

Utrecht, 27 september 2011

Numerieke Wiskunde

Gerard Sleijpen



Universiteit Utrecht
Department of Mathematics

<http://www.staff.science.uu.nl/~sleij101/>

Voor het schatten van $k!$, gebruik de

Formule van Stirling

$$k! \approx \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k$$

dat wil zeggen

$$k! / \left(\sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k\right) \rightarrow 1 \quad \text{voor } k \rightarrow \infty$$

Interpretatie.

Op een factor $\sqrt{2\pi k}$ na groeit $k!$ volgens $\left(\frac{k}{e}\right)^k$.

Benaderings kwaliteit

Benader $f(x)$ door $p(x)$.

Verschillende keuze x_0, \dots, x_k , met $x_j < x_{j+1}$:

- **Lagrange equidistant:** $x_j = x_0 + jh$:
 - x in het 'middelste' interval (x_m, x_{m+1})
 - x in een 'rand' interval (x_0, x_1)
- **Lagrange, grotere dichtheid aan de rand:**

$$x_j = \cos\left(\pi \frac{j+0.5}{k+1}\right) \quad (j = 0, 1, \dots, k)$$
- **Taylor**, alle x_j in het midden: $x_j = x_0$.

Schat de fout in diverse benaderingen. Schat af

$$\pi(x) \equiv (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_k) \quad \& \quad (k+1)!$$

$$\pi(x) \equiv (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_k)$$

Equidistant. $h > 0$, $x_j = t_0 + jh$ voor $j = 0, 1, \dots, k$.

Voor x in het **middelste** interval.

$k = 2m - 1$ oneven, $x = t_m + sh$ met $s \in (0, 1)$

$$|\pi(x)|/h^{k+1} = |s(s-1)(s+1)(s-2)(s+2) \dots (s-m)|$$

$$\leq \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} \frac{5}{2} \dots \frac{2m-1}{2} = \kappa_m \frac{1}{2} \frac{2}{2} \frac{3}{2} \frac{4}{2} \frac{5}{2} \frac{6}{2} \dots \frac{2m}{2} = \kappa_m \frac{(k+1)!}{2^{k+1}}$$

$$\text{met } \kappa_m \equiv \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \dots \frac{2m-1}{2m}$$

$$\text{Introduceer } \tilde{\kappa}_m \equiv \frac{2}{3} \frac{4}{5} \dots \frac{2m}{2m+1}$$

$$\text{Dan } \kappa_m^2 \leq \kappa_m \tilde{\kappa}_m = \frac{1}{2m+1} = \frac{1}{k+2} \leq \frac{1}{k+1}$$

$$\text{en } \kappa_m^2 \geq \frac{1}{2} \kappa_m \tilde{\kappa}_{m-1} = \frac{1}{2(k+1)}$$

$$\frac{(k+1)!}{\sqrt{2} \sqrt{k+1}} \left(\frac{h}{2}\right)^{k+1} \leq |\pi(x)| \leq \frac{(k+1)!}{\sqrt{k+1}} \left(\frac{h}{2}\right)^{k+1}$$

$$\pi(x) \equiv (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_k)$$

Equidistant. $h > 0$, $x_j = t_0 + jh$ voor $j = 0, 1, \dots, k$.

Voor x in het **rand** interval.

$k = 2m - 1$ oneven, $x = t_0 + sh$ met $s \in (0, 1)$

$$|\pi(x)|/h^{k+1} = |s(s-1)(s-2)(s-3) \dots (s-k)|$$

$$\leq \frac{1}{4} |(s-2)(s-3) \dots (s-k)| \leq \frac{1}{4} 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k = \frac{k!}{4}$$

$$\geq \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} \frac{7}{2} \frac{9}{2} \dots \frac{2k-1}{2} = \frac{1}{2} \kappa_k \frac{2}{2} \frac{4}{2} \frac{6}{2} \frac{8}{2} \frac{10}{2} \dots \frac{2k}{2} = \frac{1}{2} \kappa_k k!$$

met $\kappa_k \equiv \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \dots \frac{2k-1}{2k} \geq \frac{1}{2\sqrt{k}}$

$$\frac{k!}{4\sqrt{k}} h^{k+1} \leq |\pi(x)| \leq \frac{k!}{4} h^{k+1}$$

Verschil met x in het midden $\approx \frac{2^{k-1}}{\sqrt{k+1}}$; $k = 11 \Rightarrow \approx 300$

Equidistant. $h > 0$, $x_j = t_0 + jh$ voor $j = 0, 1, \dots, k$.

- Voor x in het **'middelste'** interval

$$|\text{fout}| \leq \frac{1}{\sqrt{k+1}} \left(\frac{h}{2}\right)^{k+1} |f^{(k+1)}(\xi)|$$

- Voor x in het **'rand'** interval

$$|\text{fout}| \leq \frac{1}{4(k+1)} h^{k+1} |f^{(k+1)}(\xi)|$$

Voorbeeld. Op $[-1, 1]$, $t_0 = -1$, $h = 2/k$.

x **'middelste'** int. $|\text{fout}| \leq \frac{1}{\sqrt{k+1}} \left(\frac{1}{k}\right)^{k+1} |f^{(k+1)}(\xi)|$,

x **'rand'** interval $|\text{fout}| \leq \frac{1}{4(k+1)} \left(\frac{2}{k}\right)^{k+1} |f^{(k+1)}(\xi)|$.

Grotere dichtheid aan de rand: $x_j = \cos\left(\pi \frac{j+0.5}{k+1}\right)$.

x in $[-1, 1]$: $|\text{fout}| \leq \left(\frac{e}{2k}\right)^{k+1} |f^{(k+1)}(\xi)|$

Alles in het midden (Taylor): $x_0 = x_j = x_k$.

x in $[-1, 1]$: $|\text{fout}| \lesssim \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \left(\frac{e}{k}\right)^{k+1} |f^{(k+1)}(\xi)|$

$$\pi(x) \equiv (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_k)$$

Grotere dichtheid aan de rand: $x_j = \cos\left(\pi \frac{j+0.5}{k+1}\right)$.

Voor x in $[-1, 1]$ geldt:

$$\pi(x) = 2^{-k} T_{k+1}(x) \equiv 2^{-k} \cos((k+1)\arccos(x))$$

$$|\pi(x)| \leq 2^{-k} \quad (x \in [-1, +1])$$

Equidistant. $h > 0$, $x_j = t_0 + jh$ voor $j = 0, 1, \dots, k$.

- Voor x in het **'middelste'** interval

$$|\text{fout}| \leq \frac{1}{\sqrt{k+1}} \left(\frac{h}{2}\right)^{k+1} |f^{(k+1)}(\xi)|$$

- Voor x in het **'rand'** interval

$$|\text{fout}| \leq \frac{1}{4(k+1)} h^{k+1} |f^{(k+1)}(\xi)|$$

Voorbeeld. Op $[-1, 1]$, $t_0 = -1$, $h = 2/k$.

$f(x) \equiv e^x$ voor $x \in [-1, +1]$.

$\Rightarrow |f^{(k+1)}(\xi)| = e^\xi \leq e$