

Zelftest Wiskunde

Antwoorden en hints

7 september 2008

Opgave 1.

- $(x + a)(p + y) = xp + ap + xy + ay$
- $(1 + b)^2 = 1 + 2b + b^2$
- $(\sqrt{a} - b)^2 = a - 2b\sqrt{a} + b^2$ (NB: $a \geq 0$, anders kun je de wortel niet trekken.)
- $(p + q)(p - q) = p^2 - q^2$, dit is een “merkwaardig product” dat nog een paar keer terugkomt.

Opgave 2. De breuken altijd eerst gelijknamig maken.

- $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$
- $\frac{2}{a} + \frac{a}{bc} = \frac{2bc}{abc} + \frac{a^2}{abc} = \frac{a^2 + 2bc}{abc}$
- $2 + \frac{1}{\sqrt{s}} + \frac{1}{s} = \frac{2s}{s} + \frac{\sqrt{s}}{s} + \frac{1}{s} = \frac{2s + \sqrt{s} + 1}{s}$
- $\frac{b}{a^2b} - \frac{a}{b^2a} = \frac{b^2}{a^2b^2} - \frac{a^2}{b^2a^2} = \frac{b^2 - a^2}{a^2b^2}$

Opgave 3.

- $\frac{b^2 - x^2}{b - x} = \frac{(b - x)(b + x)}{b - x} = b + x$, tenzij $b = x$
- $\frac{10 \cdot 2^4 \cdot 4^{-2}}{3^2 + z^0} = \frac{10 \cdot (2^2)^2}{4^2 \cdot 10} = 1$
- $\frac{(4 - \pi + t)^2 - (4 + \pi - t)^2}{t - \pi} = \frac{((4 - \pi + t) + (4 + \pi - t))((4 - \pi + t) - (4 + \pi - t))}{t - \pi} = \frac{8 \cdot 2(-\pi + t)}{t - \pi} = 16$, tenzij $t = \pi$. Je kunt natuurlijk ook de kwadraten allebei uitrekenen maar dat is meer werk.
- $\frac{q^{c/2}}{q^{1/c}} = q^{c/2 - 1/c} = q^{\frac{c^2 - 2}{2c}}$, als je dat eenvoudiger vindt (ik niet).

Opgave 4. Dit gaat vooral over rekenen met machten.

- $\pi^0 = 1$
- $0^\pi = 0$
- $5^2 \cdot 5^{-3} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$; minder duidelijk is het antwoord 0.2.

d. $\left(\frac{12}{6}\right)^{1+1} = 2^2 = 4$

e. $\left((x^{-3})^2 \cdot x^{(-2)^2}\right)^{-1/2} = (x^{-6} \cdot x^4)^{-1/2} = (x^{-2})^{-1/2} = x^1 = x$, hier kun je ook met andere tussenstappen komen.

Opgave 5. Belangrijk: als $e^p = q$, dan $p = \ln q$ en omgekeerd. NB q is niet negatief.

a. π^3 kan niet eenvoudiger, vind ik.

b. $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$; bedenk dat $\ln(a^b) = b \cdot \ln a$.

c. $e^{3 \ln x} = x^3$

d. $e^{z \ln 5} = 5^z$

e. $\ln(2^2) - (\ln 2)^2 = 2 \ln 2 - \ln 2 \ln 2 = \ln 2(2 - \ln 2)$, als je dat leuk vindt dan kun je nog doorgaan d.m.v. $2 = \ln(e^2)$ zodat $\ln 2(2 - \ln 2) = \ln 2(\ln(e^2) - \ln 2) = \ln 2 \cdot \ln \frac{e^2}{2}$.

Opgave 6.

a. Hmm, hier had ik de voorwaarde $x, y \geq 0$ bedoeld, en dan was ie fout (tegenvoorbeeld: $x = y = 1$, $\sqrt{2} \neq \sqrt{1} + \sqrt{1}$). Zoals het er nu staat: de uitdrukking heeft geen betekenis als $x < 0$ of $y < 0$, wel als $x = y = 0$ en in dat geval is ie waar.

b. $(u + v)^2 = u^2 + v^2$ fout, tenzij $u = 0$ of $v = 0$.

c. $|p + q| = |p| + |q|$ fout, neem bijv. p positief en q negatief.

d. $-(ab) = (-a)(-b)$ fout, want $(-a)(-b) = ab$, alleen als $a = 0$ of $b = 0$ klopt het dus.

e. $\frac{a + c}{k} = \frac{a}{k} + \frac{c}{k}$, met $k \neq 0$ goed.

f. $\frac{a}{k + c} = \frac{a}{k} + \frac{a}{c}$, met $a, c, k > 0$ fout, als je de twee rechter breuken optelt krijg je $\frac{a(k + c)}{kc}$.

Opgave 7. Als je onthoudt dat logaritmen ooit zijn uitgevonden om (lastig) vermenigvuldigen te vervangen door (makkelijk) optellen, dan hoef je je nooit te vergissen tussen c en d.

a. $e^{ab} = e^a + e^b$ is fout, bijv. voor $a = b = 0$.

b. $e^{a+b} = e^a e^b$ is goed.

c. $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ met $a, b > 0$ is goed.

d. $\log(a + b) = \log(a) \log(b)$ met $a, b > 0$ is fout.

e.

Opgave 8.

a. $\sin(a + b) = \sin(a) \sin(b)$ is fout.

b. $\cos(ab) = \cos(a) \cos(b)$ is ook fout.

c. $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$ met $a, b > 0$ is goed, vgl. 7c.

d. $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ met $a, b > 0$ is goed.

e. $|ab| = |a||b|$ is goed.

f. $\frac{c}{ab} = \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{b}$ is fout, alleen voor $c = 0$ of $c = 1$ klopt het wel.

Opgave 9.

a. $f(x) = 3 + x$ is een rechte lijn door de punten $(0, 3)$ en $(-3, 0)$ (aan beide kanten loopt de lijn door).

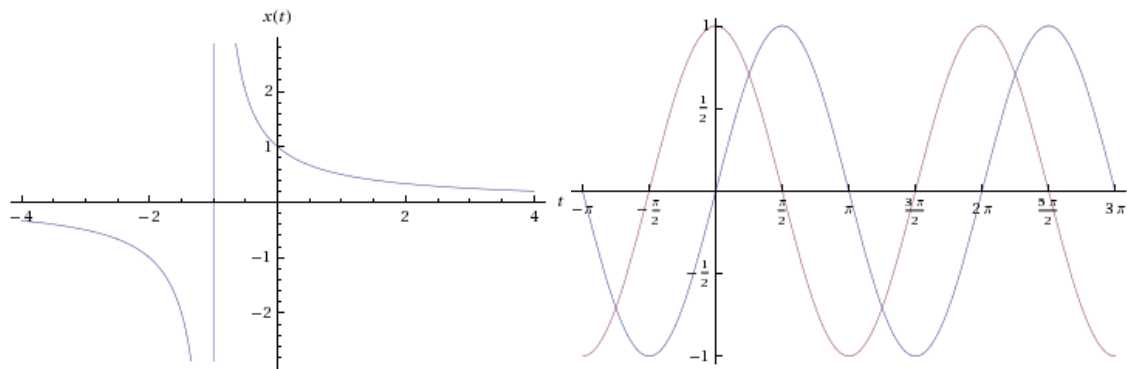
b. $g(x) = \frac{1}{2}x$ is een rechte lijn door $(0, 0)$ en $(2, 1)$.

c. $N(t) = \sqrt{4 - t}$ een kromme door $(0, 2)$, daarvandaan loopt hij naar links schuin omhoog (maar steeds vlakker), en naar rechts steeds steiler omlaag tot hij vertikaal in $(4, 0)$ eindigt.

d. $x(t) = \frac{1}{t+1}$: merk allereerst op dat je $\frac{1}{t+1}$ voor $t = -1$ niet uit kunt rekenen. Voor een net ietsje grotere t is de noemer positief maar wel heel klein, dus $\lim_{t \downarrow -1} x(t) = +\infty$.

Evenzo is $\lim_{t \uparrow -1} x(t) = -\infty$. Kies je t juist enorm groot, positief of negatief, dan zie je

dat je de noemer ook heel erg groot (positief of negatief) maakt en je concludeert dat $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0$. Tot slot bereken je nog $x(0) = 1$ en dan weet je genoeg om het volgende plaatje te kunnen tekenen.

**Opgave 10.**

a. Zie bovenstaand fig. De grafiek van $\sin(x)$ gaat door $(0, 0)$, van $\cos(x)$ door $(0, 1)$. Vervolgens kun je de juistheid van alle uitspraken inzien, behalve de laatste: $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ is wel goed.

Opgave 11.

a. $x = -1/2$

b. $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$

c. Herken $x = 0$ als oplossing; deel daarna beide kanten van de vgl. door x ($x \neq 0$) dan krijg je $x^2 + 5x - 6 = 0$, met opl. $x = -6$ of $x = 1$.

d. Vermenigvuldig beide kanten met $x + 1$ (mits $x \neq -1$), daarna kom je al snel op $x = -4/5$.

e. $x = -24/25$

f. Vroeger of later herken je dat $1 - 2x + x^2 = (1 - x)^2$, d.w.z. je kunt de vgl. schrijven als $1 - x = \sqrt{(1 - x)^2}$ en dus als $1 - x = |1 - x|$, aan deze vgl. is voldaan als $1 - x > 0$. De oplossingen zijn dus alle x waarvoor $x < -1$.

Opgave 12. NB soms maakt het (veel) uit wat de waarden van de parameters zijn!

a. Met de *abc*-formule: $t = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 8p}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 2p}}{2}$; NB als $p = 4\frac{1}{2}$ dan vallen

de twee oplossingen samen, en als $p > 4\frac{1}{2}$ zijn er geen (reële) oplossingen.

b. Voor $q = 1$ bestaat er geen enkele t die de vgl. waarmaakt.

Als $q \neq 1$:

$$\frac{t}{t-1} = q$$

$$t = q(t-1)$$

$$(1-q)t = -q$$

$$t = \frac{q}{q-1}.$$

Ook belangrijk: de opl. vertelt je gelukkig nooit dat je $t = 1$ zou moeten kiezen.

c. Als $c = 0$, dan zijn er geen oplossingen.

Als $c \neq 0$:

$$e^{ct+1} = 2$$

$$ct + 1 = \ln 2$$

$$t = \frac{\ln 2 - 1}{c}.$$

d.

$$\frac{1}{2} \log(t+3) = z$$

$$t+3 = 10^{2z}$$

$$t = 10^{2z} - 3.$$

e. Als $x = 0$, dan voldoen alle t behalve $t = -1$.

Als $x \neq 0$, dan moet t voldoen aan:

$$t(1+t) = 1$$

$t^2 + t - 1 = 0$, met oplossingen:

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Opgave 13.

a. $f'(x) = \frac{1}{2}x^5 + 4x + 1$

b. $N'(p) = \cos\left(\frac{2}{p}\right) - p \cdot \sin\left(\frac{2}{p}\right) \cdot \frac{-2}{p^2} = \cos\left(\frac{2}{p}\right) + \frac{2}{p} \sin\left(\frac{2}{p}\right)$

$$c. g'(z) = \frac{x(z^2 + 1) - 2xz^2}{(z^2 + 1)^2} = \frac{x(1 - z^2)}{(1 + z^2)^2}$$

$$d. y'(t) = 2te^{t^2 + \sin(x)}$$

e. Schrijf de functie eerst als $P(x) = e^{\ln(a) \cdot x^2}$, daarna differentiëren: $P'(x) = 2 \ln a x e^{\ln(a) \cdot x^2} = 2 \ln a x a^{x^2}$.

$$f. Q'(a) = x^2 a^{x^2 - 1}$$

$$g. L'(z) = \frac{1}{\sqrt{z - \sin(z)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{z - \sin(z)}} \cdot (1 - \cos z) = \frac{1 - \cos z}{2(z - \sin z)}; \text{ NB voor } z < 0 \text{ is}$$

$L(z)$ niet gedefinieerd.

Opgave 14.

$$a. \int f(x) dx = \frac{1}{7}x^7 + \frac{2}{3}x^3 + x^2 + 12x + c$$

$$b. \int g(x) dx = \ln(x + a) + c$$

$$c. \int P(z) dz = \frac{2}{7}z^{7/2} + c = \frac{2}{7}z^3\sqrt{z} + c$$

$$d. \int q(t) dt = -\cos(t^2) + c$$

$$e. \int z(t) dt = \frac{2}{c}e^{ct/2} + k$$