j = \cos\left(\frac{\pi j}{k}\right) \quad \forall f \quad p_k \rightarrow f \quad \text{ook } x \text{ in de buurt van } 1$$

Opmerkingen:

$$\exists f \text{ zelfs } \exists f \in C^{(\infty)}([-1, 1]).$$

$$\forall f \text{ geldt niet } \forall f \in C([-1, 1])$$

Convergentie volgt niet uit schattingen
voor $(x - x_0) \dots (x - x_k)$ en $f^{(k+1)}(\xi)$.

Effecten van (af rond)fouten in f -waarden

Voorbeeld. Lip op x_0, x_1, x_2, x_3 : $x_i \neq x_j$ voor $i \neq j$.

Definieer

$$L_0(x) \equiv \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

Dan $L_j(x_i) = 0$ als $i \neq j$ en $L_j(x_j) = 1$.

Als $p = f$ op (x_0, x_1, x_2, x_3) , dan

$$p(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x)$$

$$f^*(x_j) = f(x_j) + \epsilon_j \text{ met } |\epsilon_j| \leq \epsilon:$$

$$|p^*(x) - p(x)| \leq \epsilon \sum_j |L_j(x)|$$

Op volgende pagina's: grafieken L_j en $\sum_j |L_j(x)|$ (– · – ·)