

WISB356, Utrecht, 21 september 2012

Scientific Computing

Gerard Sleijpen

Rob Bisseling

Alessandro Sbrizzi



Universiteit Utrecht
Department of Mathematics

<http://www.staff.science.uu.nl/~sleij101/>

Aspect werkelijkheid

Modelleer



Wiskundig model

Discretiseer



Discreet model



Computer model

Implementeer



Simulatie

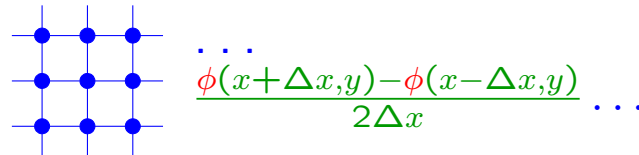
Stroming grondwater



$$\begin{aligned} -\nabla(K\nabla\phi) &= Q \text{ op } \Omega \\ -K \frac{\partial\phi}{\partial x} \cdot n &= \gamma(\phi - \phi_0) \text{ op } \partial\Omega \end{aligned}$$



Eindige differences, ...



$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$



Iteratieve lineaire solver

Rekenschema voor het oplossen van \mathbf{x} uit $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$



C++

Simulatie

WISB356, Utrecht, 21 september 2012

Grondwaterstroming

Gerard Sleijpen



Universiteit Utrecht
Department of Mathematics

<http://www.staff.science.uu.nl/~sleij101/>

Programma

- Inleiding
- De druk van het grondwater
- De stroming van het grondwater
- Wet van behoud van massa
- Randvoorwaarden
- Verspreiding van een verontreiniging:
 - diffusie
 - advectie
- Absorptie en bacteriële verontreiniging
- Modelleren is vereenvoudigen

Programma

- Inleiding
- De druk van het grondwater
- De stroming van het grondwater
- Wet van behoud van massa
- Randvoorwaarden
- Verspreiding van een verontreiniging:
 - diffusie
 - advectie
- Absorptie en bacteriële verontreiniging
- Modelleren is vereenvoudigen

Numerieke simulatie

Modelleren is vereenvoudigen.

Wij vereenvoudigen extra

- 1) ter vermijding van routinematig extra programmeerwerk
- 2) maar met (zoveel mogelijke) behoud van principes

Voorbeeld.

2-d, rechte rivieren, rechthoekige gebieden, . . .

Modelleer grondwaterstroming

Er is een nieuwe sterke behoefte aan nauwkeurige simulaties van de stroming van het grondwater door de verwachte stijging van de zeespiegel. Door de stijgende druk van het zeewater kan zoutwater onder de duinen en dijken doorgeperst worden en het zoete grondwater verontreinigen. Wat voor gevolgen heeft dat voor de boeren in het Westland en voor de drinkwater voorziening?

De (wisselende) stijging van het rivierwater en een nieuwe manier van gebruik van de uiterwaarden noopt ook tot herberekening.

Rijkswaterstaat (TNO) beschikt nu over (computer)modellen voor iedere provincie afzonderlijk en wil die in de nabije toekomst koppelen tot een model voor heel Nederland

Programma

- Inleiding
- De druk van het grondwater
- De stroming van het grondwater
- Wet van behoud van massa
- Randvoorwaarden
- Verspreiding van een verontreiniging:
 - diffusie
 - advectie
- Absorptie en bacteriële verontreiniging
- Modelleren is vereenvoudigen

De druk van het grondwater

In een zeker gebied zijn we geïnteresseerd in de **druk** $\phi(x, y, z)$ **van het grondwater**.

Aanname. De situatie is stationair (tijdsonafhankelijk).

De druk hangt af van de plaats en tijd.

Stationair. In ons model nemen we aan dat we op ieder tijdstip met dezelfde situatie te maken hebben. Het water “verplaats zich” wel in de tijd, maar de verplaatsing is op ieder tijdstip hetzelfde: het stromingspatroon is tijdsonafhankelijk.

De druk van het grondwater

In een zeker gebied zijn we geïnteresseerd in de **druk** $\phi(x, y, z)$ **van het grondwater**.

Aanname. De situatie is stationair (tijdsonafhankelijk).

De druk wordt gemeten in meters (m).

De druk van het grondwater

In een zeker gebied zijn we geïnteresseerd in de **druk** $\phi(x, y, z)$ **van het grondwater**.

Aanname. De situatie is stationair (tijdsafhankelijk).

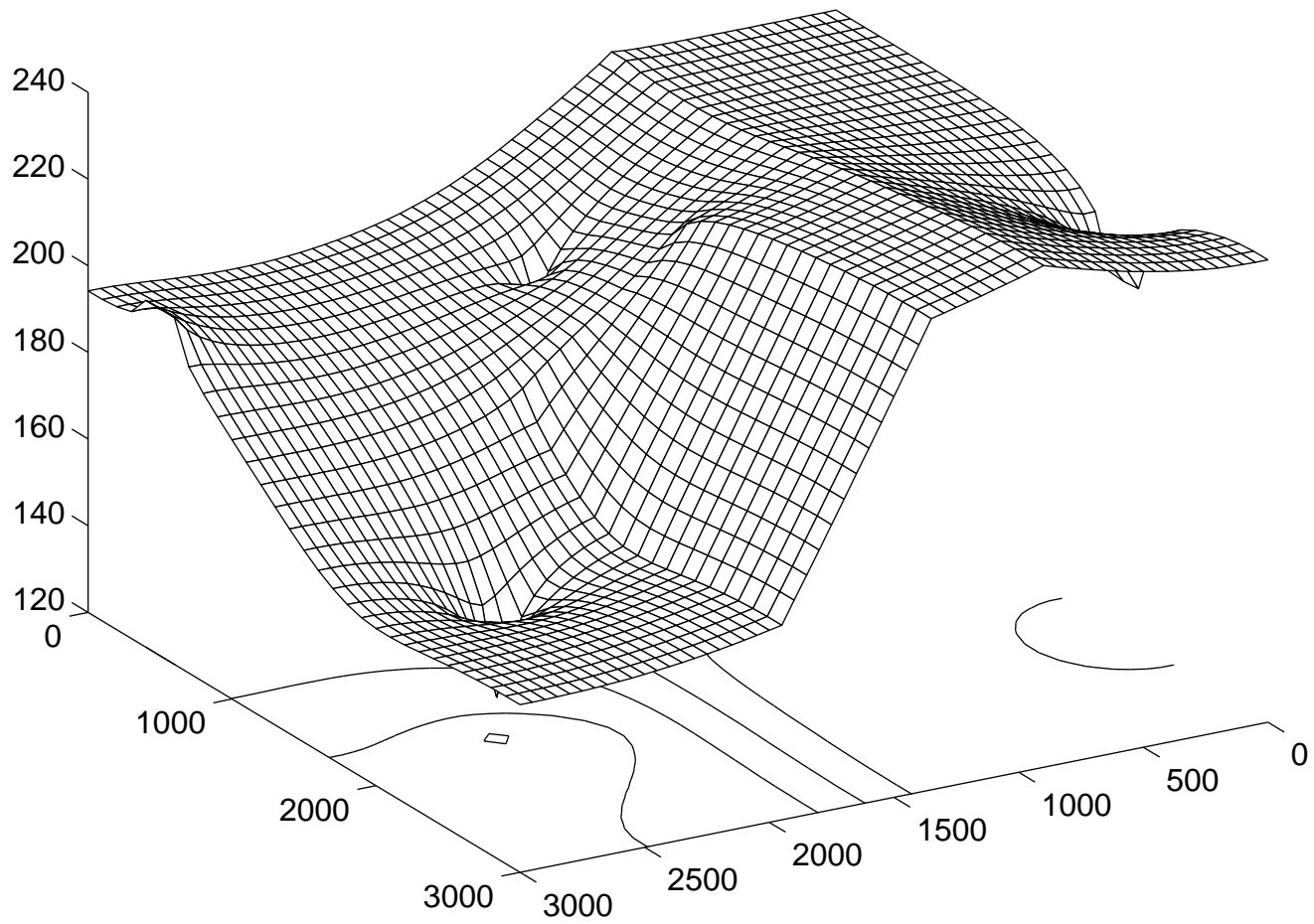
De druk wordt gemeten in meters (m).

Voor de plaats gebruiken we het **Cartesisch coördinaten systeem** waarbij:

x is een coördinaat in de oost-west richting,
 y in de noord-zuid richting en
 z in de diepte.

Alle grootheden in meters.

Het punt $(0, 0, 0)$ ligt in de top-zuid-west (in feite: west-zuid-top) hoek van ons gebied.



Programma

- Inleiding
- De druk van het grondwater
- De stroming van het grondwater
- Wet van behoud van massa
- Randvoorwaarden
- Verspreiding van een verontreiniging:
 - diffusie
 - advectie
- Absorptie en bacteriële verontreiniging
- Modelleren is vereenvoudigen

De **snellheid** waarmee het grondwater stroomt is

- evenredig met het drukverschil
- de evenredigheids constante, de zogenaamde **doorlaadbaarheidscoëfficiënt**, hangt af van de grondsoort.

De snellheid is een vector

$$\vec{U}(x, y, z) = \begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix},$$

die afhangt van plaats

(en ook van de tijd, maar onder onze aanname dat het systeem stationair is valt die tijdsafhankelijkheid weg).

De **snellheid** waarmee het grondwater stroomt is

- evenredig met het drukverschil
- de evenredigheids constante, de zogenaamde **doorlaadbaarheidscoëfficiënt**, hangt af van de grondsoort.

De snellheid is een vector \vec{U} .

Interpretatie.

Een druppeltje water dat zich op tijdstip t op plek

$$(x, y, z)$$

bevindt is Δt dag later te vinden op plek

$$(x, y, z) + \Delta t (\vec{U}(x, y, z))^T$$

mits Δt zo klein is dat \vec{U} nauwelijks verandert op het traject tussen (x, y, z) en $(x, y, z) + \Delta t \vec{U}^T(x, y, z)$.

De **snellheid** waarmee het grondwater stroomt is

- evenredig met het drukverschil
- de evenredigheids constante, de zogenaamde **doorlaadbaarheidscoëfficiënt**, hangt af van de grondsoort.

De snellheid is een vector \vec{U} .

Interpretatie.

Een druppeltje water dat zich op tijdstip t op plek

$$(x, y, z)$$

bevindt is Δt dag later te vinden op plek

$$(x, y, z) + \Delta t (\vec{U}(x, y, z))^T$$

Snellheid is een lokale en temperale grootheid.

“Ik kan 36 km/uur fietsen, maar dat hou ik maar 10 seconde (of 100 meter) vol.”

De **snellheid** waarmee het grondwater stroomt is

- evenredig met het drukverschil
- de evenredigheids constante, de zogenaamde **doorlaadbaarheidscoëfficiënt**, hangt af van de grondsoort.

De snellheid is een vector \vec{U} .

In tegenstelling tot een fietser, kan een watervollume “zich splitsen en verschillende kanten opgaan”. De snellheid van de grondwaterstroming is daarom iets ingewikkelder dan ‘meter per dag’.

De **snellheid** waarmee het grondwater stroomt is

- evenredig met het drukverschil
- de evenredigheids constante, de zogenaamde **doorlaadbaarheidscoëfficiënt**, hangt af van de grondsoort.

De snellheid is een vector \vec{U} .

De snellheid wordt uitgedrukt in $\text{m}^3/(\text{m}^2 \text{ dag})$:

dat is de hoeveelheid water (*in kubieke meter*) die in een tijdseenheid (*gemeten in dagen*) door een oppervlakte eenheid (*in vierkante meters*) stroomt. Het punt (x, y, z) waar de snellheid voor opgegeven wordt is het midden van de oppervlakte eenheid en de oppervlakte staat hierbij loodrecht op de snellheidsvector \vec{U} .

Bedenk weer dat alles lokaal en temporaal geïnterpreteerd moet worden.

De **snellheid** waarmee het grondwater stroomt is

- evenredig met het drukverschil
- de evenredigheids constante, de zogenaamde **doorlaadbaarheidscoëfficiënt**, hangt af van de grondsoort.

De snellheid is een vector \vec{U} .

De snellheid wordt uitgedrukt in $\text{m}^3/(\text{m}^2 \text{ dag})$.

Het drukverschil is in meters (d.w.z., in de eenheid die gekozen is om de grootte van de waterdruk in uit te drukken).

De waarde van de doorlaadbaarheidscoëfficiënten wordt daarom gemeten in $\text{m}^3/(\text{m}^2 \text{ dag m})$:

dat is de hoeveelheid water (in m^3) die per dag door een oppervlakte van een m^2 grond stroomt bij een druk verschil van een m over een afstand van een m.

De stroming van het grondwater

In een zeker gebied zijn we geïnteresseerd in de **druk** $\phi(x, y, z)$ **van het grondwater**.

Aanname. De situatie is stationair (tijdsonafhankelijk).

Druk verschil leidt tot stroming:
water stroomt van hoge druk naar lage druk:

$$-\text{grad } \phi(x, y, z) = -\nabla\phi(x, y, z) \equiv - \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x}(x, y, z) \\ \frac{\partial\phi}{\partial y}(x, y, z) \\ \frac{\partial\phi}{\partial z}(x, y, z) \end{bmatrix}$$

Grootte van de stroming hangt af van de grondsoort:

$$\vec{u}(x, y, z) \equiv -a(x, y, z)\nabla\phi(x, y, z)$$

met a positief reëel waardig:

a is de **doorlaadbaarheidscoëfficiënt**.

De stroming van het grondwater

In een zeker gebied zijn we geïnteresseerd in de **druk** $\phi(x, y, z)$ **van het grondwater**.

Aanname. De situatie is stationair (tijdsonafhankelijk).

Druk verschil leidt tot stroming:
water stroomt van hoge druk naar lage druk:

$$-\text{grad } \phi(x, y, z) = -\nabla\phi(x, y, z) \equiv - \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x}(x, y, z) \\ \frac{\partial\phi}{\partial y}(x, y, z) \\ \frac{\partial\phi}{\partial z}(x, y, z) \end{bmatrix}$$

Grootte van de stroming hangt af van de grondsoort:

$$\vec{u}(x, y, z) \equiv -a(x, y, z)\nabla\phi(x, y, z)$$

met a positief reëel waardig: $a = a(x, y, z)$ in $\text{m}^3/\text{dag m}^2 \text{ m}$.
De **snelheid** \vec{u} van de **grondwaterstroming** is in $\text{m}^3/\text{dag m}^2$

De stroming van het grondwater

In een zeker gebied zijn we geïnteresseerd in de **druk** $\phi(x, y, z)$ **van het grondwater**.

Aanname. De situatie is stationair (tijdsonafhankelijk).

Druk verschil leidt tot stroming:
water stroomt van hoge druk naar lage druk:

$$-\text{grad } \phi(x, y, z) = -\nabla\phi(x, y, z) \equiv - \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x}(x, y, z) \\ \frac{\partial\phi}{\partial y}(x, y, z) \\ \frac{\partial\phi}{\partial z}(x, y, z) \end{bmatrix}$$

De **stroomsnelheid** \vec{u} hangt af van het drukverschil en de grondsoort:

$$\vec{U}(x, y, z) \equiv -K(x, y, z)\nabla\phi(x, y, z)$$

met K symmetrisch 3×3 matrix waardig, plaats afhank..

De stroming van het grondwater

In twee dimensies (2-d)

$$\vec{U}(x, y) = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = -K(x, y) \nabla \phi(x, y) = -K(x, y) \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix}.$$

In een dimensie (1-d)

$$\vec{U}(x) = u(x) = -K(x) \nabla \phi(x) = -K(x) \frac{\partial \phi}{\partial x}(x).$$

Programma

- Inleiding
- De druk van het grondwater
- De stroming van het grondwater
- Wet van behoud van massa
- Randvoorwaarden
- Verspreiding van een verontreiniging:
 - diffusie
 - advectie
- Absorptie en bacteriële verontreiniging
- Modelleren is vereenvoudigen

Wet van behoud van massa

Om een vergelijking te krijgen voor de druk ϕ van het grondwater gebruiken we de **Wet van behoud van massa**:

Wet. De hoeveelheid water die door de randen **uit** een zeker volume grond stroomt is gelijk aan de hoeveelheid water die door de randen er **instroomt** plus de hoeveelheid water die er in dat volume rechtstreeks bijkomt of uitgaat.

- *Er kan water rechtstreeks ingaan door bijvoorbeeld een regenbui of een (overvolle) rivier,*
- *er kan water rechtstreeks uitgaan door bijvoorbeeld een pomp of een (bijna lege) rivier.*

Wet van behoud van massa

Om een vergelijking te krijgen voor de druk ϕ van het grondwater gebruiken we de **Wet van behoud van massa**:

Wet. De hoeveelheid water die door de randen **uit** een zeker volume grond stroomt is gelijk aan de hoeveelheid water die door de randen er **instroomt** plus de hoeveelheid water die er in dat volume rechtstreeks bijkomt of uitgaat.

Opmerking. In bovenstaande formulering bedoelen met '*uitstroom*', dat er een positieve hoeveelheid water uit het volume komt en met '*instroom*' dat er een positieve hoeveelheid ingaat.

Conventie. Mathematisch is er er geen reden om ook negatieve hoeveelheden toe te staan en aan te nemen dat

$$\text{Instroom} = - \text{Uitstroom}$$

Wet van behoud van massa

Om een vergelijking te krijgen voor de druk ϕ van het grondwater gebruiken we de **Wet van behoud van massa**:

Wet. De hoeveelheid water die door de randen **uit** een zeker volume grond stroomt is gelijk aan de hoeveelheid water die door de randen er **instroomt** plus de hoeveelheid water die er in dat volume rechtstreeks bijkomt of uitgaat.

Gevolg. De hoeveelheid water die in het totaal langs de oostrand, de noordrand en de bovenrand uit een zeker volume grond stroomt is gelijk aan de hoeveelheid water die er in het totaal langs de west-, zuid- en onderrand instroomt plus de hoeveelheid water die er in dat volume rechtstreeks bijkomt.

Wet van behoud van massa

Om een vergelijking te krijgen voor de druk ϕ van het grondwater gebruiken we de **Wet van behoud van massa**:

Wet. De hoeveelheid water die door de randen **uit** een zeker volume grond stroomt is gelijk aan de hoeveelheid water die door de randen er **instroomt** plus de hoeveelheid water die er in dat volume rechtstreeks bijkomt of uitgaat.

Wet. De totale hoeveelheid water die langs de de randen een zeker volume grond instroomt plus de hoeveelheid water die er in dat volume rechtstreeks bijkomt is 0.

Wet van behoud van massa

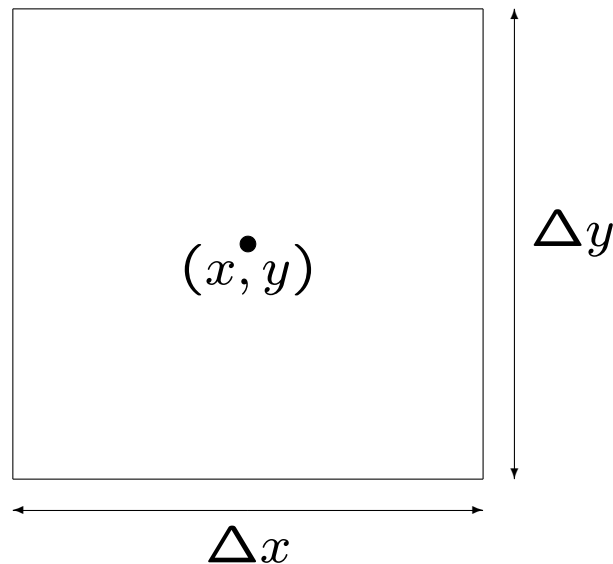
Om een vergelijking te krijgen voor de druk ϕ van het grondwater gebruiken we de **Wet van behoud van massa**:

Wet. De hoeveelheid water die door de randen **uit** een zeker volume grond stroomt is gelijk aan de hoeveelheid water die door de randen er **instroomt** plus de hoeveelheid water die er in dat volume rechtstreeks bijkomt of uitgaat.

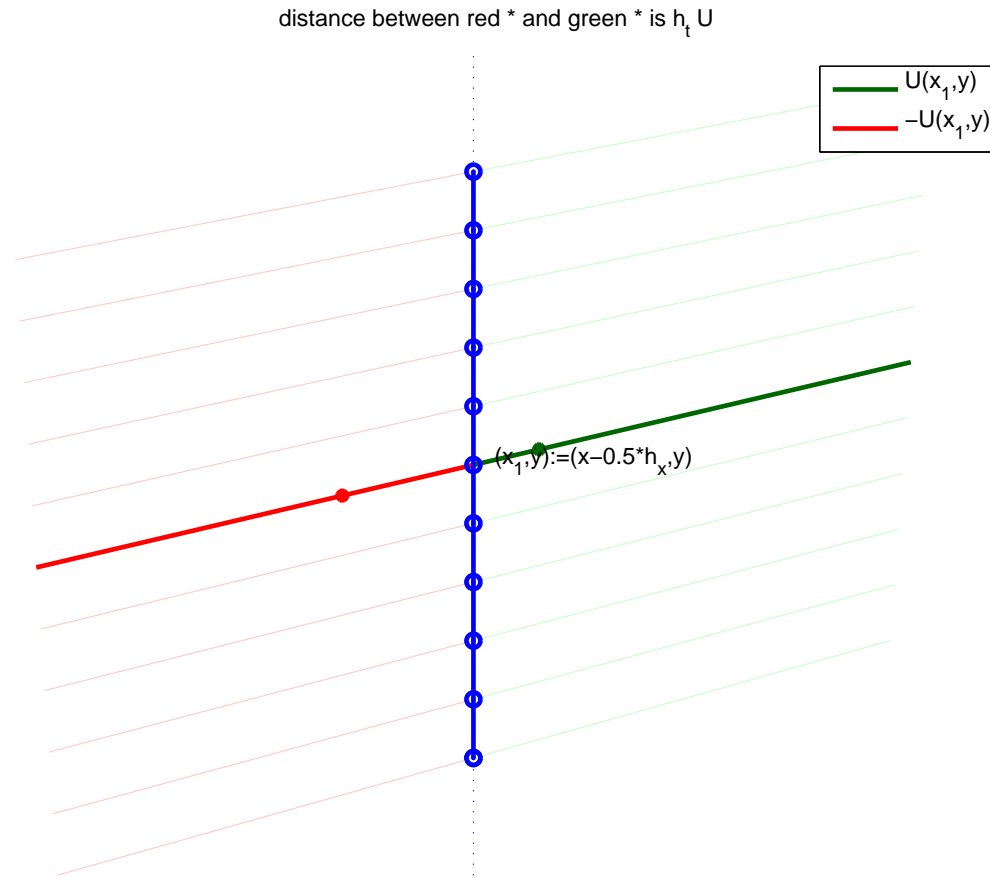
Om de tekeningen overzichtelijk te houden voeren we de afleiding 2 dimensionaal uit (alleen in de oost-west richting en de noord-zuid richting).

Wet van behoud van massa

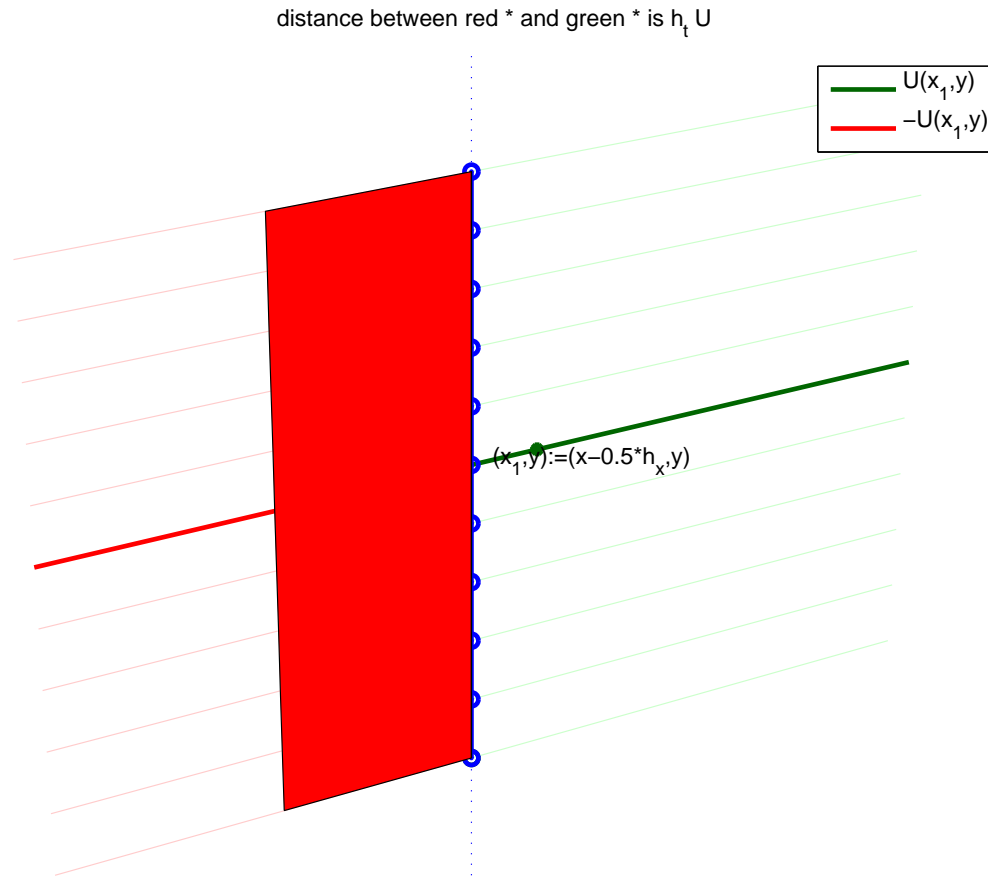
Bekijk een klein rechthoekig gebied rond het punt (x, y) van afmeting Δx bij Δy , met Δx en Δy klein (we zullen Δx en Δy naar 0 laten gaan).



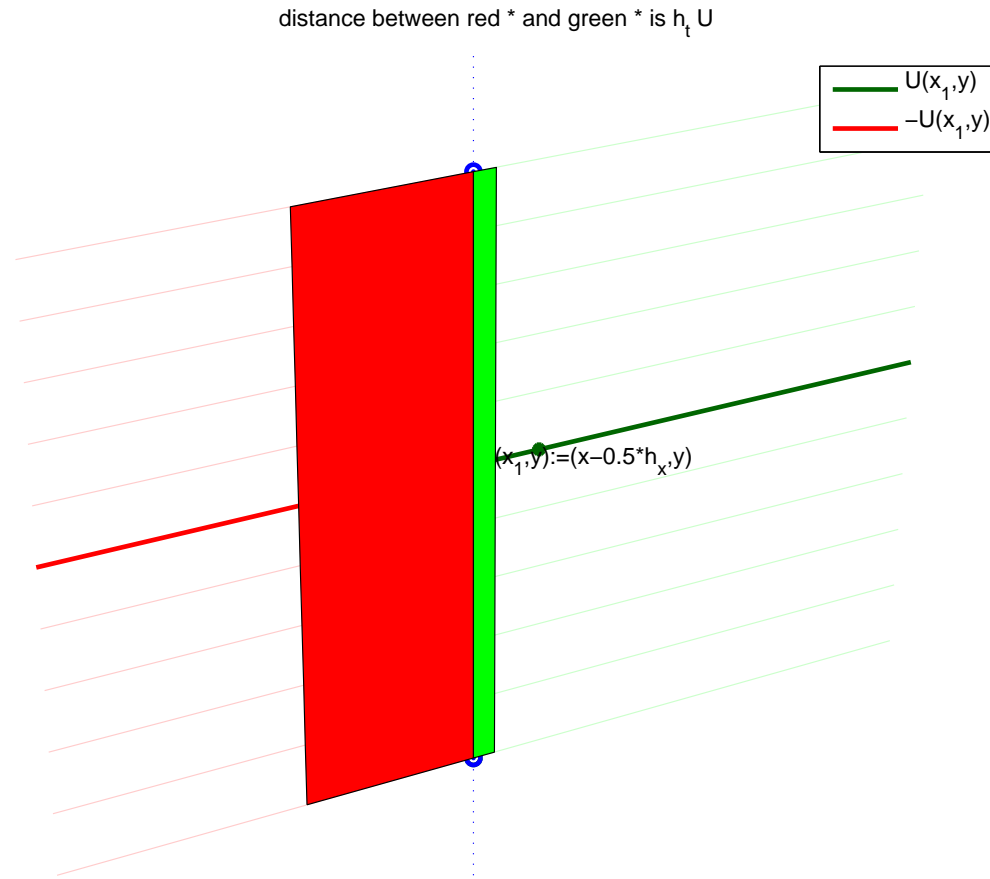
In eerste instantie kijken we wat er gebeurt aan de west rand Γ_{west} .



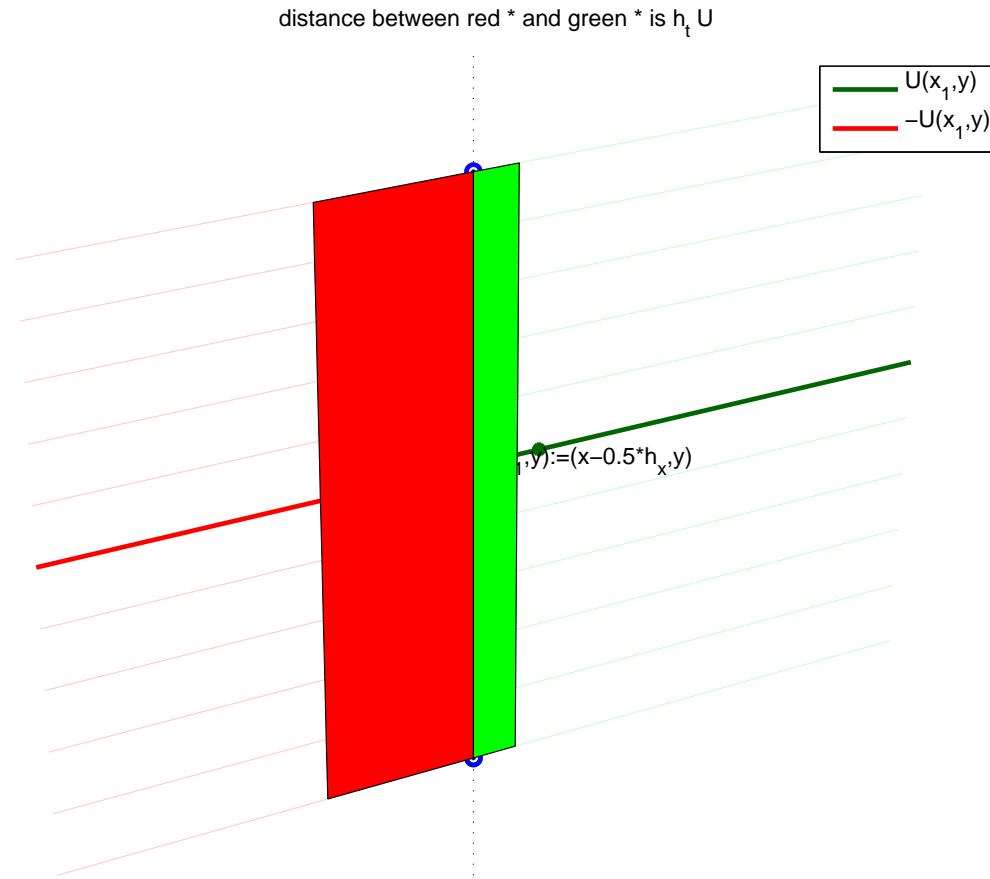
De blauwe lijn is de westrand Γ_{west} van het gebiedje.
 De groene vector is $\vec{U}(x - \frac{1}{2}h_x, y)$. Hier is $h_x = \Delta x$.
 In h_t dag (met $h_t = \Delta t$) reist het waterdruppeltje op de rode punt naar de groene punt



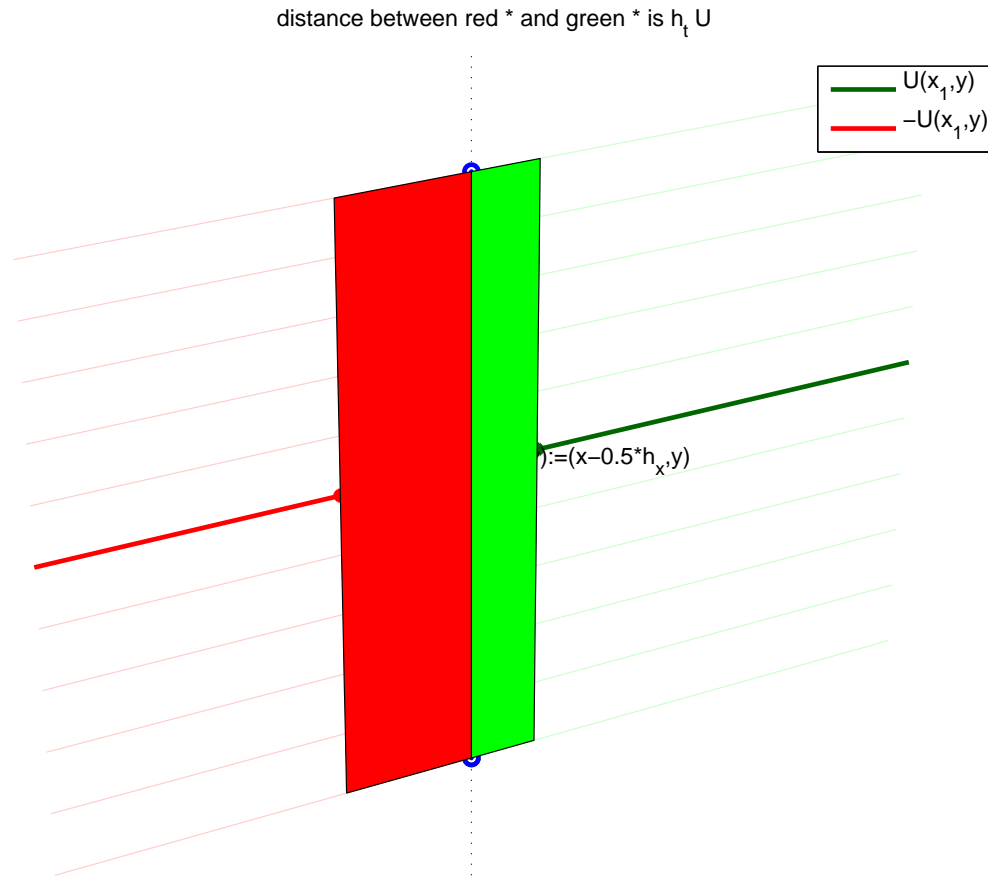
In h_t dag reist het water in het rode gebied door de west-rand (blauwe lijn)



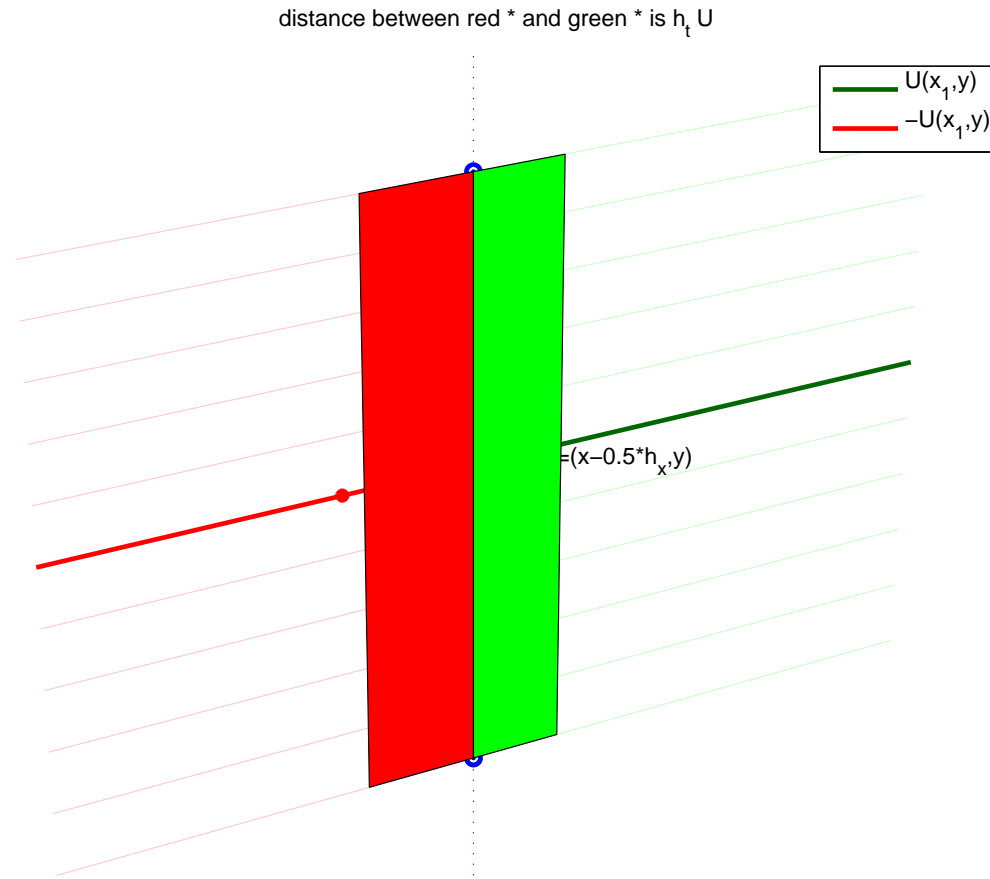
In h_t dag reist het water in het rode gebied door de west-rand (blauwe lijn)



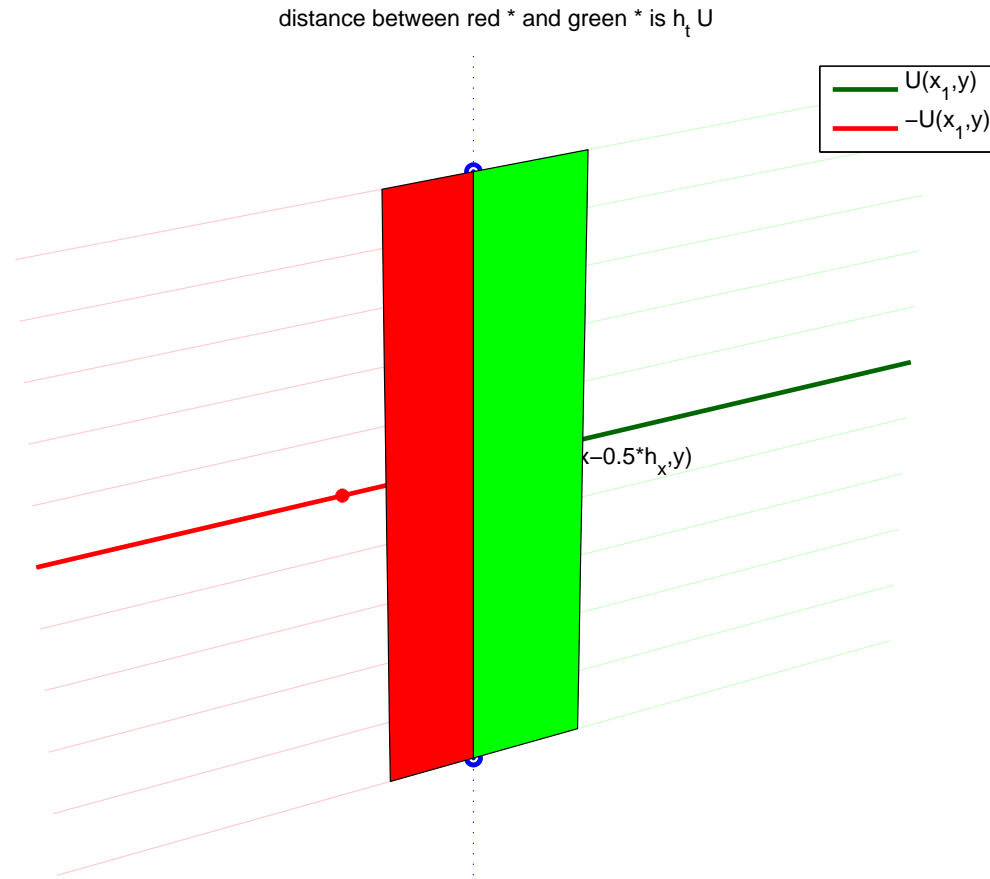
In h_t dag reist het water in het rode gebied door de west-rand (blauwe lijn)



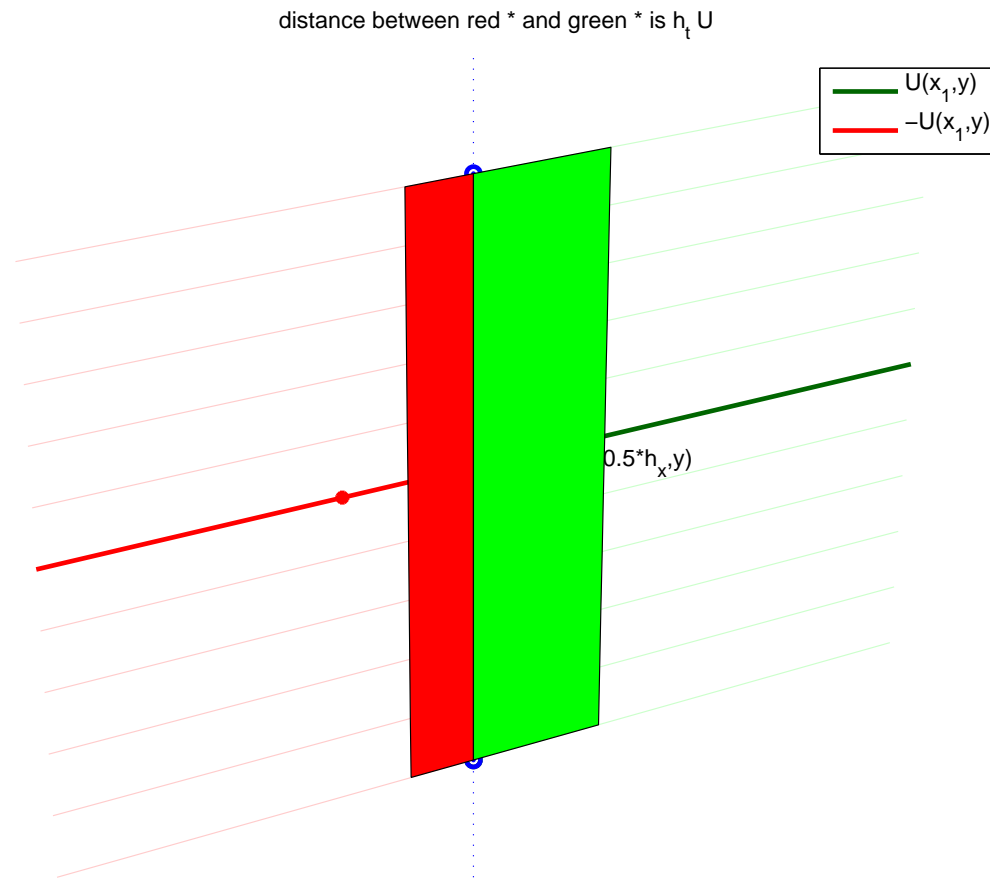
In h_t dag reist het water in het rode gebied door de west-rand (blauwe lijn)



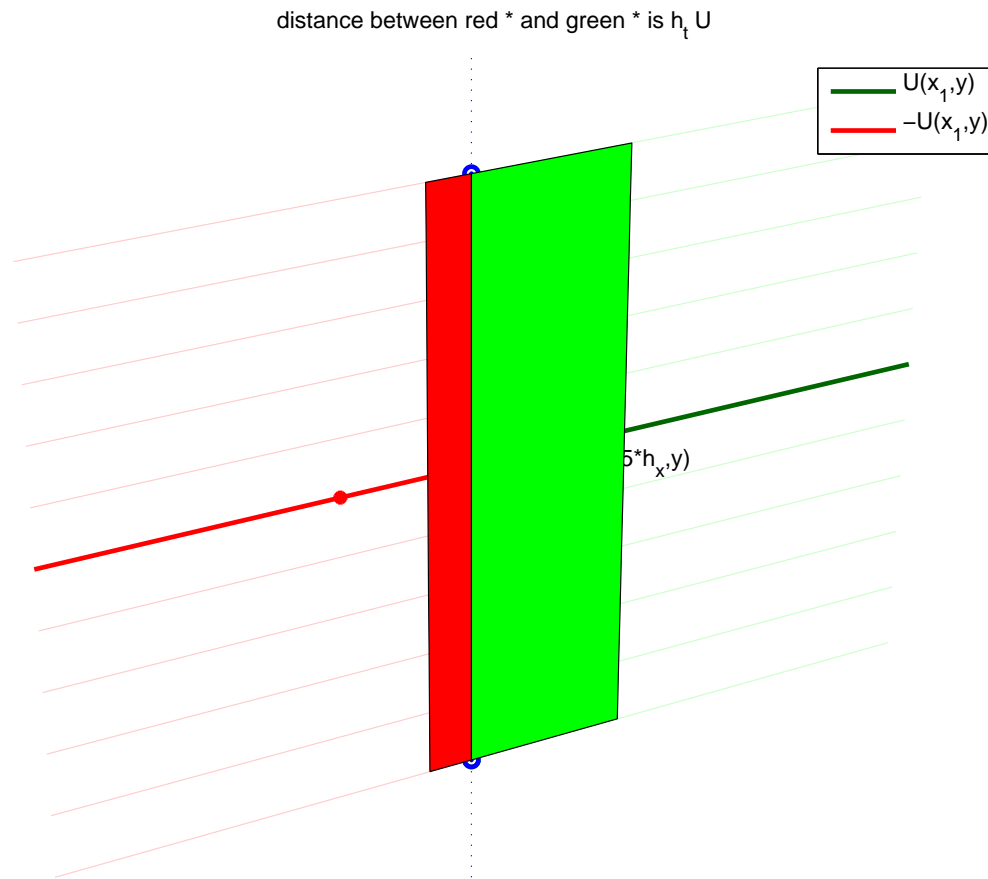
In h_t dag reist het water in het rode gebied door de west-rand (blauwe lijn)



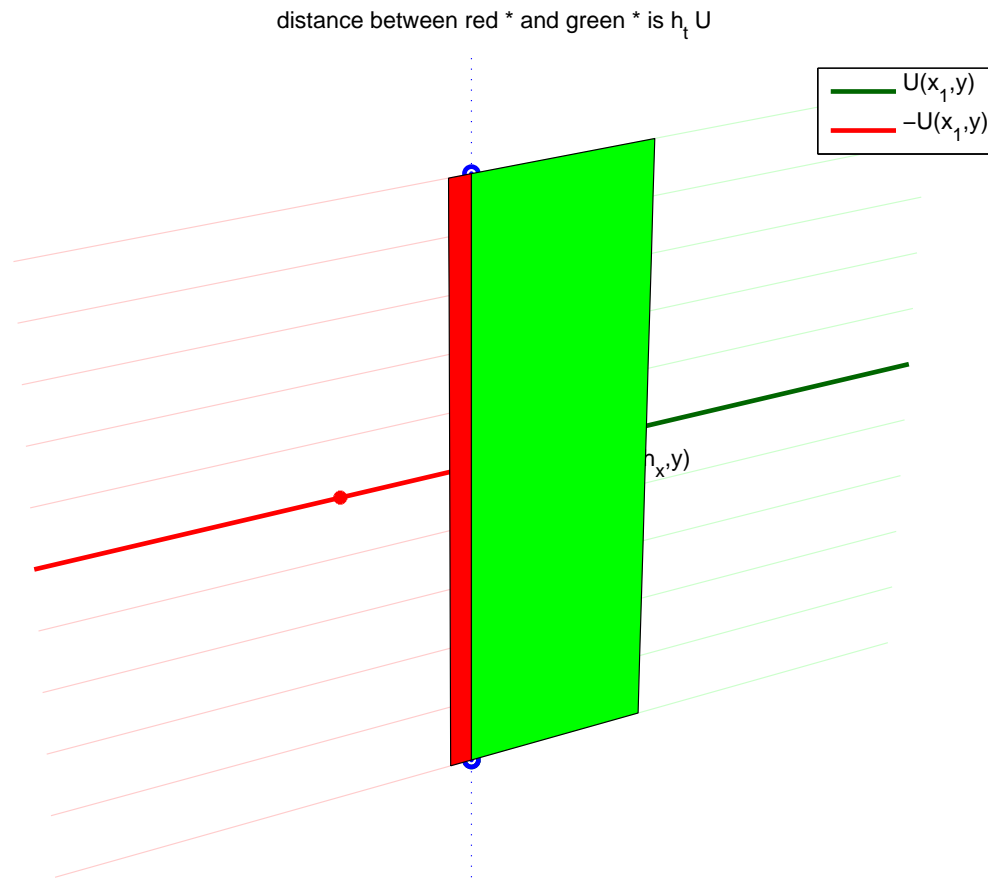
In h_t dag reist het water in het rode gebied door de west-rand (blauwe lijn)



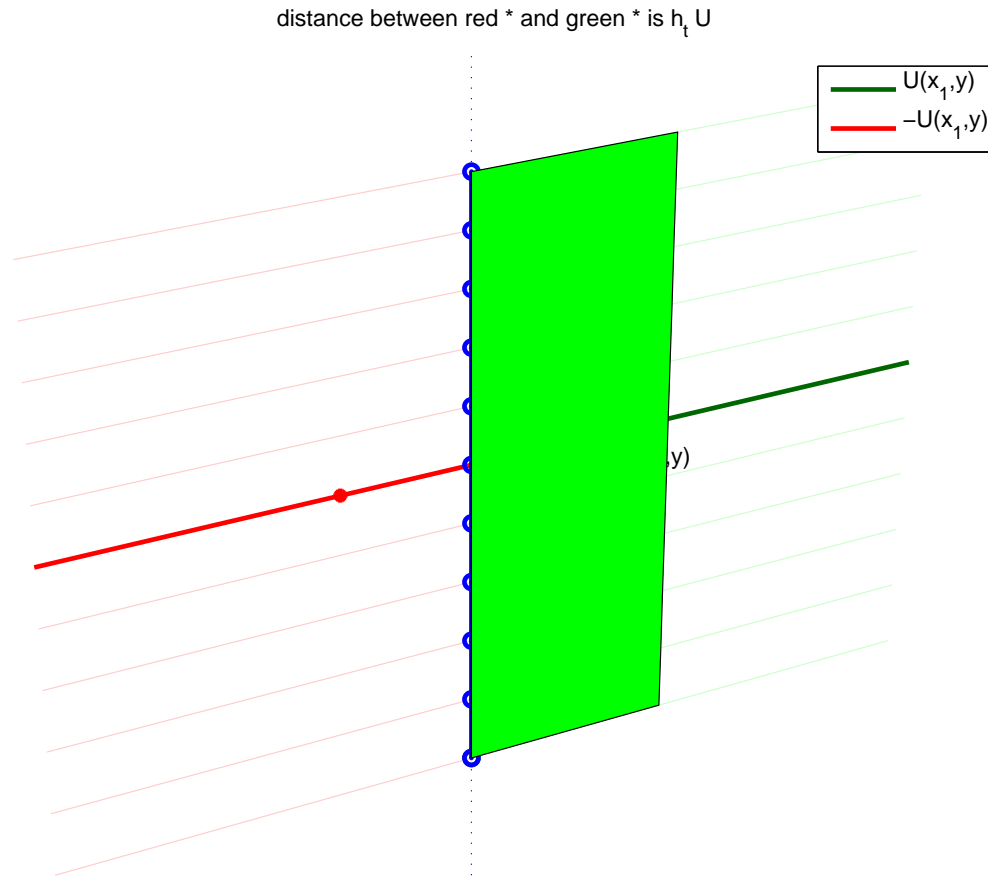
In h_t dag reist het water in het rode gebied door de west-rand (blauwe lijn)



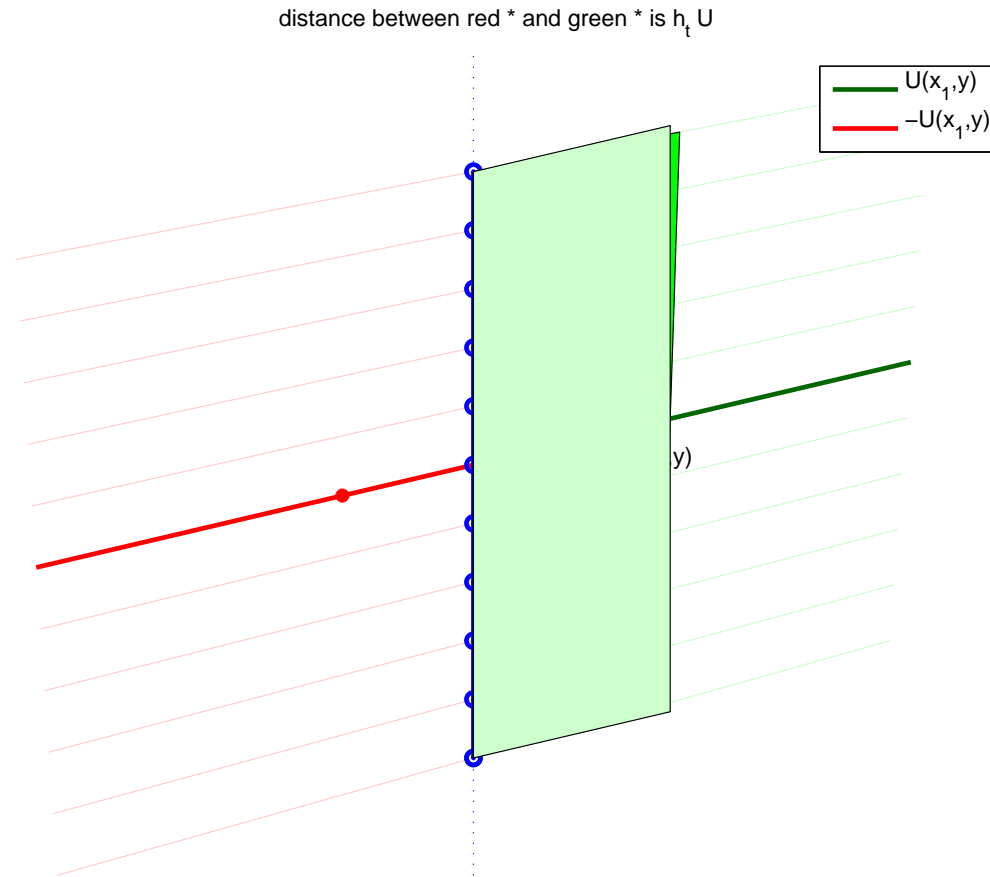
In h_t dag reist het water in het rode gebied door de west-rand (blauwe lijn)



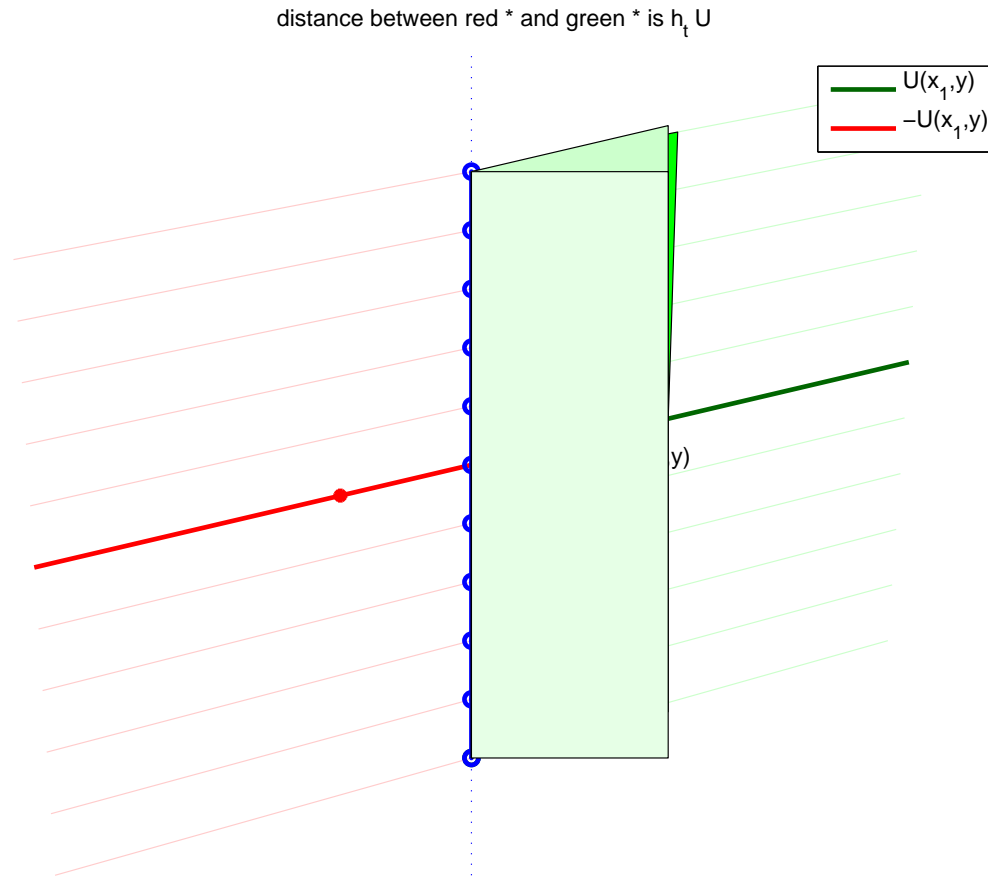
In h_t dag reist het water in het rode gebied door de west-rand (blauwe lijn)



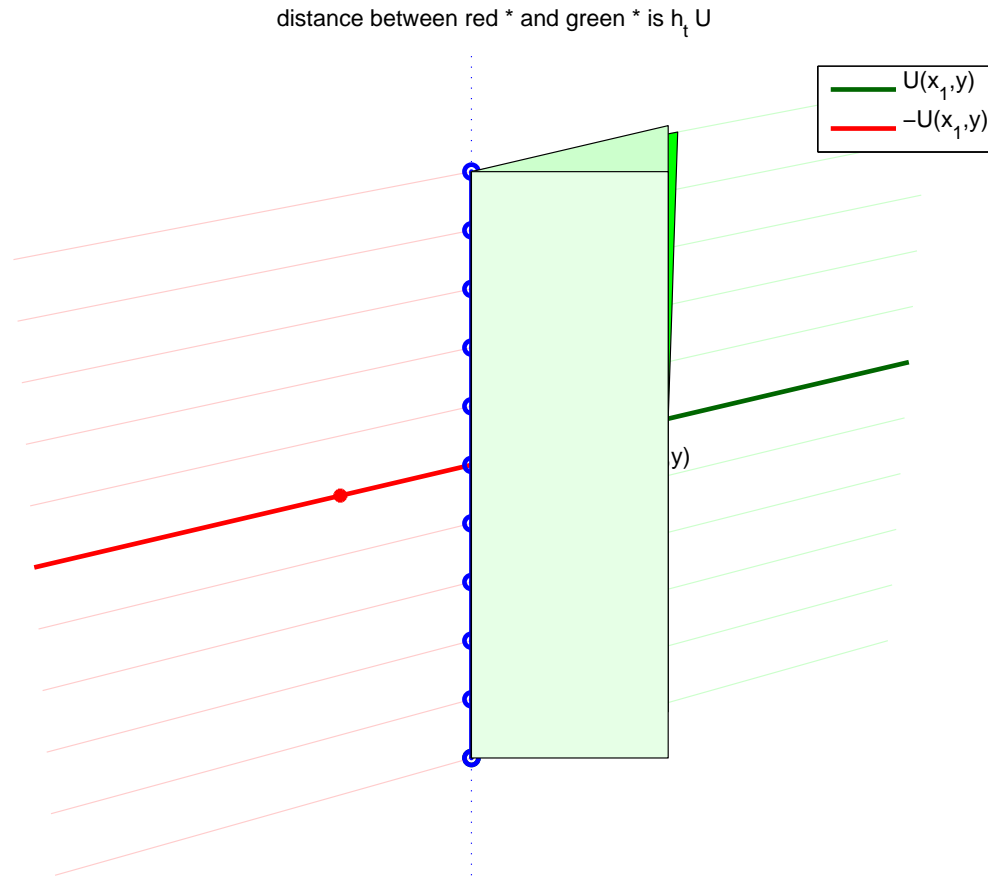
In h_t dag is het water in het groene gebied door het westelijke randje (blauwe lijn) gereisd



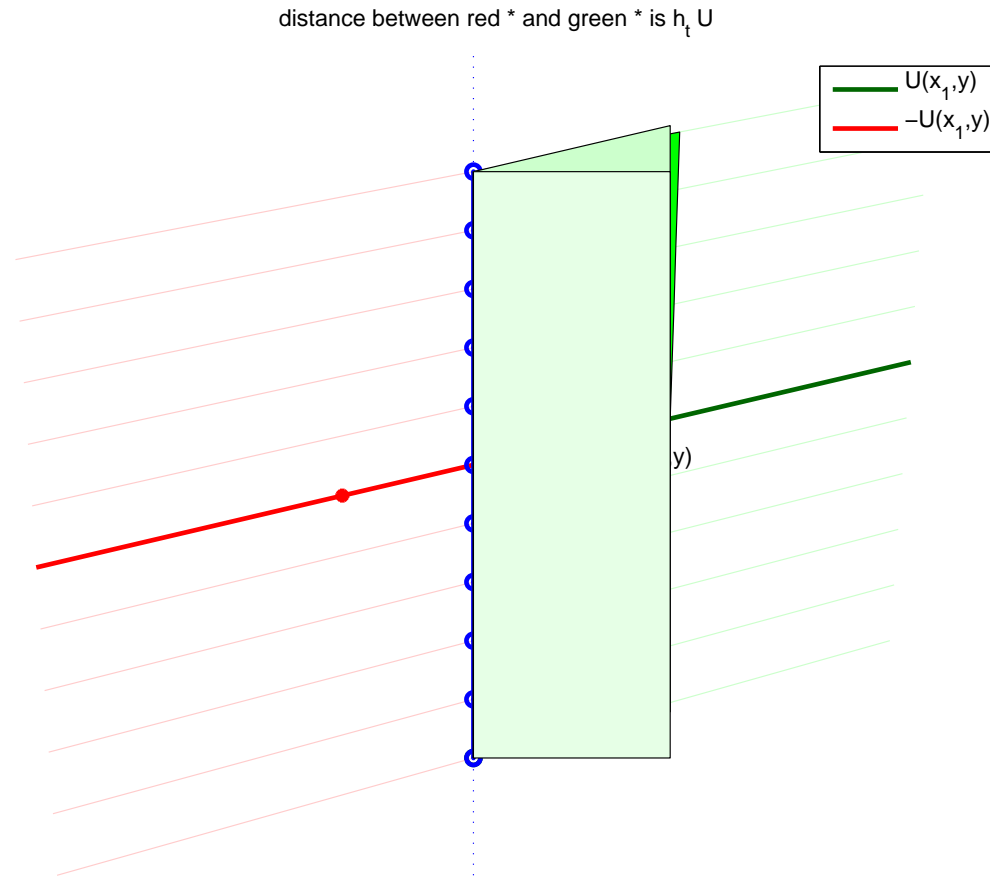
De hoeveelheid water in het donkergroene gebied is gelijk aan de hoeveelheid water in het licht groene gebied: we mogen aannemen dat $\vec{U}(x - \frac{1}{2}\Delta x, y) = \vec{U}(x - \frac{1}{2}\Delta x, y')$ voor alle punten $(x - \frac{1}{2}\Delta x, y')$ op dit westelijk randje.



De hoeveelheid water in het lichtgroene gebied is gelijk aan de hoeveelheid water in het noch lichter groene gebied:



Deze hoeveelheid is gelijk aan $u(x - \frac{1}{2}\Delta x, y) \Delta t \Delta y$.



Deze hoeveelheid is gelijk aan $u(x - \frac{1}{2}\Delta x, y) \Delta t \Delta y$.

In 3-de is dat $u(x - \frac{1}{2}\Delta x, y, z) \Delta t \Delta y \Delta z$.

Samenvatting. In Δt dag stroomt

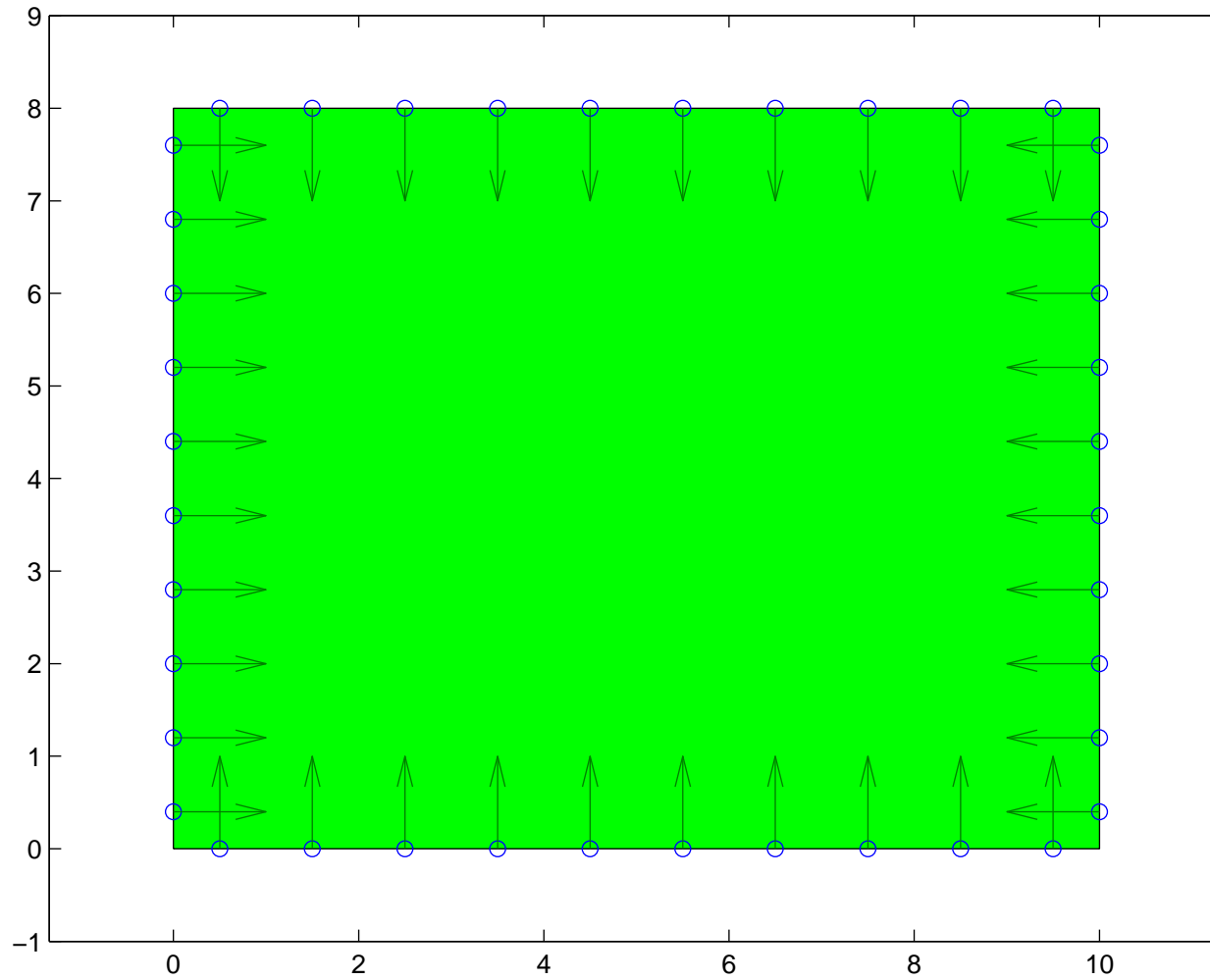
$$\Delta t \int_{\Gamma_{\text{west}}} (\vec{U}(x, y, z), \vec{n}(x, y, z)) \, d_O(y, z) \quad (*)$$

water door het stukje westelijke oppervlak Γ_{west} .

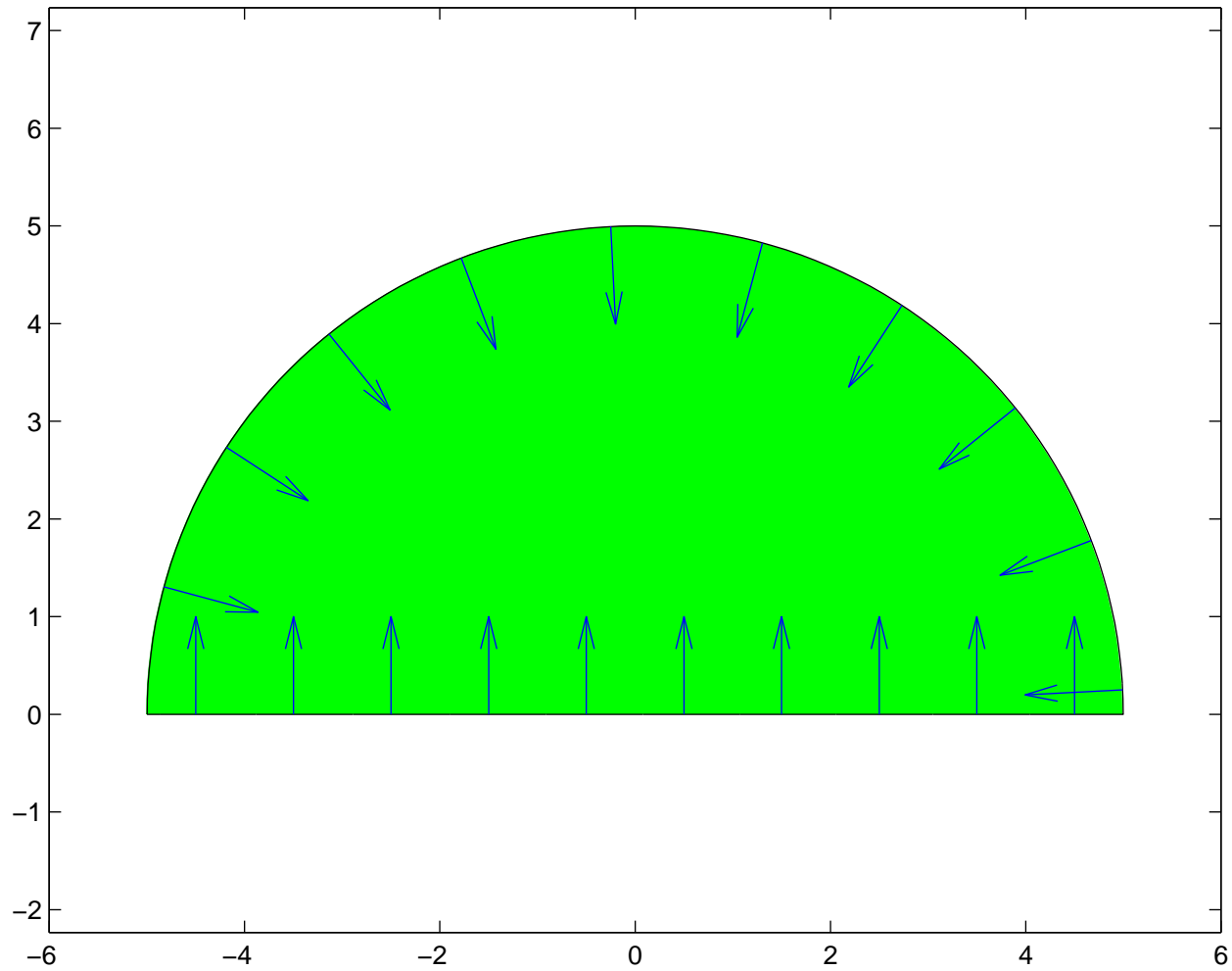
Hierbij is

- $\vec{U}(x, y, z)$ de stroomsnelheid in het punt (x, y, z) van Γ_{west} ,
- $\vec{n}(x, y, z)$ de **normaal vector** in (x, y, z) op Γ_{west} , d.w.z., de vector ter lengte 1 die loodrecht op Γ_{west} staat in de richting waarin de instroom gemeten moet worden (als \vec{n} naar het oosten wijst en $(*)$ heeft bv. een negatieve waarde, dan stroomt het water naar westen).
- (\cdot, \cdot) het standaard inproduct.

Normaalvectoren op de rand die de instroom beschrijven



Normaalvectoren op de rand die de instroom beschrijven



Samenvatting. In Δt dag stroomt

$$\Delta t \int_{\Gamma_{\text{west}}} (\vec{U}(x, y, z), \vec{n}(x, y, z)) \, d_O(y, z) \quad (*)$$

water door het stukje westelijke oppervlak Γ_{west} .

Hierbij is

- $\vec{U}(x, y, z)$ de stroomsnelheid in het punt (x, y, z) van Γ_{west} ,
- $\vec{n}(x, y, z)$ de **normaal vector** in (x, y, z) op Γ_{west} , d.w.z., de vector ter lengte 1 die loodrecht op Γ_{west} staat in de richting waarin de instroom gemeten moet worden (als \vec{n} naar het oosten wijst en $(*)$ heeft bv. een negatieve waarde, dan stroomt het water naar westen).
- (\cdot, \cdot) het standaard inproduct.

Als Γ_{west} een klein oppervlakte is van Δx bij Δz meter, dan is $(*)$ ongeveer gelijk aan $u(x - \frac{1}{2}\Delta x, y, z)\Delta t\Delta y\Delta z$.

Wet van behoud van massa

Als in het gebiedje alleen water inkomt of uitgaat door stroming (dus geen pomp, geen rivier, geen regenbui) dan geldt in 2-d *(instroom door)*

$$\begin{aligned} &+ u(x - \frac{1}{2}\Delta x, y) \Delta t \Delta y && \text{(westrand)} \\ &- u(x + \frac{1}{2}\Delta x, y) \Delta t \Delta y && \text{(ostrand)} \\ &+ v(x, y - \frac{1}{2}\Delta y) \Delta t \Delta x && \text{(zuidstrand)} \\ &- v(x, y + \frac{1}{2}\Delta y) \Delta t \Delta x && \text{(noordrand)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

De normaal vector aan de ostrand en aan de westrand wijzen in tegengestelde richting (naar elkaar toe): ze modelleren instroom. Dit verklaart de verschillende tekens voor de u aan de oost- en westrand.

Hetzelfde geldt voor de noord- en zuidrand.

Wet van behoud van massa

De abstracte wiskundige formulering is

$$\int_{\Gamma} (\vec{U}(x, y, z), \vec{n}(x, y, z)) \, d_O(x, y, z) = 0,$$

waarbij nu over het oppervlakje Γ van de rand $\Gamma = \partial\mathcal{K}$ van het gebiedje \mathcal{K} geïntegreerd wordt en aangenomen wordt dat er in \mathcal{K} alleen water uitgaat of inkomt via de rand.

Wet van behoud van massa

Als in het gebiedje alleen water inkomt of uitgaat door stroming door de rand (dus geen pomp, geen rivier, geen regenbui) dan geldt in 2-d

$$u(x - \frac{1}{2}\Delta x, y)\Delta t\Delta y - u(x + \frac{1}{2}\Delta x, y)\Delta t\Delta y \\ + v(x, y - \frac{1}{2}\Delta y)\Delta t\Delta x - v(x, y + \frac{1}{2}\Delta y)\Delta t\Delta x = 0.$$

Delen we door $\Delta t \Delta x \Delta y$, dan zien we dat

$$\frac{1}{\Delta x}[u(x - \frac{1}{2}\Delta x, y) - u(x + \frac{1}{2}\Delta x, y)] \\ + \frac{1}{\Delta y}[v(x, y - \frac{1}{2}\Delta y) - v(x, y + \frac{1}{2}\Delta y)] = 0$$

Wet van behoud van massa

Als in het gebiedje alleen water inkomt of uitgaat door stroming door de rand (dus geen pomp, geen rivier, geen regenbui) dan geldt in 2-d

$$u(x - \frac{1}{2}\Delta x, y)\Delta t\Delta y - u(x + \frac{1}{2}\Delta x, y)\Delta t\Delta y \\ + v(x, y - \frac{1}{2}\Delta y)\Delta t\Delta x - v(x, y + \frac{1}{2}\Delta y)\Delta t\Delta x = 0.$$

Delen we door $\Delta t \Delta x \Delta y$, dan zien we dat

$$\frac{1}{\Delta x}[u(x - \frac{1}{2}\Delta x, y) - u(x + \frac{1}{2}\Delta x, y)] \\ + \frac{1}{\Delta y}[v(x, y - \frac{1}{2}\Delta y) - v(x, y + \frac{1}{2}\Delta y)] = 0$$

Nemen we de limiet $\Delta x \rightarrow 0$ en $\Delta y \rightarrow 0$, dan

$$-\text{div } \vec{U} \equiv -\nabla \cdot \vec{U} \equiv -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Wet van behoud van massa

Als in het gebiedje alleen water inkomt of uitgaat door stroming door de rand (dus geen pomp, geen rivier, geen regenbui) dan geldt in 2-d

$$u(x - \frac{1}{2}\Delta x, y)\Delta t\Delta y - u(x + \frac{1}{2}\Delta x, y)\Delta t\Delta y \\ + v(x, y - \frac{1}{2}\Delta y)\Delta t\Delta x - v(x, y + \frac{1}{2}\Delta y)\Delta t\Delta x = 0.$$

Delen we door $\Delta t \Delta x \Delta y$, dan zien we dat

$$\frac{1}{\Delta x}[u(x - \frac{1}{2}\Delta x, y) - u(x + \frac{1}{2}\Delta x, y)] \\ + \frac{1}{\Delta y}[v(x, y - \frac{1}{2}\Delta y) - v(x, y + \frac{1}{2}\Delta y)] = 0$$

Nemen we de limiet $\Delta x \rightarrow 0$ en $\Delta y \rightarrow 0$, dan

$$-\text{div } \vec{U} \equiv -\nabla \bullet \vec{U} \equiv -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Wet van behoud van massa

Als in een omgeving van een punt alleen water inkomt of uitgaat door stroming door de rand (dus geen pomp, geen rivier, geen regenbui) dan geldt in dat punt

$$-\operatorname{div} \vec{U} \equiv -\nabla \bullet \vec{U} \equiv -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (+)$$

Stelling. Onder bovenstaand aanname

$$\nabla \bullet (K \nabla \phi) = 0 \quad (*)$$

Wet van behoud van massa

Als in een omgeving van een punt alleen water inkomt of uitgaat door stroming door de rand (dus geen pomp, geen rivier, geen regenbui) dan geldt in dat punt

$$-\operatorname{div} \vec{U} \equiv -\nabla \bullet \vec{U} \equiv -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (+)$$

Stelling. Onder bovenstaand aanname

$$\nabla \bullet (K \nabla \phi) = 0 \quad (*)$$

Opmerking. Stelling van Gauss:

$$\int_{\Gamma} (\vec{U}(x, y, z), \vec{n}(x, y, z)) \, d_O(x, y, z) = \int \int_{\mathcal{K}} -\nabla \bullet \vec{U} \, d_V(x, y, z)$$

Wet van behoud van massa

Als in een omgeving van een punt alleen water inkomt of uitgaat door stroming door de rand (dus geen pomp, geen rivier, geen regenbui) dan geldt in dat punt

$$-\operatorname{div} \vec{U} \equiv -\nabla \bullet \vec{U} \equiv -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (+)$$

Stelling. Onder bovenstaand aanname

$$\nabla \bullet (K \nabla \phi) = 0 \quad (*)$$

Een vectorveld \vec{U} waarvoor (+) geldt op een gebied is **divergentie vrij** op dat gebied.

Het snelheidsveld van de grondwaterstroming is dus divergentie vrij op een gebied als er in dat gebied alleen water bij komt of af gaat door stroming door de rand.

Wet van behoud van massa

Als in een omgeving van een punt alleen water inkomt of uitgaat door stroming door de rand (dus geen pomp, geen rivier, geen regenbui) dan geldt in dat punt

$$-\operatorname{div} \vec{U} \equiv -\nabla \bullet \vec{U} \equiv -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (+)$$

Stelling. Onder bovenstaand aanname

$$\nabla \bullet (K \nabla \phi) = 0 \quad (*)$$

Opgave. Modelleer in 2-d in het model (*) een regenbui f ($f(x, y)$ is de hoeveelheid regen (in m^3) per m^2 grond).

Waarom is het vanuit een wiskundig perspectief lastig om een pomp te modelleren?

Programma

- Inleiding
- De druk van het grondwater
- De stroming van het grondwater
- Wet van behoud van massa
- Randvoorwaarden
- Verspreiding van een verontreiniging:
 - diffusie
 - advectie
- Absorptie en bacteriële verontreiniging
- Modelleren is vereenvoudigen

De wet van behoud van massa leidt tot een

partiële differentiaal vergelijking

die gedrag van de druk van het grondwater, en daarmee de stroming van het grondwater modelleert in een gebied.

De vergelijking leggen de oplossing echter niet volledig vast: de vergelijking heeft geen unieke oplossing (als ϕ een oplossing is dan is bijvoorbeeld $\phi + \kappa$ voor iedere constante κ ook een oplossing).

Met wat extra informatie op de rand kunnen we wel de oplossing vastleggen.

Randvoorwaarden

D is een gebied met rand $\Gamma = \partial D$.

In een punt $(x, y, z) \in \Gamma$ geldt

- de **essentiële** of **Dirichlet** randvoorwaarde als

$$\phi(x, y, z) = \phi_0(x, y, z)$$

Hierbij is van $\phi_0(x, y, z)$ de waarde bekend,

uit bijvoorbeeld metingen in het veld.

Randvoorwaarden

D is een gebied met rand $\Gamma = \partial D$.

In een punt $(x, y, z) \in \Gamma$ geldt

- de **essentiële** of **Dirichlet** randvoorwaarde als

$$\phi(x, y, z) = \phi_0(x, y, z)$$

- de **natuurlijke** of **Neumann** randvoorwaarde als

$$(-K\nabla\phi) \bullet \vec{n} = \chi_0$$

\vec{n} is de in (x, y, z) naar buiten gerichte normaal vector op Γ .
Van χ_0 is de waarde bekend in (x, y, z) .

Als er bijvoorbeeld in de buurt van (x, y, z) door Γ geen stroming mogelijk is (door bv. een betonnen rand), dan is $\chi_0 = 0$: naar buiten stroomt er niets.

Randvoorwaarden

D is een gebied met rand $\Gamma = \partial D$.

In een punt $(x, y, z) \in \Gamma$ geldt

- de **essentiële** of **Dirichlet** randvoorwaarde als

$$\phi(x, y, z) = \phi_0(x, y, z)$$

- de **natuurlijke** of **Neumann** randvoorwaarde als

$$(-K\nabla\phi) \cdot \vec{n} = \chi_0$$

- de **gemengde** of **Robin** randvoorwaarde als

$$\alpha(-K\nabla\phi) \cdot \vec{n} = \gamma(\phi - \chi_0)$$

van α , γ , en χ_0 zijn de waarden bekend in (x, y, z) .

De uitstroom is evenredig met het verschil van de druk ϕ en een referentie druk χ_0 .

Dit zou een bron van een rivier kunnen modelleren.

Randvoorwaarden

D is een gebied met rand $\Gamma = \partial D$.

In een punt $(x, y, z) \in \Gamma$ geldt

- de **essentiële** of **Dirichlet** randvoorwaarde als

$$\phi(x, y, z) = \phi_0(x, y, z)$$

- de **natuurlijke** of **Neumann** randvoorwaarde als

$$(-K\nabla\phi) \cdot \vec{n} = \chi_0$$

- de **gemengde** of **Robin** randvoorwaarde als

$$\alpha(-K\nabla\phi) \cdot \vec{n} = \gamma(\phi - \chi_0)$$

Stelling. Als op D (*) geldt en in ieder punt van Γ een van bovenstaande randvoorwaarden en in minstens een punt geldt een Dirichlet randvoorwaarde dan is de oplossing ϕ uniek.

Programma

- Inleiding
- De druk van het grondwater
- De stroming van het grondwater
- Wet van behoud van massa
- Randvoorwaarden
- Verspreiding van een verontreiniging:
 - diffusie
 - advectie
- Absorptie en bacteriële verontreiniging
- Modelleren is vereenvoudigen

Verspreiding van gif

Laat in een punt (x, y, z) van het gebied D

$$\psi(x, y, z)$$

de **concentratie** van 'n zeker gif voorstellen (gemeten in gram per m³ grondwater), waarvan we de verspreiding willen modelleren.

We nemen weer aan dat de ψ tijdsafhankelijk is: we beschouwen de stationaire situatie.

Het gif verspreidt zich om twee redenen: door

- **diffusie** en
- **advectie**
(meegenomen worden door de grondwater stroming).

Diffusie

We nemen eerst aan dat het grondwater 'stil staat' (niet stroomt: $-\nabla\phi = 0$ op D).

Het gif verspreidt zich dan doordat ieder molecuul beweegt volgens de standaard thermische dynamiek. Hierbij botst het molecuul tegen andere moleculen aan (van water en grond en ander materiaal) waardoor de beweging van grootte en richting verandert.

Een **Brownse beweging** vormt een adequate beschrijving van dit **diffusie** proces.

[Zie matlab simulatie]

Diffusie

We nemen eerst aan dat het grondwater ‘stil staat’ (niet stroomt: $-\nabla\phi = 0$ op D).

Het gif verspreidt zich dan doordat ieder molecuul beweegt volgens de standaard thermische dynamiek. Hierbij botst het molecuul tegen andere moleculen aan (van water en grond en ander materiaal) waardoor de beweging van grootte en richting verandert.

Een **Brownse beweging** vormt een adequate beschrijving van dit **diffusie** proces.

Op macro niveau resulteert dit moleculair proces in een verandering van de concentratie van het gif waarbij

- de verandering evenredig is met het concentratie verschil en
- de evenredigheidsconstante grondsoort afhankelijk is.

(de ene grondsoort is wat ‘kleveriger’ dan de andere.)

Diffusie

We nemen eerst aan dat het grondwater 'stil staat' (niet stroomt: $-\nabla\phi = 0$ op D).

Het gif verspreidt zich dan doordat ieder molecuul beweegt volgens de standaard thermische dynamiek.

De snelheid waarmee het gif zich door diffusie verspreidt kan beschreven worden door het vectorveld

$$-\widetilde{K}\nabla\psi,$$

waarbij \widetilde{K} een evenredigheids constante is die afhangt van de grondsoort.

Advectie

Het gif wordt ook meegenomen door het grondwater dat stroomt met een snelheid $\vec{U} = -K\nabla\phi$.

Dit effect heet **advectie** of, in andere toepassingen, **convection**.

Als er geen diffusie is dan wordt de snelheid waarmee de concentratie van het gif verandert beschreven door

$$\psi\vec{U}$$

Advectie en diffusie

Door het gecombineerd effect van diffusie en advectie wordt de snelheid waarmee de concentratie gif verandert gegeven door

$$-\tilde{K}\nabla\psi + \psi\vec{U}.$$

Voor het gif geldt weer de wet van behoud van massa.

Door de westelijke rand van een klein eenheids gebiedje (kubisje) stroomt in Δt dag een hoeveelheid gif binnen (in grammen)

- door diffusie

$$-\tilde{a}(x - \frac{1}{2}\Delta x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} \psi(x - \frac{1}{2}\Delta x, y, z) \Delta t \Delta y \Delta z$$

- en door mee te stromen met het grondwater:

$$\psi(x - \frac{1}{2}\Delta x, y, z) u(x - \frac{1}{2}\Delta x, y, z) \Delta t \Delta y \Delta z$$

immers, zoals we gezien hebben is $u(x - \frac{1}{2}\Delta x, y, z) \Delta t \Delta y \Delta z$ de hoeveelheid water (in m^3) die in Δt dag door de westelijke rand stroomt.

Hierbij is \tilde{a} de x -component van \tilde{K} (voor het gemak aannemende dat \tilde{K} in het punt (x, y, z) een diagonaal matrix is) en u is de x -component van het vectorveld \vec{U} .

Door de westelijke rand van een klein eenheids gebiedje (kubisje) stroomt in Δt dag een hoeveelheid gif binnen (in grammen)

- door diffusie

$$-\tilde{a}(x - \frac{1}{2}\Delta x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} \psi(x - \frac{1}{2}\Delta x, y, z) \Delta t \Delta y \Delta z$$

- en door mee te stromen met het grondwater:

$$\psi(x - \frac{1}{2}\Delta x, y, z) u(x - \frac{1}{2}\Delta x, y, z) \Delta t \Delta y \Delta z$$

immers, zoals we gezien hebben is $u(x - \frac{1}{2}\Delta x, y, z) \Delta t \Delta y \Delta z$ de hoeveelheid water (in m^3) die in Δt dag door de westelijke rand stroomt.

Hierbij is \tilde{a} de x -component van \tilde{K} (voor het gemak aannemende dat \tilde{K} in het punt (x, y, z) een diagonaal matrix is) en u is de x -component van het vectorveld \vec{U} .

- Combineren met de bijdrage van de andere randen,
- delen door $\Delta t \Delta x \Delta y \Delta z$ en
- de limiet nemen voor $\Delta x, \Delta y \Delta z \rightarrow 0$ levert:

Advectie-diffusie vergelijking

Als er in de buurt van een punt (x, y, z) in het gebied D de concentratie gif alleen verandert door diffusie en advection dan geldt in dat punt

$$-\nabla \cdot (-\tilde{K} \nabla \psi + \psi \vec{U}) = 0$$

Advectie-diffusie vergelijking

Als er in de buurt van een punt (x, y, z) in het gebied D de concentratie gif alleen verandert door diffusie en advectie dan geldt in dat punt

$$-\nabla \cdot (-\tilde{K} \nabla \psi + \psi \vec{U}) = 0$$

Stelling. De vergelijking heeft een unieke oplossing als in ieder punt op de rand Γ van D een Dirichlet, Neumann of Robin randvoorwaarde geldt en in minstens een punt een Dirichlet randvoorwaarde.

Programma

- Inleiding
- De druk van het grondwater
- De stroming van het grondwater
- Wet van behoud van massa
- Randvoorwaarden
- Verspreiding van een verontreiniging:
 - diffusie
 - advectie
- Absorptie en bacteriële verontreiniging
- Modelleren is vereenvoudigen

Absorptie

Vaak wordt het gif in de loop der tijd afgebroken. De vermindering van de concentratie gif door afbraak is evenredig met die concentratie. De evenredigheidsconstante c is weer grondsoort (dus plaats) afhankelijk ($c > 0$).

Absorptie

Vaak wordt het gif in de loop der tijd afgebroken. De vermindering van de concentratie gif door afbraak is evenredig met die concentratie. De evenredigheidsconstante c is weer grondsoort (dus plaats) afhankelijk ($c > 0$).

Nu geldt niet meer dat de totale hoeveelheid gif die door de randen een gebiedje instroomt (door diffusie en door advectie) 0 is.

Absorptie

Vaak wordt het gif in de loop der tijd afgebroken. De vermindering van de concentratie gif door afbraak is evenredig met die concentratie. De evenredigheidsconstante c is weer grondsoort (dus plaats) afhankelijk ($c > 0$).

De totale hoeveelheid gif die door de randen een gebiedje van Δx bij Δy en Δz instroomt in Δt dag minus de hoeveelheid gif die in dat gebied verdwijnt door afbraak

$$-c(x, y, z)\psi(x, y, z)\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$$

is 0.

Dus (sommeren over alle randen en randtermen en de limiet nemen voor $\Delta x, \dots$ naar 0:

Absorptie

Vaak wordt het gif in de loop der tijd afgebroken. De vermindering van de concentratie gif door afbraak is evenredig met die concentratie. De evenredigheidsconstante c is weer grondsoort (dus plaats) afhankelijk ($c > 0$).

$$-\nabla \cdot (-\tilde{K} \nabla \psi + \psi \vec{U}) - c\psi = 0$$

Absorptie

Vaak wordt het gif in de loop der tijd afgebroken. De vermindering van de concentratie gif door afbraak is evenredig met die concentratie. De evenredigheidsconstante c is weer grondsoort (dus plaats) afhankelijk ($c > 0$).

$$-\nabla \cdot (-\tilde{K} \nabla \psi + \psi \vec{U}) - c\psi = 0$$

Opgave. We hebben $c > 0$ veronderstelt.
 $c < 0$ heeft ook een zinnige interpretatie. Welke?

Programma

- Inleiding
- De druk van het grondwater
- De stroming van het grondwater
- Wet van behoud van massa
- Randvoorwaarden
- Verspreiding van een verontreiniging:
 - diffusie
 - advectie
- Absorptie en bacteriële verontreiniging
- Modelleren is vereenvoudigen

Modelleren is vereenvoudigen

In de praktijk

1) zal de zwaartekracht verwerkt moeten worden

De waterdruk ϕ neemt in de diepte (z -richting) evenredig toe met z

Modelleren is vereenvoudigen

In de praktijk

- 1) zal de zwaartekracht verwerkt moeten worden
- 2) hangen de doorlaadbaarheidscoëfficiënten af van de druk:

$$a = a(x, y, z, \phi(x, y, z))$$

De afhankelijk wordt in het laboratorium experimenteel vastgesteld.

Het probleem wordt hiermee niet lineair.

Newton proces wordt gebruikt bij het oplossen. De (lineaire) Newton correctie vergelijkingen zijn precies de vergelijkingen die we opgesteld hebben.

Modelleren is vereenvoudigen

In de praktijk

- 1) zal de zwaartekracht verwerkt moeten worden
- 2) hangen de doorlaadbaarheidscoëfficiënten af van de druk:

$$a = a(x, y, z, \phi(x, y, z))$$

- 3) kan grond water vasthouden (absorberen).

Om dit correct te modeleren is een niet stationair model nodig.

Modelleren is vereenvoudigen

In de praktijk

- 1) zal de zwaartekracht verwerkt moeten worden
- 2) hangen de doorlaadbaarheidscoëfficiënten af van de druk:

$$a = a(x, y, z, \phi(x, y, z))$$

- 3) kan grond water vasthouden (absorberen).
- 4) is het probleem niet stationair door regenbuien, wisselende waterstanden in rivieren, etc..

...

Wet van behoud van massa

Verschil stroming vloeistof en stroming gas:

Gas is samendrukbaar:

de massa per volume eenheid hangt af van de druk

WISB356, Utrecht, 21 september 2012

Discretiseer Grondwatervergelijkingen

Gerard Sleijpen



Universiteit Utrecht
Department of Mathematics

<http://www.staff.science.uu.nl/~sleij101/>

Programma

- Het model
- Symmetrische eindige differenties
- Discreet Domein
- Gediscretiseerde differentiaal vergelijking
- Gediscretiseerde randvoorwaarden
- Twee dimensionaal model
 - Randdiscretisatie voor een verschoven rooster
 - Andere discretisaties

Programma

- Het model
- Symmetrische eindige differenties
- Discreet Domein
- Gediscretiseerde differentiaal vergelijking
- Gediscretiseerde randvoorwaarden
- Twee dimensionaal model
 - Randdiscretisatie voor een verschoven rooster
 - Andere discretisaties

Het model

We gebruiken het volgende model.

Op $D = [0, X] \times [0, Y]$ geldt

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial}{\partial x}\psi\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial}{\partial y}\psi\right) + \frac{\partial}{\partial x}(\psi u) + \frac{\partial}{\partial y}(\psi v) + c\psi = f$$

Hierbij zijn a , b (doorlaadbaarheidscoëfficiënten), u , v (stromingsveld in x - en y -richting) c (absorptie coëfficiënt) en f (bron term, regenbui) bekende functies en moeten we ψ bepalen.

Merk op dat we hier K (of \tilde{K}) diagonaal verondersteld hebben:
 $K = \text{diag}(a, b)$.

- Als $u = v = c = 0$ modelleert ψ de drukverdeling van het grondwater en volgt met $\vec{U} \equiv -K\nabla\psi$ het stromingsveld van het grondwater. f modelleert een regenbui.
- Als $(u, v)^T = \vec{U}$ modelleert ψ de concentratie van gif in het grondwater.

Het model

We gebruiken het volgende model.

Op $D = [0, X] \times [0, Y]$ geldt

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial}{\partial x}\psi\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial}{\partial y}\psi\right) + \frac{\partial}{\partial x}(\psi u) + \frac{\partial}{\partial y}(\psi v) + c\psi = f$$

Hierbij zijn a , b (doorlaadbaarheidscoëfficiënten), u , v (stromingsveld in x - en y -richting) c (absorptie coëfficiënt) en f (bron term, regenbui) bekende functies en moeten we ψ bepalen.

Met randvoorwaarden

$$(-K\nabla\psi, \vec{n}) = \nu(\psi - \psi_0)$$

waarbij op ieder punt (x, y) op de rand $\Gamma = \partial D$ van D , $\vec{n}(x, y)$ de naar **buiten** gerichte normaal vector is en $\nu(x, y)$ en $\psi_0(x, y)$ bekende waarden hebben.

Het model

Op de transparanten leiden we de formules af voor

- **het 1-d model**. Op $D = [0, X]$ geldt

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial}{\partial x}\psi\right) + \frac{\partial}{\partial x}(\psi u) + c\psi = f$$

Met op de westrand de randvoorwaarde

$$a(0)\frac{\partial}{\partial x}\psi(0) = \nu_{\text{west}}[\psi(0) - \psi_{\text{west}}]$$

en op de oostrand

$$-a(X)\frac{\partial}{\partial x}\psi(X) = \nu_{\text{oost}}[\psi(X) - \psi_{\text{oost}}]$$

Merk op dat hier gebruikt is dat $\vec{n} = -1$ de naar buiten gerichte normaal vector is op de westrand, terwijl $\vec{n} = 1$ op de oostrand.

Het model

Op de transparanten leiden we de formules af voor

- **het 1-d model.** Op $D = [0, X]$ geldt

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial}{\partial x}\psi\right) + \frac{\partial}{\partial x}(\psi u) + c\psi = f$$

Met op de westrand de randvoorwaarde

$$a(0)\frac{\partial}{\partial x}\psi(0) = \nu_{\text{west}}[\psi(0) - \psi_{\text{west}}]$$

en op de oostrand

$$-a(X)\frac{\partial}{\partial x}\psi(X) = \nu_{\text{oost}}[\psi(X) - \psi_{\text{oost}}]$$

Opgave. Stel telkens na iedere 1-d afleiding, de 2-d (en 3-d) variant op.

Programma

- Het model
- Symmetrische eindige differenties
- Discreet Domein
- Gediscretiseerde differentiaal vergelijking
- Gediscretiseerde randvoorwaarden
- Twee dimensionaal model
 - Randdiscretisatie voor een verschoven rooster
 - Andere discretisaties

Symmetrische eindige differenties

Beschouw een functie g op $D \equiv [0, X]$.

Voor $h > 0$ en $x \in [h, X - h]$ benaderen we $\frac{\partial g}{\partial x}(x)$ door

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x) \approx \frac{1}{2h} [g(x + h) - g(x - h)]$$

een **symmetrische eindige differentie**.

Opgave.

Laat zien dat de fout in deze benadering gelijk is aan

$$-\frac{1}{6}h^2g^{(3)}(\xi) \quad \text{voor 'n } \xi \in [x - h, x + h]$$

Symmetrische eindige differenties

Beschouw een functie g op $D \equiv [0, X]$.

Voor $h > 0$ en $x \in [h, X - h]$ benaderen we $\frac{\partial g}{\partial x}(x)$ door

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x) \approx \frac{1}{2h} [g(x + h) - g(x - h)]$$

Toepassingen. ○ Met $g = a \frac{\partial \psi}{\partial x}$ vinden we

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) (x) \approx \frac{1}{2h} \left[a(x + h) \frac{\partial \psi}{\partial x}(x + h) - a(x - h) \frac{\partial \psi}{\partial x}(x - h) \right]$$

○ Met $g = \psi u$ vinden we

$$\frac{\partial}{\partial x} (\psi u) (x) \approx \frac{1}{2h} [\psi(x + h) u(x + h) - \psi(x - h) u(x - h)]$$

Symmetrische eindige differenties

Beschouw een functie g op $D \equiv [0, X]$.

Voor $h > 0$ en $x \in [h, X - h]$ benaderen we $\frac{\partial g}{\partial x}(x)$ door

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x) \approx \frac{1}{2h} [g(x + h) - g(x - h)]$$

Toepassingen. ○ Met $g = a \frac{\partial \psi}{\partial x}$ vinden we

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) (x) \approx \frac{1}{2h} \left[a(x + h) \frac{\partial \psi}{\partial x}(x + h) - a(x - h) \frac{\partial \psi}{\partial x}(x - h) \right]$$

○ Met $g = \psi$ en $x = x + h$ en $x = x - h$ in bovenstaande

benadering $\frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) (x) \approx$

$$\frac{1}{2h} \left[\frac{a(x + h)}{2h} (\psi(x + 2h) - \psi(x)) - \frac{a(x - h)}{2h} (\psi(x) - \psi(x - 2h)) \right]$$

Symmetrische eindige differenties

Beschouw een functie g op $D \equiv [0, X]$.

Voor $h > 0$ en $x \in [h, X - h]$ benaderen we $\frac{\partial g}{\partial x}(x)$ door

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x) \approx \frac{1}{2h} [g(x + h) - g(x - h)]$$

Toepassingen. ○ Met $g = a \frac{\partial \psi}{\partial x}$ vinden we

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) (x) \approx \frac{1}{2h} \left[a(x + h) \frac{\partial \psi}{\partial x}(x + h) - a(x - h) \frac{\partial \psi}{\partial x}(x - h) \right]$$

○ $\frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) (x) \approx$

$$\frac{a(x - h)\psi(x - 2h) - (a(x - h) + a(x + h))\psi(x) + a(x + h)\psi(x + 2h)}{(2h)^2}$$

Symmetrische eindige differenties

Beschouw een functie g op $D \equiv [0, X]$.

Voor $h > 0$ en $x \in [h, X - h]$ benaderen we $\frac{\partial g}{\partial x}(x)$ door

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x) \approx \frac{1}{2h} [g(x + h) - g(x - h)]$$

Toepassingen. ○ Met $g = a \frac{\partial \psi}{\partial x}$ vinden we

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) (x) \approx \frac{1}{2h} \left[a(x + h) \frac{\partial \psi}{\partial x}(x + h) - a(x - h) \frac{\partial \psi}{\partial x}(x - h) \right]$$

○ Vervang h door $\frac{1}{2}h$: $\frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) (x) \approx$

$$\frac{a(x - \frac{1}{2}h)\psi(x - h) - (a(x - \frac{1}{2}h) + a(x + \frac{1}{2}h))\psi(x) + a(x + \frac{1}{2}h)\psi(x + h)}{h^2}$$

Programma

- Het model
- Symmetrische eindige differenties
- Discreet Domein
- Gediscretiseerde differentiaal vergelijking
- Gediscretiseerde randvoorwaarden
- Twee dimensionaal model
 - Randdiscretisatie voor een verschoven rooster
 - Andere discretisaties

Symmetrische eindige differenties

Beschouw een functie g op $D \equiv [0, X]$.

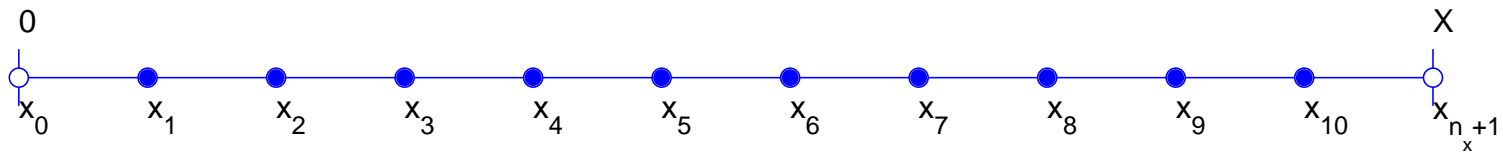
Voor $h > 0$ en $x \in [h, X - h]$ benaderen we $\frac{\partial g}{\partial x}(x)$ door

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x) \approx \frac{1}{2h} [g(x + h) - g(x - h)]$$

Toepassingen. Kies $n_x \in \mathbb{N}$ en $h_x \equiv X/(n_x + 1)$.

Schrijf $x_i \equiv i h_x$ en $g_i \equiv g(x_i) = g(i h_x)$

voor $i \in \{\frac{1}{2}k \mid k \in \mathbb{Z}, 0 \leq \frac{1}{2}k h_x \leq X\}$



$D = [0, X], n_x = 10$

Symmetrische eindige differenties

Beschouw een functie g op $D \equiv [0, X]$.

Voor $h > 0$ en $x \in [h, X - h]$ benaderen we $\frac{\partial g}{\partial x}(x)$ door

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x) \approx \frac{1}{2h} [g(x + h) - g(x - h)]$$

Toepassingen. Kies $n_x \in \mathbb{N}$ en $h_x \equiv X/(n_x + 1)$.

Schrijf $x_i \equiv i h_x$ en $g_i \equiv g(x_i) = g(i h_x)$

voor $i \in \{\frac{1}{2}k \mid k \in \mathbb{Z}, 0 \leq \frac{1}{2}k h_x \leq X\}$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) (x_i) \approx \frac{1}{h_x^2} \left[-a_{i-\frac{1}{2}} \psi_{i-1} + \left(a_{i-\frac{1}{2}} + a_{i+\frac{1}{2}} \right) \psi_i - a_{i+\frac{1}{2}} \psi_{i+1} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\psi u) (x_i) \approx \frac{1}{2h_x} [u_{i+1} \psi_{i+1} - u_{i-1} \psi_{i-1}], \quad (c \psi)(x_i) = c_i \psi_i$$

Programma

- Het model
- Symmetrische eindige differenties
- Discreet Domein
- Gediscretiseerde differentiaal vergelijking
- Gediscretiseerde randvoorwaarden
- Twee dimensionaal model
 - Randdiscretisatie voor een verschoven rooster
 - Andere discretisaties

Symmetrische eindige differenties

Beschouw een functie g op $D \equiv [0, X]$.

Voor $h > 0$ en $x \in [h, X - h]$ benaderen we $\frac{\partial g}{\partial x}(x)$ door

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x) \approx \frac{1}{2h} [g(x + h) - g(x - h)]$$

Toepassingen. Kies $n_x \in \mathbb{N}$ en $h_x \equiv X/(n_x + 1)$.

Schrijf $x_i \equiv i h_x$ en $g_i \equiv g(x_i) = g(i h_x)$

voor $i \in \{\frac{1}{2}k \mid k \in \mathbb{Z}, 0 \leq \frac{1}{2}k h_x \leq X\}$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) (x_i) + \frac{\partial}{\partial x} (\psi u) (x_i) + (c \psi)(x_i) \\ \approx \alpha_i^{\text{west}} \psi_{i-1} + \alpha_i^{\text{centraal}} \psi_i + \alpha_i^{\text{oost}} \psi_{i+1} \end{aligned}$$

met

$$\alpha_i^{\text{west}} \equiv \frac{-a_{i-\frac{1}{2}}}{h_x^2} - \frac{u_{i-1}}{2h_x}, \quad \alpha_i^{\text{centraal}} \equiv \frac{a_{i-\frac{1}{2}} + a_{i+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + c_i, \quad \alpha_i^{\text{oost}} \equiv \frac{-a_{i+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \frac{u_{i+1}}{2h_x}$$

Symmetrische eindige differenties

Beschouw een functie g op $D \equiv [0, X]$.

Voor $h > 0$ en $x \in [h, X - h]$ benaderen we $\frac{\partial g}{\partial x}(x)$ door

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x) \approx \frac{1}{2h} [g(x + h) - g(x - h)]$$

Toepassingen. Kies $n_x \in \mathbb{N}$ en $h_x \equiv X/(n_x + 1)$.

Schrijf $x_i \equiv i h_x$ en $g_i \equiv g(x_i) = g(i h_x)$

voor $i \in \{\frac{1}{2}k \mid k \in \mathbb{Z}, 0 \leq \frac{1}{2}k h_x \leq X\}$

Benader $-\frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) (x_i) + \frac{\partial}{\partial x} (\psi u) (x_i) + (c \psi)(x_i) = f(x_i)$

door $\alpha_i^{\text{west}} \psi_{i-1} + \alpha_i^{\text{cent}} \psi_i + \alpha_i^{\text{oost}} \psi_{i+1} = f_i$, waarbij

$$\alpha_i^{\text{west}} \equiv \frac{-a_{i-\frac{1}{2}}}{h_x^2} - \frac{u_{i-1}}{2h_x}, \quad \alpha_i^{\text{cent}} \equiv \frac{a_{i-\frac{1}{2}} + a_{i+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + c_i, \quad \alpha_i^{\text{oost}} \equiv \frac{-a_{i+\frac{1}{2}}}{h_x^2} + \frac{u_{i+1}}{2h_x}$$

Symmetrische eindige differenties

Beschouw een functie g op $D \equiv [0, X]$.

Voor $h > 0$ en $x \in [h, X - h]$ benaderen we $\frac{\partial g}{\partial x}(x)$ door

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x) \approx \frac{1}{2h} [g(x + h) - g(x - h)]$$

Opmerkingen. $\alpha_i^{\text{west}} \psi_{i-1} + \alpha_i^{\text{cent}} \psi_i + \alpha_i^{\text{oost}} \psi_{i+1} = f_i$.

- Deze vergelijking volgt uit de **differentiaal vergelijking** en is gedefinieerd voor $i = 1, 2, \dots, n_x$. (Waarom?)
Voor $i = 0$ is ψ_{i-1} een functiewaarde buiten het gebied!
We hebben dus n_x vergelijkingen met $n_x + 2$ onbekenden.
De 2 'extra' vergelijkingen komen van de **randvoorwaarden**.
- De oplossing ψ_i benadert ψ in het punt $x_i = i h_x$.
- a is op het hele gebied $[0, X]$ bekend.
In het bijzonder is $a_{i+\frac{1}{2}} = a((i + \frac{1}{2})h_x)$ bekend.

Programma

- Het model
- Symmetrische eindige differenties
- Discreet Domein
- Gediscretiseerde differentiaal vergelijking
- Gediscretiseerde randvoorwaarden
- Twee dimensionaal model
 - Randdiscretisatie voor een verschoven rooster
 - Andere discretisaties

Symmetrische eindige differenties

Beschouw een functie g op $D \equiv [0, X]$.

Voor $h > 0$ en $x \in [h, X - h]$ benaderen we $\frac{\partial g}{\partial x}(x)$ door

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x) \approx \frac{1}{2h} [g(x + h) - g(x - h)]$$

Opmerkingen. $\alpha_i^{\text{west}} \psi_{i-1} + \alpha_i^{\text{cent}} \psi_i + \alpha_i^{\text{oost}} \psi_{i+1} = f_i$.

Randvoorwaarde. $a(0) \frac{\partial \psi}{\partial x}(0) = \nu_{\text{west}} (\psi(0) - \psi_{\text{west}})$.

Discretiseer: $\nu_{\text{west}} (\psi_0 - \psi_{\text{west}}) = a(0) \frac{\partial \psi}{\partial x}(0) \approx$

$$a(0) \frac{\psi(h_x) - \psi(0)}{h_x} = \frac{a_0}{h_x} (\psi_1 - \psi_0)$$

Met $\alpha_0^{\text{oost}} \equiv -\frac{a_0}{h_x}$ en $\alpha_0^{\text{cent}} \equiv \nu_{\text{west}} + \frac{a_0}{h_x}$ is

$$\alpha_0^{\text{cent}} \psi_0 + \alpha_0^{\text{oost}} \psi_1 \approx f_0 \equiv \nu_{\text{west}} \psi_{\text{west}}$$

Symmetrische eindige differenties

Beschouw een functie g op $D \equiv [0, X]$.

Voor $h > 0$ en $x \in [h, X - h]$ benaderen we $\frac{\partial g}{\partial x}(x)$ door

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x) \approx \frac{1}{2h} [g(x + h) - g(x - h)]$$

Opmerkingen. $\alpha_i^{\text{west}} \psi_{i-1} + \alpha_i^{\text{cent}} \psi_i + \alpha_i^{\text{oost}} \psi_{i+1} = f_i.$

Gebruik $\alpha_0^{\text{cent}} \psi_0 + \alpha_0^{\text{oost}} \psi_1 \approx f_0$ (r_{west})

om ψ_0 te **eliminieren** uit

$$\alpha_1^{\text{west}} \psi_0 + \alpha_1^{\text{cent}} \psi_1 + \alpha_1^{\text{oost}} \psi_2 = f_1. \quad (\text{dif})$$

Symmetrische eindige differenties

Beschouw een functie g op $D \equiv [0, X]$.

Voor $h > 0$ en $x \in [h, X - h]$ benaderen we $\frac{\partial g}{\partial x}(x)$ door

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x) \approx \frac{1}{2h} [g(x + h) - g(x - h)]$$

Opmerkingen. $\alpha_i^{\text{west}} \psi_{i-1} + \alpha_i^{\text{cent}} \psi_i + \alpha_i^{\text{oost}} \psi_{i+1} = f_i.$

Gebruik $\alpha_0^{\text{cent}} \psi_0 + \alpha_0^{\text{oost}} \psi_1 \approx f_0$ (r_{west})

om ψ_0 te **eliminieren** uit

$$\alpha_1^{\text{west}} \psi_0 + \alpha_1^{\text{cent}} \psi_1 + \alpha_1^{\text{oost}} \psi_2 = f_1. \quad (\text{dif})$$

$$(r_{\text{west}}) \quad \Rightarrow \quad \psi_0 \approx \frac{-\alpha_0^{\text{oost}}}{\alpha_0^{\text{cent}}} \psi_1 + \frac{f_0}{\alpha_0^{\text{cent}}}.$$

Symmetrische eindige differenties

Beschouw een functie g op $D \equiv [0, X]$.

Voor $h > 0$ en $x \in [h, X - h]$ benaderen we $\frac{\partial g}{\partial x}(x)$ door

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x) \approx \frac{1}{2h} [g(x + h) - g(x - h)]$$

Opmerkingen. $\alpha_i^{\text{west}} \psi_{i-1} + \alpha_i^{\text{cent}} \psi_i + \alpha_i^{\text{oost}} \psi_{i+1} = f_i.$

Gebruik $\alpha_0^{\text{cent}} \psi_0 + \alpha_0^{\text{oost}} \psi_1 \approx f_0$ (r_{west})

om ψ_0 te **eliminieren** uit

$$\alpha_1^{\text{west}} \psi_0 + \alpha_1^{\text{cent}} \psi_1 + \alpha_1^{\text{oost}} \psi_2 = f_1. \quad (\text{dif})$$

$$(\text{Dif}) \Rightarrow \left(\alpha_1^{\text{cent}} - \alpha_1^{\text{west}} \frac{\alpha_0^{\text{oost}}}{\alpha_0^{\text{cent}}} \right) \psi_1 + \alpha_1^{\text{oost}} \psi_2 = f_1 - \alpha_1^{\text{west}} \frac{f_0}{\alpha_0^{\text{cent}}}.$$

Symmetrische eindige differenties

Beschouw een functie g op $D \equiv [0, X]$.

Voor $h > 0$ en $x \in [h, X - h]$ benaderen we $\frac{\partial g}{\partial x}(x)$ door

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x) \approx \frac{1}{2h} [g(x + h) - g(x - h)]$$

Opdracht. Pas bovenstaande eliminatie van $\psi_0 = \psi(0)$ aan voor de randvoorwaarde

$$\mu a(0) \frac{\partial \psi}{\partial x}(0) + (1 - \mu)\psi(0) = \psi_{\text{west}}$$

met $\mu = \mu_{\text{west}}$ en ψ_{west} bekende constanten.

Delen door μ leidt, met $\nu_{\text{west}} = (1 - \mu)/\mu$ (en aangepaste ψ_{west}) tot de vorige randvoorwaarde. De nieuwe randvoorwaarde heeft het voordeel dat we $\mu = 0$ kunnen kiezen om Dirichlet randvoorwaarden te definiëren.

Symmetrische eindige differenties

Beschouw een functie g op $D \equiv [0, X]$.

Voor $h > 0$ en $x \in [h, X - h]$ benaderen we $\frac{\partial g}{\partial x}(x)$ door

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x) \approx \frac{1}{2h} [g(x + h) - g(x - h)]$$

Resumerend:

1) $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n_x}, \psi_{n_x+1}$ onbekenden, voldoen aan
discrete diff.vergl. voor $i = 1, \dots, n_x$ en
discrete randvoorwaarden voor $i = 0, n_x + 1$

2) Gebruik de discrete randvoorwaarden om de waarden ψ_0 en ψ_{n_x+1} te elimineren uit de discrete differentiaal verg.

$\Rightarrow \psi_1, \dots, \psi_{n_x}$ onbekenden, voldoen aan
 $i = 1, \dots, n_x$ vergelijkingen.

Programma

- Het model
- Symmetrische eindige differenties
- Discreet Domein
- Gediscretiseerde differentiaal vergelijking
- Gediscretiseerde randvoorwaarden
- Twee dimensionaal model
 - Randdiscretisatie voor een verschoven rooster
 - Andere discretisaties

Symmetrische eindige differenties

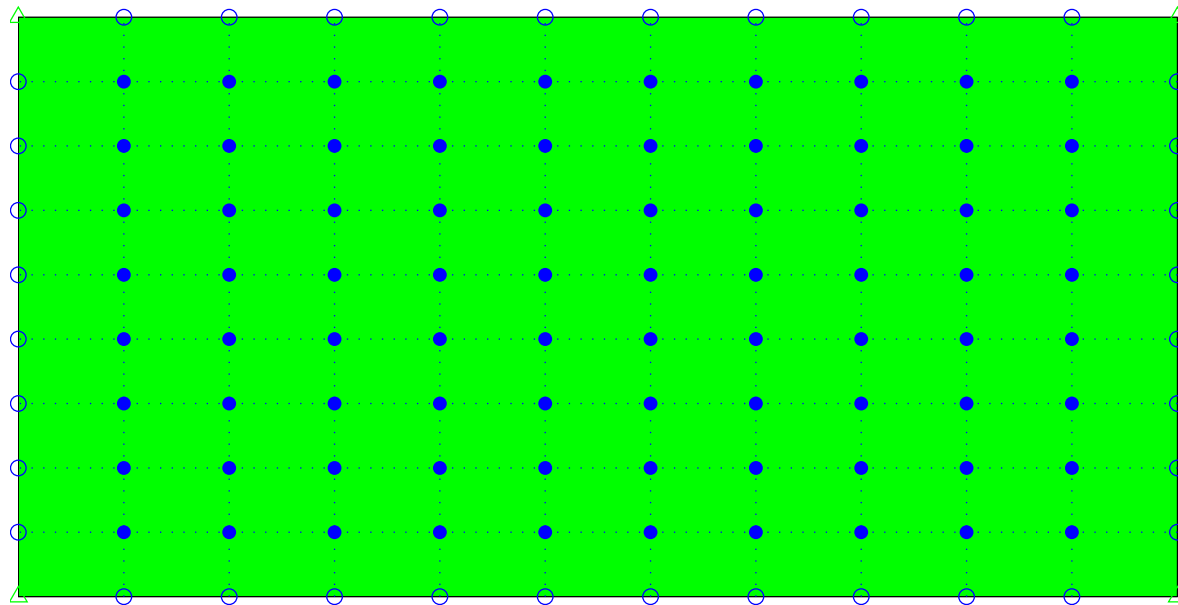
Notatie. In 2-d model met $D \equiv [0, X] \times [0, Y]$:

Kies $n_x, n_y \in \mathbb{N}$ en $h_x \equiv X/(n_x + 1)$, $h_y \equiv Y/(n_y + 1)$

Schrijf $x_{ij} \equiv x_i \equiv i h_x$ en $y_{ij} \equiv y_j \equiv j h_y$

Als $g : [0, X] \times [0, Y] \rightarrow \mathbb{R}$, dan

$$g_{ij} \equiv g(x_{ij}, y_{ij}) = g(x_i, y_j) = g(i h_x, j h_y)$$



Symmetrische eindige differenties

Notatie. In 2-d model met $D \equiv [0, X] \times [0, Y]$:

Kies $n_x, n_y \in \mathbb{N}$ en $h_x \equiv X/(n_x + 1)$, $h_y \equiv Y/(n_y + 1)$

Schrijf $x_{ij} \equiv x_i \equiv i h_x$ en $y_{ij} \equiv y_j \equiv j h_y$

Als $g : [0, X] \times [0, Y] \rightarrow \mathbb{R}$, dan

$$g_{ij} \equiv g(x_{ij}, y_{ij}) = g(x_i, y_j) = g(i h_x, j h_y)$$

$p_{ij} \equiv (x_{ij}, y_{ij})$ is een **roosterpunt** ($i, j \in \mathbb{Z}$).

p_{ij} is een **inwendig** roosterpunt als $p_{ij} \in D^\circ$:

$D^\circ \equiv (0, X) \times (0, Y)$ is het inwendige van het gebied D .

p_{ij} is een **rand**roosterpunt als $p_{ij} \in \partial D$:

$\partial D \equiv D \setminus D^\circ$ is de rand van het gebied D .

Symmetrische eindige differenties

Notatie. In 2-d model met $D \equiv [0, X] \times [0, Y]$:

Kies $n_x, n_y \in \mathbb{N}$ en $h_x \equiv X/(n_x + 1)$, $h_y \equiv Y/(n_y + 1)$

Schrijf $x_{ij} \equiv x_i \equiv i h_x$ en $y_{ij} \equiv y_j \equiv j h_y$

Als $g : [0, X] \times [0, Y] \rightarrow \mathbb{R}$, dan

$$g_{ij} \equiv g(x_{ij}, y_{ij}) = g(x_i, y_j) = g(i h_x, j h_y)$$

$p_{ij} \equiv (x_{ij}, y_{ij})$ is een **roosterpunt** ($i, j \in \mathbb{Z}$).

p_{ij} is een **inwendig** roosterpunt als $p_{ij} \in D^\circ$:

$D^\circ \equiv (0, X) \times (0, Y)$ is het inwendige van het gebied D .

p_{ij} is een **rand**roosterpunt als $p_{ij} \in \partial D$:

$\partial D \equiv D \setminus D^\circ$ is de rand van het gebied D .

Matlab tool. Met het matlab commando

```
[x,y]=ndgrid([1:nx]*hx,[1:ny]*hy);
```

is $x(i,j)=i*hx$ en $y(i,j)=j*hy$.

Symmetrische eindige differenties

Notatie. In 2-d model met $D \equiv [0, X] \times [0, Y]$:

Kies $n_x, n_y \in \mathbb{N}$ en $h_x \equiv X/(n_x + 1)$, $h_y \equiv Y/(n_y + 1)$

Schrijf $x_{ij} \equiv x_i \equiv i h_x$ en $y_{ij} \equiv y_j \equiv j h_y$

Als $g : [0, X] \times [0, Y] \rightarrow \mathbb{R}$, dan

$$g_{ij} \equiv g(x_{ij}, y_{ij}) = g(x_i, y_j) = g(i h_x, j h_y)$$

Voor ieder inwendig roosterpunt p_{ij} is er een vergelijking

$$\alpha_{ij}^{\text{west}} \psi_{i-1,j} + \alpha_{ij}^{\text{cent}} \psi_{ij} + \alpha_{ij}^{\text{oost}} \psi_{i+1,j} + \alpha_{ij}^{\text{zuid}} \psi_{i,j-1} + \alpha_{ij}^{\text{noord}} \psi_{i,j+1} = f_{ij}$$

waar geen functiewaarde buiten D° bij betrokken is
(dus, bv, $\alpha_{1,j}^{\text{west}} = 0$ en $\alpha_{i,1}^{\text{zuid}} = 0$) en die een discretisatie is
van het 2-d model.

Opdracht. Druk de **stencil coëfficiënten** α_{ij}^{xxx} in termen
van de bekende grootheden a , b , c , ν_{xxx} en ψ_{xxx} .

Stencils

De vergelijking

$$\alpha_{ij}^{\text{west}} \psi_{i-1,j} + \alpha_{ij}^{\text{cent}} \psi_{ij} + \alpha_{ij}^{\text{oost}} \psi_{i+1,j} + \alpha_{ij}^{\text{zuid}} \psi_{i,j-1} + \alpha_{ij}^{\text{noord}} \psi_{i,j+1} = f_{ij}$$

wordt vaak gerepresenteerd middels een **stencil**:

$$\begin{bmatrix} & \alpha_{ij}^{\text{noord}} & \\ \alpha_{ij}^{\text{west}} & \alpha_{ij}^{\text{cent}} & \alpha_{ij}^{\text{oost}} \\ & \alpha_{ij}^{\text{zuid}} & \end{bmatrix}$$

Een stencil (voor het punt p_{ij}) is een compacte manier om aan te geven hoe in het rooster punt p_{ij} de onbekende functiewaarden $\psi_{i',j'}$ in de buurpunten van p_{ij} (de punten met $|i - i'| \leq 1$ en $|j - j'| \leq 1$) gekoppeld zijn.

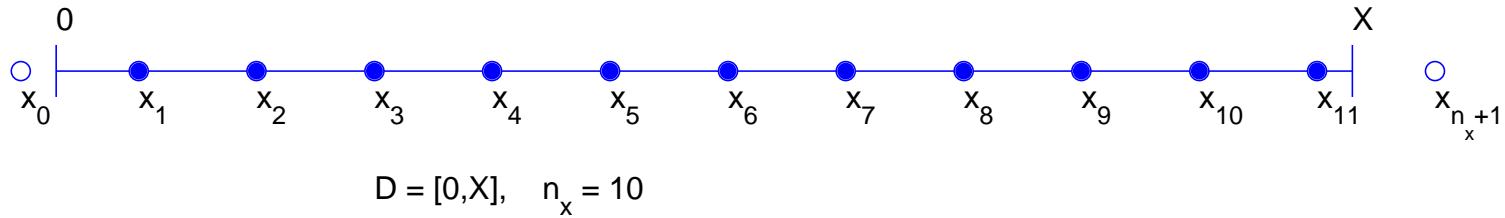
Waarschuwing. Een stencil is een matrix, maar de actie is niet als die van de gebruikelijke matrix.

Programma

- Het model
- Symmetrische eindige differenties
- Discreet Domein
- Gediscretiseerde differentiaal vergelijking
- Gediscretiseerde randvoorwaarden
- Twee dimensionaal model
- Randdiscretisatie voor een verschoven rooster
- Andere discretisaties

Vershoven rooster en randvoorwaarden

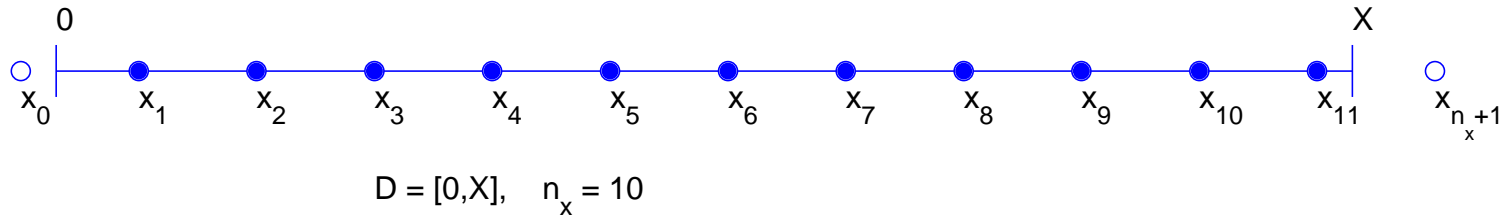
1-d model:
$$a(0) \frac{\partial \psi}{\partial x}(0) = \nu_{\text{west}} (\psi(0) - \psi_{\text{west}})$$



Nu is 0 geen roosterpunt!

Verschoven rooster en randvoorwaarden

1-d model:
$$a(0) \frac{\partial \psi}{\partial x}(0) = \nu_{\text{west}} (\psi(0) - \psi_{\text{west}})$$



Zie $\psi(0)$ als een waarde verkregen met interpolatie:

Als $s \in (0, 1)$ zo dat $0 = x_0 + s h_x$, dan

$$\psi(0) \approx (1 - s) \psi_0 + s \psi_1$$

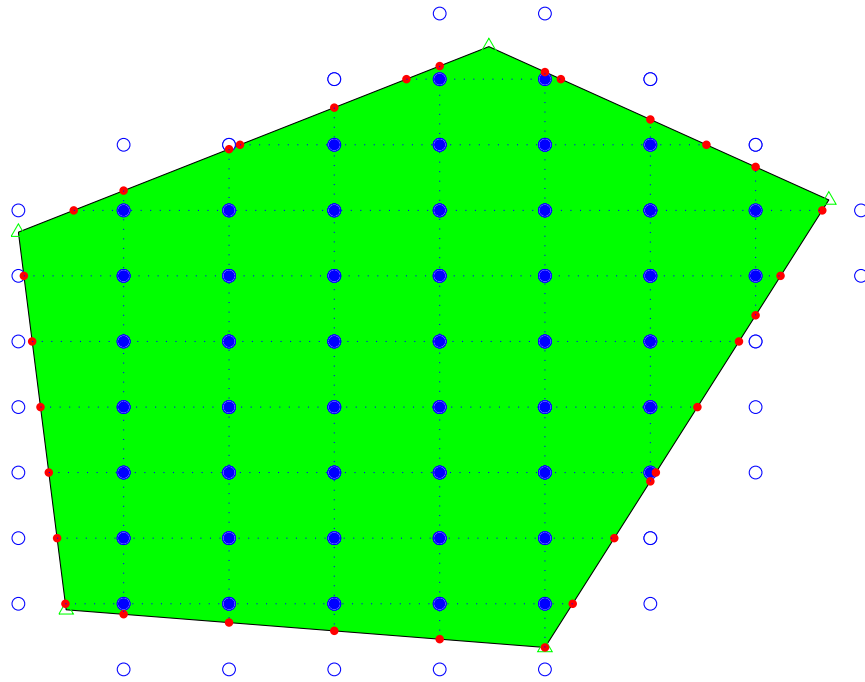
Benader $\frac{\partial \psi}{\partial x}(0)$ als voorheen of $\frac{\partial \psi}{\partial x}(0) \approx p'(0)$ met p het 2-de graads polynoom met $p(x_i) = \psi_i$ voor $i = 0, 1, 2$.

Nu geldt weer
$$\alpha_0^{\text{cent}} \psi_0 + \alpha_0^{\text{oost}} \psi_1 + \tilde{\alpha}_0^{\text{oost}} \psi_2 = f_0$$

Verschoven rooster en randvoorwaarden

2-d model:

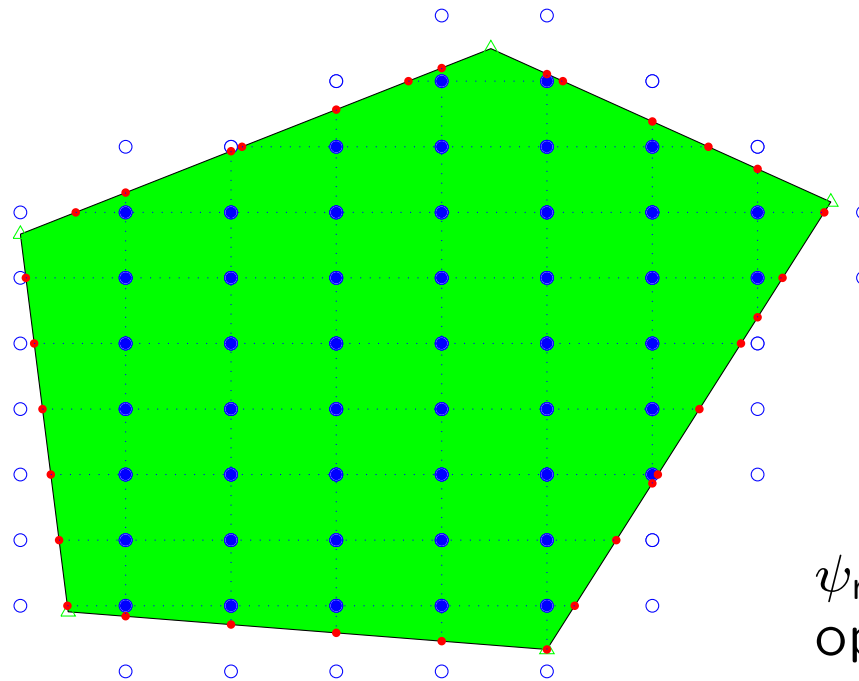
$$(K \nabla \psi, -\vec{n}) = \nu (\psi - \psi_0)$$



Verschoven rooster en randvoorwaarden

2-d model:

$$(K \nabla \psi, -\vec{n}) = \nu (\psi - \psi_0)$$



ψ_{rood} is ψ
op de rand

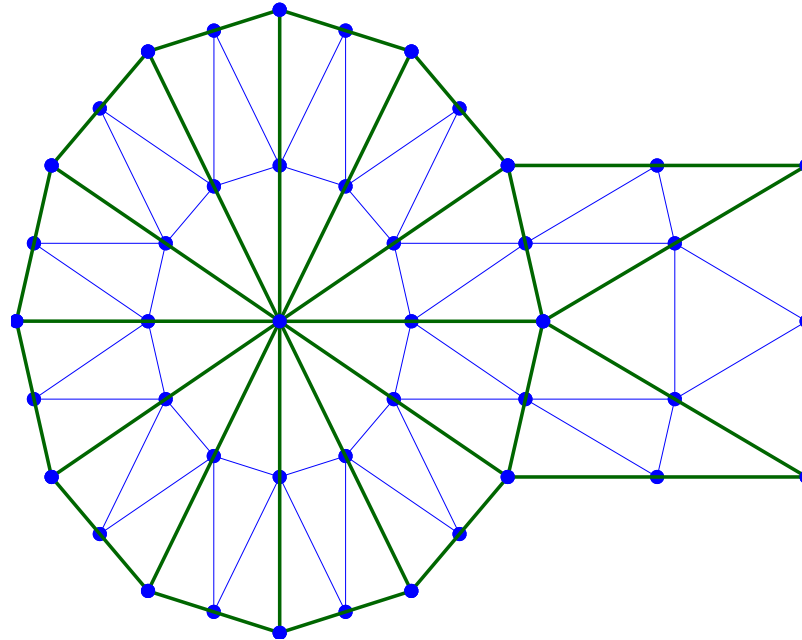
Voor iedere 'wit' roosterpunt:

zie ψ_{rood} als een waarde uit interpolatie van ψ_{blauw} en ψ_{wit} .
 $-\vec{n}$ is de richting van loodlijn in een wit punt naar de rand.
Neem de waarde van K in het 'getroffen' randpunt.

Programma

- Het model
- Symmetrische eindige differenties
- Discreet Domein
- Gediscretiseerde differentiaal vergelijking
- Gediscretiseerde randvoorwaarden
- Twee dimensionaal model
 - Randdiscretisatie voor een verschoven rooster
 - Andere discretisaties

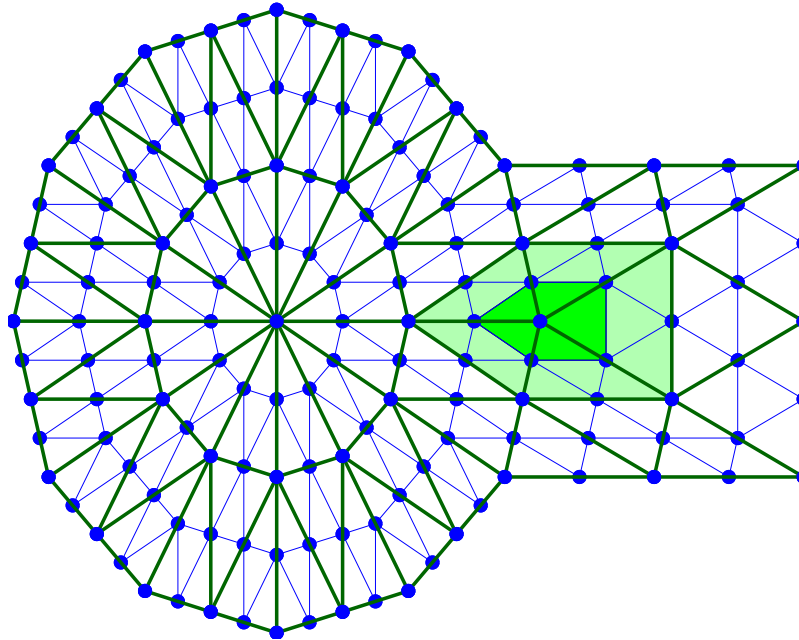
Eindige elementen



Schrijf ψ als een lineaire combinatie van elementaire functies.

Kies voor iedere roosterpunt p als elementaire functie ϕ_p , bijvoorbeeld, de functie die in p de waarde 1 heeft, in alle andere roosterpunten 0 is, die op ieder driehoekje lineair is (de grafiek boven ieder driehoek is een vlak), en aan de homogene randvoorwaarde voldoet.

Eindige elementen



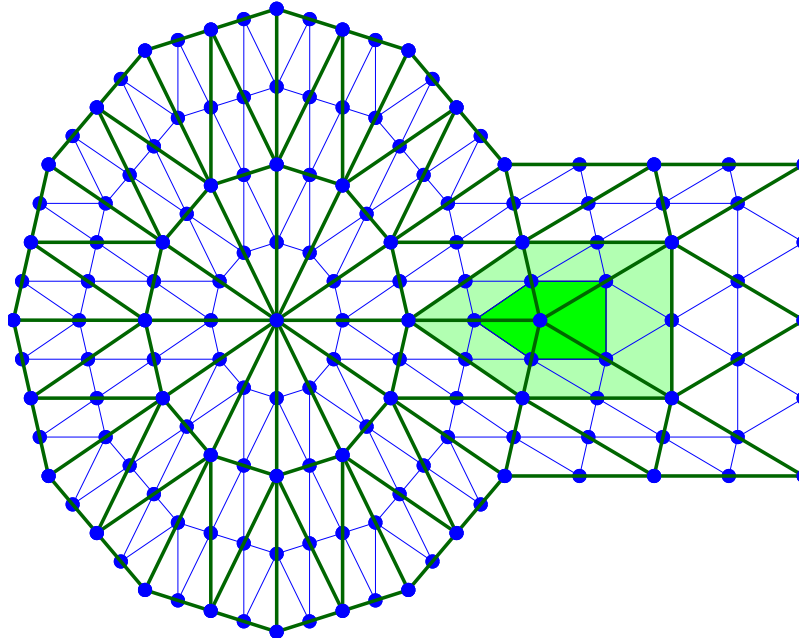
Bereken $(\psi \approx) \sum_p \psi(p) \phi_p,$

waarbij we sommeren over alle roosterpunten (rp) p in D .

Een vergl. voor de onbekende scalairen $\psi(p)$ ontstaat uit

$\sum_p \psi(p) (\mathcal{L}(\phi_p), \phi_q) = (\mathcal{L}(\psi), \phi_q) = (f, \phi_q)$ voor alle rp $q \in D$.

Eindige elementen



Bereken $(\psi \approx) \sum_p \psi(p) \phi_p,$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

met $\mathbf{A}_{q,p} = (\mathcal{L}(\psi), \phi_q),$ $\mathbf{x}_p = \psi(p),$ en $\mathbf{b}_q = (f, \phi_q).$

Eindige volumes

Discretiseer het domein,

(met een rechthoekig rooster of
met een rooster van driehoekjes (of tetra-ethers),
en discretiseer het model op dezelfde manier als waarmee
we het model gemaakt hebben.

In essentie, discretiseer (over de rand Γ)

$$\int_{\Gamma} (\vec{U}(x, y, z), \vec{n}(x, y, z)) \, d_O(x, y, z) = 0$$

aannemende dat er in \mathcal{K} alleen water uitgaat of inkomt via
de rand $\Gamma \equiv \partial\mathcal{K}$.