

Utwerkingen Wiskunde H12, deel A

Opgave 12.1 Alle in deze opgave gegeven dv's zijn homogeen 2e orde en lineair.

(iii) $z'' - 4z' + 13z = 0, \quad z(0) = 7, \quad z'(0) = 42.$

De karakteristieke vergelijking is $k^2 - 4k + 13 = 0$ met discriminant $4^2 - 4 \cdot 13 = -36$: een gevalletje drie. Noem $\rho = -\frac{-4}{2} = 2$ en $\omega = \sqrt{36} = 6$. De alg opl is $z(x) = e^{2x}(A \cos 6x + B \sin 6x)$, met afgeleide $z'(x) = 2e^{2x}((A+3B) \cos 6x + (B-3A) \sin 6x)$. Beginwaarden invullen:

$$z(0) = A \stackrel{\text{eis}}{=} 7$$

$$z'(0) = 2A + 6B \stackrel{\text{eis}}{=} 42$$

met opl. $A = 7, B = 4\frac{2}{3}$. Dus de oplossing van het probleem is $z(x) = e^{2x}(7 \cos 6x + 4\frac{2}{3} \sin 6x)$.

(ix) $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = -1.$

De karakteristieke vergelijking is $k^2 + 2k + 1 = 0$ met discriminant $2^2 - 4 = 0$: een gevalletje twee, je ziet direkt dat je de k.v. kunt schrijven als $(k+1)^2 = 0$ met opl. $k = -1$. De alg opl is $y(t) = (A + Bt)e^{-t}$ met afgeleide $\dot{y}(t) = Be^{-t}$. Beginwaarden invullen:

$$y(0) = A \stackrel{\text{eis}}{=} 0$$

$$\dot{y}(0) = B \stackrel{\text{eis}}{=} -1$$

Dus de oplossing van het probleem is $y(t) = -te^{-t}$.

(xiii) $\ddot{y} - 4y = 0, \quad y(0) = 10, \quad \dot{y}(0) = 0.$

De karakteristieke vergelijking is $k^2 - 4 = 0$, oftewel $(k-2)(k+2) = 0$ met oplossingen $k = 2$ en $k = -2$, een gevalletje een (de discriminant is positief). De alg opl is $y(t) = Ae^{2t} + Be^{-2t}$ met afgeleide $\dot{y}(t) = 2Ae^{2t} - 2Be^{-2t}$. Beginwaarden invullen:

$$y(0) = A + B \stackrel{\text{eis}}{=} 10$$

$$\dot{y}(0) = 2(A - B) \stackrel{\text{eis}}{=} 0$$

met opl. $A = B = 5$. Dus de oplossing van het probleem is $y(t) = 5(e^{2t} + e^{-2t})$.