



Een blik op oneindig

K. G. Wilson, 'Renormalization Group and Critical Phenomena. I. Renormalization Group and the Kadanoff Scaling Picture', *Physical Review B* 4 (1971), 3174-3183

Wie zijn dierbaren op zondagochtend zo nu en dan verwent met een zachtgekookt eitje, heeft zich vast wel eens verbaasd over de heftigheid waarmee vloeibaar water in stoom verandert. Het water wordt opgezet bij kamertemperatuur, waarna de dichtheid continu daalt met het toevoeren van energie. Dit komt doordat de sneller bewegende watermoleculen lastiger aan elkaar blijven plakken. Vervolgens nadert het kookpunt en wie schetst onze verbazing? Het vloeibare water ondergaat een complete gedaanteverwisseling! In ons culinaire experiment wordt plotseling een sprong waargenomen naar een dichtheid die ongeveer duizend keer lager is. Dit wordt dan ook een discontinue faseovergang genoemd. Een nog groter waterspektakel ontvouwt zich als we de druk opvoeren tot 218 bar en de temperatuur tot 374 °C, wat helaas wel funest is voor het eitje. Op dit zogenoemde kritische punt verdwijnt het onderscheid tussen de vloeibare fase en de gasfase, waardoor waterdruppels en stoombubbels volledig mengen tot een heftig fluctuerende massa. In de natuur zijn nog veel meer voorbeelden van kritische punten te vinden. Denk bijvoorbeeld aan metalen, die kritische overgangen naar de gemagnetiseerde

of de supergeleidende toestand kunnen ondergaan. In de laatste toestand stromen de elektronen zonder enige weerstand door het metaal.

Kritiek probleem

Het is een uitdaging om kritische systemen theoretisch te beschrijven. Dit is als volgt te begrijpen. Normaliter proberen we de beschrijving van een veeldeeltjessysteem te reduceren tot een beperkt aantal macroscopische grootheden, zoals de druk en de deeltjesdichtheid. Vaak worden de fluctuaties in deze grootheden genegeerd, wat de gemiddelde-veldbenadering wordt genoemd. De verkregen theorie resulteert vervolgens in een toestandsvergelijking, waarvan een uitstekend voorbeeld staat in het proefschrift van Johannes Diderik van der Waals (Nobelprijs 1910). Destijds destilleerde hij uit zijn beroemde vergelijking zelfs het eerste inzicht in de aard van overgangen tussen de gas- en de vloeistoffase. De gemiddelde-veldmethode is toepasbaar als de fluctuaties uitmiddelen op een korte lengteschaal, die de correlatielengte wordt genoemd. Deze lengte geeft aan over welke afstand verschillende delen van het systeem elkaar nog net beïnvloeden. In een kritisch systeem zijn de fluctuaties zo heftig, dat de correlatielengte naar oneindig gaat. Een gecontroleerde theorie lijkt nu schier onmogelijk geworden, maar niets is minder waar. Het zal blijken dat de renormalisatiegroeptheorie van de kritieke nood juist een deugd weet te maken.

Prioriteiten

Deze synthese tussen elegante wiskunde en uitdagende fysica werd tot stand gebracht door de Amerikaanse natuurkundige Kenneth Wilson, waarvoor hij in 1982 de Nobelprijs ontving. Wilson, geboren in 1936,

begon op zestienjarige leeftijd met een studie wiskunde aan Harvard University. Vervolgens promoveerde hij op de hoge-energiefysica aan Cal Tech bij Murray Gell-Mann (Nobelprijs 1969), die Wilson voor het eerst in aanraking bracht met renormalisatietechnieken. Na een korte stage op CERN koos Wilson voor een vaste baan aan Cornell University. Deze universiteit had namelijk een uitstekende reputatie op het gebied van zijn grote liefhebberij, het volksdansen. Op Cornell kwam hij in aanraking met Ben Widom en Michael Fisher, die hem wisten te interesseren voor het gebruik van renormalisatietechnieken in de statistische fysica. Hier kwamen Wilsons talenten, namelijk zijn uitzonderlijke wiskundige vermogens gecombineerd met een verbluffend fysisch inzicht, volledig tot zijn recht. Er brak voor hem een dusdanig productieve periode aan, dat hij helaas zijn andere grote passie, het spelen van de hobo, moest opgegeven. *Life is all about priorities*, zal hij wel gedacht hebben.

Landau theorie

Het uitgangspunt voor Wilsons ontdekingsreizen was de theorie voor faseovergangen vernoemd naar de Rus Lev Landau (Nobelprijs 1962). Landau creëerde een algemeen raamwerk om overgangen tussen ongeordende en geordende systemen te bekijken. De aanwezigheid van orde is te kwantificeren door de verwachtingswaarde van een zogenoemde ordeparameter $\phi(x)$. De fysische betekenis van deze ordeparameter verschilt per faseovergang, maar een goed voorbeeld is de gemiddelde magnetisatie voor de overgang naar de ferromagnetische toestand. Bij hoge temperaturen zijn de spins van elektronen ongeordend in een metaal, zodat er netto geen magnetisatie is. Om de overgang naar de geordende of gemagnetiseerde toestand te beschrij-

Koos Gubbels studeerde in 2006 cum laude af in de theoretische natuurkunde aan de RUN. Zijn afstudeeronderzoek naar het afremmen van moleculen verrichtte hij in de groep van Gerard Meijer te Berlijn. Momenteel is hij bezig met zijn promotieonderzoek naar ultrakoude quantum gassen onder begeleiding van Henk Stoof.



K.B.Gubbels@uu.nl

ven, leidde Landau een (vrije) energie af door een expansie in de ordeparameter. Deze staat hieronder vermeld in het kader, met V het volume. De oneven machten ontbreken vanwege de inversiesymmetrie $F_L[\phi] = F_L[-\phi]$, die uitdrukt dat spin omhoog en spin omlaag energetisch equivalent zijn. De expansiecoëfficiënten u , v en w volgen uit de systeemeigenschappen. Zo is u bijvoorbeeld positief voor een ferromagneet, wat uitdrukt dat de spins dezelfde kant op willen staan. Ruimtelijke variaties in de magnetisatie zijn dan energetisch ongunstig, zodat het systeem een homogene ordeparameter $\phi(\mathbf{x}) = \phi$ preferereert. Dit resulteert uiteindelijk in de homogene (vrije) energie $F_L = V(v\phi^2 + w\phi^4 + \dots)$.

Bij hoge temperaturen zijn v en w typisch positief, zodat het minimum van de Landau- (vrije) energie wordt gegeven door de ongeordende toestand met $\langle \phi \rangle = 0$. Als v beneden een kritische temperatuur T_c negatief wordt, dan verschuift het minimum op continue wijze naar $\langle \phi \rangle = (-v/2w)^{1/2} \neq 0$. Dit minimum is te vinden door de homogene (vrije) energie te differentiëren naar ϕ en het resultaat gelijk aan nul te stellen. Volgens Landau zijn we nu getuige geweest van een continue of kritische faseovergang. Dicht bij de kritische temperatuur geldt $v(T) \propto (T - T_c)$, zodat de ordeparameter zich gedraagt als $\langle \phi \rangle \propto (T_c - T)^\beta$ met als kritische exponent $\beta = 1/2$. Helaas is deze conclusie niet in overeenstemming met experimenten, aangezien deze voor de ferromagnetische overgang wijzen op $\beta \approx 1/3$ in drie dimensies. Wat ging er dan mis in de bovenstaande discussie? De grofste benadering was het negeren van de fluctuaties in de ordeparameter. Vitaly Ginzburg (Nobelprijs 2003) beargumenteerde dat een dergelijke aanpak onbetrouwbaar wordt in een wereld met minder dan vier ruimtelijke dimensies. Toen hij voor dit geval de fluctuatiecorrecties wilde uitrekenen, kwam hij namelijk al snel in grote problemen omdat de bijdragen van fluctuaties met lange golflijnen naar oneindig bleken te gaan.

Renormalisatie

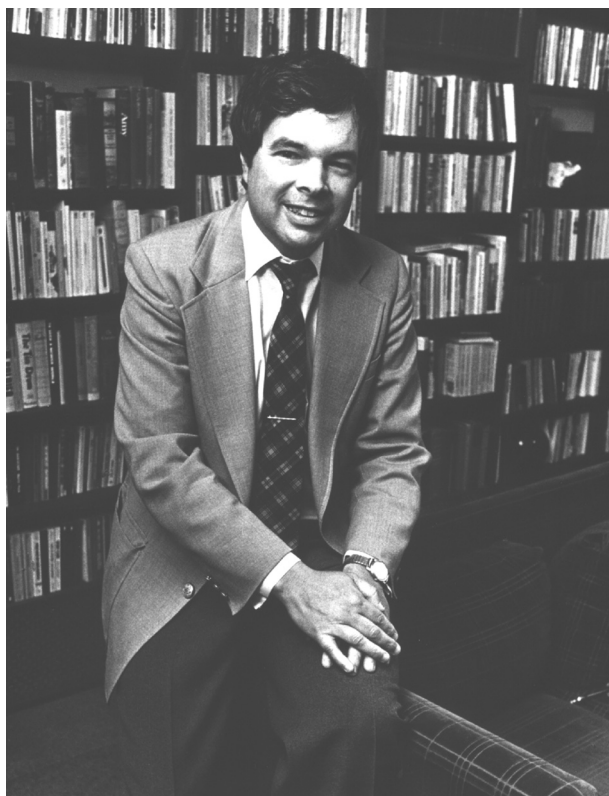
In een kritisch systeem zijn de effecten

$$F_L[\phi] = \int_V d\mathbf{x} \{ u(\nabla\phi(\mathbf{x}))^2 + v\phi(\mathbf{x})^2 + w\phi(\mathbf{x})^4 + \dots \}$$

van fluctuaties zelfs zo dominant, dat het systeem er op alle lengteschalen vrijwel hetzelfde uitziet. Kijkend door een microscoop zou het gegenereerde beeld dus niet veranderen bij het uitzoomen van de microscopische schaal naar de macroscopische schaal. Dit wordt schaalinvariantie genoemd. Wilson maakte hiervan gebruik door eentweestappenplan te bedenken, waarmee hij ieder systeem op verschillende lengteschalen

kon bestuderen. Anders gezegd, hij bedacht een soort theoretische microscoop. Zijn eerste stap was het uitrekenen van de eindige effecten, die worden veroorzaakt door fluctuaties met een kleine golflijngte. Deze effecten kon hij vervolgens absorberen in de relevante constanten van de theorie, zoals v en w , die hierdoor veranderden of renormaliseerden. De eerste stap wordt ook wel het 'eliminieren' van een lengteschaal in het probleem genoemd. In de tweede stap herschaalde Wilson alle lengtes in het systeem, ofwel hij zoomde uit, zodanig dat de geëlimineerde lengteschaal weer terugkeerde in de theorie. Alles had nu weer precies dezelfde vorm als voorheen, maar met nieuwe waarden voor de constanten en een nieuwe eenheid van lengte. Deze transformatie kon hij vervolgens zo vaak herhalen als gewenst, waardoor hij automatisch steeds meer fluctuatiebijdragen uitrekende. Het praktische resultaat van de hele procedure was een stelsel gekoppelde recursievergelijkingen voor de renormaliserende constanten.

De grote kracht van Wilsons procedure is dat de uitgebreide wiskundige trukendoos uit de theorie van afbeel-

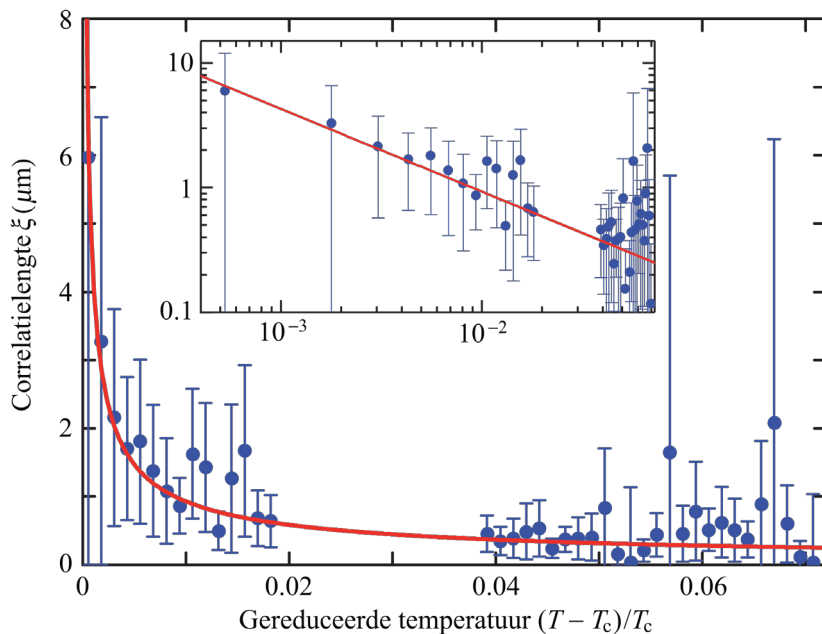


Kenneth G. Wilson.

dingen nu direct toepasbaar is om de fysica van kritische punten te beschrijven. Een speciale rol is weggelegd voor zogenoemde vaste punten, die door transformaties per definitie onveranderd worden gelaten. Dit is als volgt te begrijpen. Bij uitzoomen neemt de eenheid van lengte toe, terwijl fysische systeemeigenschappen hetzelfde blijven. De correlatielengte neemt dus af in termen van de nieuwe lengte-eenheid. Maar op een vast punt is de theorie, bestaande uit alle constanten en vrijheidsgraden, exact hetzelfde voor en na de transformatie. De correlatielengte blijft dus hetzelfde in de nieuwe eenheid. De ontstane paradox is alleen op te lossen als de correlatielengte nul of oneindig is, waarbij het laatste geval direct correspondeert met een kritisch punt. Aangezien de wiskunde van afbeeldingen elegant en vergevorderd is, laten vaste punten zich vaak gemakkelijk vinden en bestuderen.

Triomftocht

Wilson heeft indrukwekkende resultaten geboekt met zijn renormalisatiegroeptheorie. Hij kon bijvoorbeeld kritische exponenten, zoals β , met hoge precisie bepalen. Een ander onmiddellijk succes was de verklaring voor universaliteit, oftewel het wonderlijke verschijnsel dat een groot



Meting van de divergerende correlatielengte ξ als functie van de temperatuur in een gas rubidium-87 atomen. De rode lijn geeft de fit $|T - T_c|^{-\nu}$ weer met als kritische exponent $\nu \approx 0,67 \pm 0,13$. Van T. Donner, S. Ritter, T. Bourdel, A. Öttl, M. Köhl en T. Esslinger, *Science* 315, 1556 (2007). Opnieuw gedrukt met toestemming van AAAS.

aantal compleet verschillende systemen zich precies hetzelfde gedraagt rondom een kritisch punt. Wilson liet zien dat de eigenschappen van kritische vaste punten niet door microscopische details worden bepaald, maar hoofdzakelijk door de dimensie en de symmetrie van een systeem. Een laatste voorbeeld uit Wilsons creatieve triomftocht is dat hij samen met Michael Fisher zijn renormalisatietechniek onderzocht als functie van de afstand tot vier ruimtelijke dimensies. Hiermee konden zij uiterst precieze

berekeningen doen in 3,99 dimensies. Dit lijkt misschien artificieel en onzinnig, maar niets is minder waar. Het leverde namelijk het belangrijke bewijs dat gemiddelde-veldtheorie de mist in gaat beneden vier dimensies, zoals al was beargumenteerd door Ginzburg.

Verleden en heden

Wilson borduurde voort op een rijke traditie van renormalisatietheorie opgebouwd in de hoge-energiefysica. In de jaren veertig werden de oneindige problemen van de quantumtheorie

voor de elektromagnetische wisselwerking gerenormaliseerd door Sin-Itiro Tomonaga, Julian Schwinger en Richard Feynman (samen Nobelprijs 1965). Begin jaren zeventig bedachten Gerard 't Hooft en Tini Veltman (samen Nobelprijs 1999) nieuwe methoden om zogenoemde Yang-Millstheorieën te renormaliseren, waaronder ook de zwakke en de sterke wisselwerking vallen. Het centrale fysische idee is hier hetzelfde als bij Wilson. De waarden van de constanten in het Standaardmodel, zoals bijvoorbeeld de elektronlading, veranderen als functie van lengte- of energieschaal. In praktische zin zijn eventuele oneindigheden op hele kleine lengteschalen dan geen probleem, omdat alleen op grotere schaal metingen worden gedaan.

De renormalisatiegroeptheorie speelt nog altijd een cruciale rol om de meest recente experimenten in uiteenlopende vakgebieden te begrijpen. Een prachtig voorbeeld komt uit de groep van Tilman Esslinger, waar interferentie-experimenten zijn gedaan aan een ultrakoud rubidiumgas dat zich gedraagt als een materieegolf. Hiermee konden ze de divergentie van de correlatielengte bestuderen voor de kritische overgang naar de Bose-Einstein gecondenseerde toestand. Uit de grafiek blijkt dat de correlatielengte zich gedraagt als $|T - T_c|^{-\nu}$ met $\nu = 0,67 \pm 0,13$. De kritische exponent ν is in tegenspraak met de gemiddelde-veldbenadering, maar in volledige overeenstemming met Wilsons theorie.

Reactie

Le Pair slaat de plank mis wat betreft klimaatverandering.

Kees le Pair eindigt zijn boekbespreking van Jo Hermans *Energie survival gids* in NTvN 75-03 met een aantal boude uitspraken over klimaatverandering. Zo zou volgens hem meer CO₂ niet tot meer opwarming leiden, omdat het "CO₂ gordijn al zo goed als dicht is". Echter, de absorptiespectra van CO₂ zijn helemaal niet verzadigd. En al zouden die in de lagere atmosfeer verzadigd zijn, dan zou meer CO₂ in de hogere luchtlagen nog steeds leiden tot meer opwarming. Venus kan wellicht als voorbeeld dienen.

De zeespiegel stijgt nu met ongeveer 3 mm per jaar, ongeveer een factor 10 sneller dan in de afgelopen duizenden jaren. Ook daar slaat Le Pair de plank mis. Hij verwijt Hermans wat te gemakkelijk op de koers van het IPCC te varen. Dat klinkt als een raar verwijt; per slot van rekening geven de IPCC rapporten een rigoreuze samenvatting van de wetenschappelijke kennis op het gebied van klimaatverandering. Le Pair gebruikt blijkbaar liever argumenten die al decennia geleden ontkracht zijn. Dubieus, maar het ver-

klaart wellicht waarom hij geen heil ziet in zonne- en windenergie, zoals uit het eerste deel van zijn recensie blijkt. Als je het probleem ontkent, is de voorgestelde oplossing natuurlijk bij voorbaat onzinnig.

Bart Verheggen
Wetenschappelijk onderzoeker Luchtkwaliteit en Klimaatverandering, ECN Petten.
Klimaatblog: <http://ourchangingclimate.wordpress.com/>