Utrecht, 27 september 2011

Numerieke Wiskunde

Gerard Sleijpen

Universiteit Utrecht
Department of Mathematics

http://www.staff.science.uu.nl/∼sleij101/

Benaderings kwaliteit

Benader $f(x)$ door $p(x)$.

Verschillende keuze $x_0, \dots, x_k$, met $x_j < x_{j+1}$:

- **Lagrange equidistant**: $x_j = x_0 + jh$:
  - x in het 'middelste' interval (x_m, x_{m+1})
  - x in een 'rand' interval (x_0, x_1)
- **Lagrange, grotere dichtheid aan de rand**: $x_j = \cos(\pi \frac{j+0.5}{k+1}) \qquad (j = 0, 1, \dots, k)$
- **Taylor**, alle x_j in het midden: $x_j = x_0$.

Schat de fout in diverse benaderingen. Schat af

$$\pi(x) \equiv (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_k) \quad \& \quad (k+1)!$$

Voor het schatten van $k!$, gebruik de

Formule van Stirling

$$\boxed{k! \approx \sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k}$$

dat wil zeggen

$$k!/\left(\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k\right) \to 1 \quad \text{voor} \quad k \to \infty$$

Interpretatie.

Op een factor $\sqrt{2\pi k}$ na groeit $k!$ volgens $\left(\frac{k}{e}\right)^k$.

$$\pi(x) \equiv (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_k)$$

Equidistant. $h > 0$, $x_j = t_0 + jh$ voor $j = 0, 1, \dots, k$.

Voor x in het middelste interval.

$k = 2m - 1$ oneven, $x = t_m + sh$ met $s \in (0, 1)$

$$|\pi(x)|/h^{k+1} = |s(s-1)(s+1)(s-2)(s+2)\dots(s-m)|$$

$$\le \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\frac{5}{2}\dots\frac{2m-1}{2} = \kappa_m \frac{1}{2}\frac{2}{2}\frac{3}{2}\frac{4}{2}\frac{5}{2}\frac{6}{2}\dots\frac{2m}{2} = \kappa_m \frac{(k+1)!}{2^{k+1}}$$

met $\kappa_m \equiv \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2m-1}{2m}$

Introduceer $\widetilde{\kappa}_m \equiv \frac{2}{3}\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2m}{2m+1}$.

Dan $\kappa_m^2 \le \kappa_m\widetilde{\kappa}_m = \frac{1}{2m+1} = \frac{1}{k+2} \le \frac{1}{k+1}$

en $\kappa_m^2 \ge \frac{1}{2}\kappa_m\widetilde{\kappa}_{m-1} = \frac{1}{2(k+1)}$.

$$\boxed{\frac{(k+1)!}{\sqrt{2}\sqrt{k+1}}\left(\frac{h}{2}\right)^{k+1} \le |\pi(x)| \le \frac{(k+1)!}{\sqrt{k+1}}\left(\frac{h}{2}\right)^{k+1}}$$

$$\pi(x) \equiv (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_k)$$

Equidistant. $h > 0$, $x_j = t_0 + jh$ voor $j = 0, 1, \dots, k$.

Voor x in het rand interval.

$k = 2m - 1$ oneven, $x = t_0 + sh$ met $s \in (0, 1)$

$$|\pi(x)|/h^{k+1} = |s(s-1)(s-2)(s-3)\dots(s-k)|$$

$$\le \tfrac{1}{4}|(s-2)(s-3)\dots(s-k)| \le \tfrac{1}{4}\,2\,3\cdot\ldots\cdot k = \frac{k!}{4}$$

$$\ge \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\frac{7}{2}\frac{9}{2}\dots\frac{2k-1}{2} = \frac{1}{2}\kappa_k\frac{2}{2}\frac{4}{2}\frac{6}{2}\frac{8}{2}\frac{10}{2}\dots\frac{2k}{2} = \frac{1}{2}\kappa_k\,k!$$

met $\kappa_k \equiv \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k} \ge \frac{1}{2\sqrt{k}}$

$$\boxed{\frac{k!}{4\sqrt{k}}h^{k+1} \le |\pi(x)| \le \frac{k!}{4}h^{k+1}}$$

Verschil met x in het midden $\approx \frac{2^{k-1}}{\sqrt{k+1}}$; $k = 11 \;\Rightarrow \approx 300$

$$\pi(x) \equiv (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_k)$$

Grotere dichtheid aan de rand: $x_j = \cos(\pi \frac{j+0.5}{k+1})$.

Voor x in $[-1, 1]$ geldt:

$$\pi(x) = 2^{-k}T_{k+1}(x) \equiv 2^{-k}\cos((k+1)\arccos(x))$$

$$|\pi(x)| \le 2^{-k} \qquad (x \in [-1, +1])$$

Equidistant. $h > 0$, $x_j = t_0 + jh$ voor $j = 0, 1, \dots, k$.

- Voor x in het '**middelste**' interval
$$|\text{fout}| \le \frac{1}{\sqrt{k+1}}(\tfrac{h}{2})^{k+1}|f^{(k+1)}(\xi)|$$
- Voor x in het '**rand**' interval
$$|\text{fout}| \le \frac{1}{4(k+1)}h^{k+1}|f^{(k+1)}(\xi)|$$

Voorbeeld. Op $[-1, 1]$, $t_0 = -1$, $h = 2/k$.

x '**middelste**' int. $\quad |\text{fout}| \le \frac{1}{\sqrt{k+1}}(\frac{1}{k})^{k+1}|f^{(k+1)}(\xi)|$,

x '**rand**' interval $\quad |\text{fout}| \le \frac{1}{4(k+1)}(\frac{2}{k})^{k+1}|f^{(k+1)}(\xi)|$.

Grotere dichtheid aan de rand: $x_j = \cos(\pi\frac{j+0.5}{k+1})$.

x in $[-1, 1]$: $\quad |\text{fout}| \le (\frac{e}{2k})^{k+1}|f^{(k+1)}(\xi)|$

Alles in het midden (Taylor): $x_0 = x_j = x_k$.

x in $[-1, 1]$: $\quad |\text{fout}| \lesssim \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}(\frac{e}{k})^{k+1}|f^{(k+1)}(\xi)|$

Equidistant. $h > 0$, $x_j = t_0 + jh$ voor $j = 0, 1, \dots, k$.

- Voor x in het '**middelste**' interval
$$|\text{fout}| \le \frac{1}{\sqrt{k+1}}(\tfrac{h}{2})^{k+1}|f^{(k+1)}(\xi)|$$
- Voor x in het '**rand**' interval
$$|\text{fout}| \le \frac{1}{4(k+1)}h^{k+1}|f^{(k+1)}(\xi)|$$

Voorbeeld. Op $[-1, 1]$, $t_0 = -1$, $h = 2/k$.

$f(x) \equiv e^x$ voor $x \in [-1, +1]$.

$$\Rightarrow \qquad |f^{(k+1)}(\xi)| = e^\xi \le e$$