

Extra opgaven Wiskunde

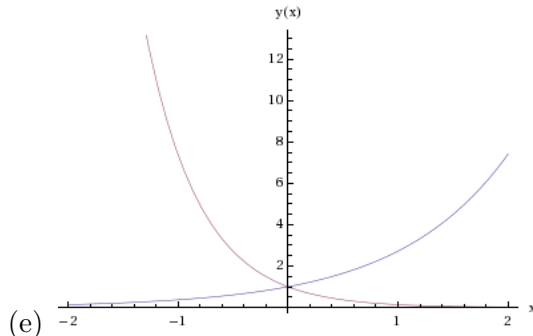
23-24 sep 2008

Uitwerkingen

1. Boek, opgave 9.3.

2. Beschouw de d.v. $y'' + y' - 2y = 0$.

- (a) Lineair, homogeen, 2e orde; omdat de orde 2 is, verwacht je 2 constanten in de oplossing.
- (b) Er geldt $y_1(x) = y_1'(x) = y_1''(x) = c_1 e^x$. Dus is $y_1'' + y_1' - 2y_1 = c_1 e^x + c_1 e^x - 2c_1 e^x = 0$, dus y_1 voldoet aan de d.v. Dus y_1 is een oplossing.
- (c) Er geldt $y_2(x) = c_2 e^{-2x}$, $y_2'(x) = -2c_2 e^{-2x}$, $y_2''(x) = 4c_2 e^{-2x}$. Dus is $y_2'' + y_2' - 2y_2 = 4c_2 e^{-2x} - 2c_2 e^{-2x} - 2c_2 e^{-2x} = 0$, dus y_2 voldoet aan de d.v. Dus ook y_2 is een oplossing.
- (d) Nee, $y_3 = c_3 e^{-x}$ is geen oplossing. Want $y_3' = -c_3 e^{-x}$ en $y_3'' = c_3 e^{-x}$, dus $y_3'' + y_3' - 2y_3 = c_3 e^{-x} - c_3 e^{-x} - 2c_3 e^{-x} = -2c_3 e^{-x} \neq 0$.



- (f) y_1 en y_2 zijn per definitie onafhankelijk als de een niet een veelvoud is van de ander. Als $c_1 = 0$ en $c_2 = 0$ geldt natuurlijk $y_1 = y_2 = 0$, dit is verder niet interessant. Als $c_2 \neq 0$, kijk dan naar het quotiënt $\frac{y_1}{y_2} = \frac{c_1 e^x}{c_2 e^{-2x}} = \frac{c_1}{c_2} e^{3x}$. De laatste uitdrukking is geen constante (hangt nl nog van de variabele x af) dus y_1 is niet voor elke x hetzelfde veelvoud van y_2 . Dus y_1 en y_2 zijn onafhankelijk.
- (g) De algemene opl is $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$. Invullen $x = 0$ resp $x = 1$ geeft je $y(0) = c_1 + c_2$ en $y(1) = c_1 e + c_2 \frac{1}{e^2}$. Volgens de randwaarden moet dus $c_1 + c_2 = 0$ en $c_1 + \frac{c_2}{e^2} = e^3 - 1$. Dus

$c_2 = -c_1$, en $c_1(1 - \frac{1}{e^2}) = e^3 - 1$. Dus $c_1 = (e^3 - 1)(1 - \frac{1}{e^2})$ en $c_2 = (1 - e^3)(1 - \frac{1}{e^2})$, de oplossing is dus $y(x) = (e^3 - 1)(1 - \frac{1}{e^2})(e^x - e^{-2x})$.

3. Beschouw nu de d.v. $y'' + y' - 2y = 4\sin(x) + 2\cos(x)$.

- (a) Lineair, niet homogeen, 2e orde; 2 constanten in de opl.
- (b) Differentiër $y(x) = -\sin(x) - \cos(x)$ twee keer, dan krijg je achtereenvolgens $y'(x) = -\cos(x) + \sin(x)$ en $y''(x) = \sin(x) + \cos(x)$. Derhalve

$$\begin{aligned} y''(x) + y'(x) - 2y(x) &= \sin(x) + \cos(x) + \sin(x) - \cos(x) + 2\sin(x) + 2\cos(x) \\ &= 4\sin(x) + 2\cos(x), \end{aligned}$$

dus deze y voldoet aan de d.v.

- (c) De algemene oplossing van deze (2e orde lin. inhom.) d.v. bestaat uit de opl. van het homogene probleem (zoals gevonden in opg.2) plus een part. opl.; we krijgen dus de opl. $y(x) = c_1e^x + c_2e^{-2x} - \sin(x) - \cos(x)$.
- (d) Eenmaal diff van de oplossing geeft $y'(x) = c_1e^x - 2c_2e^{-2x} - \cos(x) + \sin(x)$. Invullen van $x = 0$ in $y(x)$ resp. $y'(x)$ geeft het stelsel

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 - 1 &= -1, \\ c_1 - 2c_2 - 1 &= 2. \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} c_1 &= -c_2, \\ 3c_1 &= 3, \end{aligned}$$

en dus $c_1 = 1$, $c_2 = -1$. Derhalve is de opl. van het beginwaardeprobleem $y(x) = e^x - e^{-2x} - \sin(x) - \cos(x)$.

- 4. $y_1 = 1$ voldoet: want $y' = y'' = 0$, daarom $y_1y_1'' + (y_1')^2 = 0 + 0 = 0$. $y_2 = \sqrt{x}$ voldoet ook: want $y_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ en $y_2'' = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$, daarom $y_2y_2'' + (y_2')^2 = -\sqrt{x}\frac{1}{4x\sqrt{x}} + (\frac{1}{2\sqrt{x}})^2 = -\frac{1}{4x} + \frac{1}{4x} = 0$. We hebben hier dus twee onafhankelijke opl y_1 en y_2 , terwijl $y_1 + y_2$ niet een opl. is. Dat is niet vreemd, omdat de onderhavige dv niet lineair is.