

Utrecht, 13 oktober 2009

# Numerieke Wiskunde



<http://www.math.uu.nl/people/sleijpen>

## Approximatiefouten

Approximatiefouten (ook wel benaderingsfouten genoemd) hebben een structuur. Die kan je uitbuiten.

**Voorbeeld.** Als  $f$  voldoende glad is, dan zijn er  $c_i$  zodat  $f'(x) - D_h(f)(x) = c_1h + c_2h^2 + c_3h^3 + \dots$  voor  $h \rightarrow 0$ .

Hierbij is

$$D_h(f)(x) \equiv \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{voor } h > 0$$

## Evaluatiefouten

**Voorbeeld.** Beschouw  $f(x) \equiv -x(1-x)(2-x) \dots (x-8)$ . Hoe groot is de evaluatie fout in  $f(7)$ ?

Schrijf uit als machten van  $x$ :

$$f(x) = a_1x^9 + a_2x^8 + a_3x^7 + \dots + a_9x + a_{10},$$

waarbij  $a = [-1, 36, -546, 4536, -22449, 67284, -118124, 109584, -40320, 0]$

We zoomen in rond  $x = 7$

Evaluëren van  $f$  in  $x$  levert  $f(x) + \xi g(x)$

met  $g(x) = 18|a_1||x|^9 + 17|a_2||x|^8 + \dots + 3|a_9||x| + |a_{10}|$ .

In  $x = 7$  is  $g(x) = 2.4 \cdot 10^{10}$ .

Als  $f$  voldoende glad

$$f'(x) - D_h(f)(x) = c_1h + c_2h^2 + c_3h^3 + \dots$$

Schrijf  $I \equiv f'(x)$  en  $D(h) = D_h(f)(x)$ .

Als  $h$  1) voldoende klein (zodat  $c_2h^2 \ll c_1h$ ) en (\*)  
2) niet te klein (rekenfouten spelen geen rol)

dan  $I - D(h) \approx c_1h$  en

$$I - D(\frac{1}{2}h) \approx D(\frac{1}{2}h) - D(h)$$

Dus  $I \approx D(\frac{1}{2}h) + (D(\frac{1}{2}h) - D(h))$ .

Is

$$T(h) \equiv 2D(\frac{1}{2}h) - D(h)$$

beter dan  $D(\frac{1}{2}h)$ ?

$$\begin{aligned}
 I - T(h) &= 2(I - D(\frac{1}{2}h)) - (I - D(h)) \\
 &= 2(c_1\frac{1}{2}h + c_2\frac{1}{4}h^2 + \dots) - (c_1h + c_2h^2 + \dots) \\
 &= -\frac{1}{2}c_2h^2 - \frac{3}{4}c_3h^3 - \dots = c'_2h^2 + c'_3h^3 + \dots
 \end{aligned}$$

Als  $f$  voldoende glad

$$f'(x) - D_h(f)(x) = c_1h + c_2h^2 + c_3h^3 + \dots$$

Schrijf  $I \equiv f'(x)$  en  $D(h) = D_h(f)(x)$ .

Als  $h$  1) voldoende klein (zodat  $c_2h^2 \ll c_1h$ ) en 2) niet te klein (rekenfouten spelen geen rol) (\*)

dan  $I - D(h) \approx c_1h$  en

$$I - D(\frac{1}{2}h) \approx D(\frac{1}{2}h) - D(h)$$

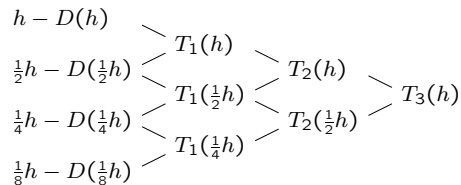
$$V(h) \equiv \frac{D(\frac{1}{2}h) - D(h)}{D(\frac{1}{4}h) - D(\frac{1}{2}h)} \approx 2$$

$$V(h) = \frac{(I - D(h)) - (I - D(\frac{1}{2}h))}{(I - D(\frac{1}{2}h)) - (I - D(\frac{1}{4}h))} \approx \frac{c_1h - c_1\frac{1}{2}h}{c_1\frac{1}{2}h - c_1\frac{1}{4}h} = 2 \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = 2.$$

Als  $V(h) \approx 2$  (en  $V(\frac{1}{2}h) \approx 2, \dots$ )

dan hebben we er **vertrouwen** in dat (\*) geldt.

### Romberg schema



Als in  $j$ -de kolom fout evenredig  $h^p$  (bereken de  $V_j(h)$ ) dan

- schat fout  $I - T_j(\frac{1}{2}h)$  volgens  $\frac{1}{2^p - 1} [T_j(\frac{1}{2}h) - T_j(h)]$

- corrigeer volgens  $T_{j+1}(h) = \frac{1}{2^p - 1} [2^p T_j(\frac{1}{2}h) - T_j(h)]$

Stel voor  $p, q \in \mathbb{N}, p < q$ ,

$$I - D(h) = ch^p + dh^q + \dots$$

$h$  voldoende klein:  $I - D(h) \approx ch^p, I - D(\frac{1}{2}h) \approx (\frac{1}{2})^p ch^p$

$$I - D(\frac{1}{2}h) \approx \frac{1}{2^p - 1} (D(\frac{1}{2}h) - D(h))$$

Dus  $I \approx D(\frac{1}{2}h) + \frac{1}{2^p - 1} [D(\frac{1}{2}h) - D(h)] = \frac{1}{2^p - 1} [2^p D(\frac{1}{2}h) - D(h)]$ .

Is  $T(h) \equiv \frac{1}{2^p - 1} (2^p D(\frac{1}{2}h) - D(h))$  beter dan  $D(\frac{1}{2}h)$ ?

$$\begin{aligned} I - T(h) &= \frac{1}{2^p - 1} [2^p (I - D(\frac{1}{2}h)) - (I - D(h))] \\ &= \frac{1}{2^p - 1} \left[ \left( \frac{2^p}{2^q} - 1 \right) h^q + \dots \right] \\ &= d' h^q + \dots \end{aligned}$$

### Romberg schema

Romberg schema is een interpolatie schema.

**Ter herinnering.** Als  $p_0$   $D(h)$  interpoleert op  $h_0, h_1, h_2$   
 $p_1$   $D(h)$  interpoleert op  $h_1, h_2, h_3$

dan interpoleert

$$p(x) = \frac{x - h_3}{h_0 - h_3} p_0(x) + \frac{x - h_0}{h_3 - h_0} p_1(x)$$

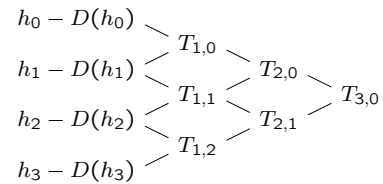
$D(h)$  op  $h_0, h_1, h_2, h_3$  en

$$\begin{aligned} p(0) &= \frac{-h_3}{h_0 - h_3} p_0(0) + \frac{-h_0}{h_3 - h_0} p_1(0) \\ &= \frac{1}{h_0 - h_3} [h_0 p_1(0) - h_3 p_0(0)] \end{aligned}$$

Fout:  $I - p(0) = (-h_0)(-h_1)(-h_2)(-h_3) \frac{1}{4!} \dots$

## Romberg schema

Als  $I - D(h) = c_1h + c_2h^2 + c_3h^3 + \dots$



Als in  $j$ -de kolom fout evenredig  $h^{j+1}$  (bereken de  $V_{j,}$ ) dan

- schat fout  $I - T_{j,1}$  volgens  $\frac{h_{j+1}}{h_0 - h_{j+1}} [T_{j,1} - T_{j,0}]$

- corrigeer volgens  $T_{j+1,0} = \frac{1}{h_0 - h_{j+1}} [h_0 T_{j,1} - h_{j+1} T_{j,0}]$

## Romberg schema

Als  $I - D(h) = c_1h^2 + c_2h^4 + c_3h^6 + \dots$

dan interpoleer

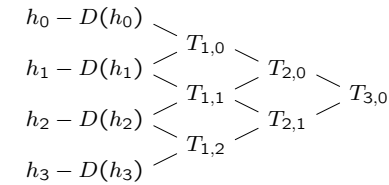
de functie  $\tilde{D}(h) \equiv c_1h + c_2h^2 + c_3h^3 + \dots$

op  $h_0^2, h_1^2, \dots$

Dan  $\tilde{D}(h^2) = D(h)$  en op  $\tilde{D}(h)$  is het schema gebaseerd op  $c_1h + c_2h^2 + \dots$  van toepassing.

## Romberg schema

Als  $I - D(h) = c_1h^2 + c_2h^4 + c_3h^6 + \dots$



Als in  $j$ -de kolom fout evenredig  $h^{2j+2}$  (bereken de  $V_{j,}$ ) dan

- schat fout  $I - T_{j,1}$  volgens  $\frac{h_{j+1}^2}{h_0^2 - h_{j+1}^2} [T_{j,1} - T_{j,0}]$

- corrigeer volgens  $T_{j+1,0} = \frac{1}{h_0^2 - h_{j+1}^2} [h_0 T_{j,1} - h_{j+1} T_{j,0}]$

## Romberg schema

Waarom andere rij  $h$  dan  $h, \frac{1}{2}h, \frac{1}{4}h, \dots$ ?

**Voorbeeld.**  $h, \alpha h, \alpha^2 h, \alpha^3 h, \dots$  met  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ .

**Voordeel:** Voor dezelfde minimale  $\alpha^q h$  ( $> \frac{1}{2}^p h$  voor  $p < q$ ) verder in het Romberg schema  $T_{q,0}$ . Gewoonlijk is  $T_{q,0}$  (met  $h_j = \alpha^j h$ ) nauwkeuriger dan  $T_{p,0}$  (met  $h_j = \frac{1}{2}^p h$ ). Het even nauwkeurig resultaat  $T_{p,\ell}$  vereist een kleinere  $h_{j+\ell} = (\frac{1}{2})^{j+\ell} h$  en kan aanleiding geven tot grotere effecten van afrondfouten.

**Voorbeeld.** Bulirsch rij  $h, \frac{1}{2}h, \frac{1}{3}h, \frac{1}{4}h, \frac{1}{6}h, \dots$

**Voordeel:** grotere efficiëntie bij numeriek integreren

## Samenvatting

- Evaluatiefouten hebben **geen** duidelijke structuur.  
Een majorant kan relatief eenvoudig afgeleid worden.
- Approximatiefouten hebben een mooie structuur en die kan uitgebuit worden:
  - fouten kunnen 'automatisch' geschat worden
  - er kan 'automatisch' vastgesteld worden of deze schatting betrouwbaar is
  - benaderingen kunnen m.b.v. de geschatte fout gecorrigeerd worden
  - deze procedure kan recursief worden toegepast.