NWI—Uitwerking van inleveropgave 7.1 en 7.2

Hieronder werk ik de twee opgaven gezamenlijk uit.

Gevraagd: De stationaire punten, hun aard (ook analytisch bepaald), en het fasediagram van de volgende d.v.'s:

i. $\dot{x} = -x + 1$

ii. $\dot{x} = x(2 - x)$

iv. $\dot{x} = -x(1 - x)(2 - x)$

Uitwerking: Er is steeds sprake van een stationair punt als $\dot{x} = 0$, en dan moet ook de rechterkant van de gegeven vergelijkingen 0 zijn.

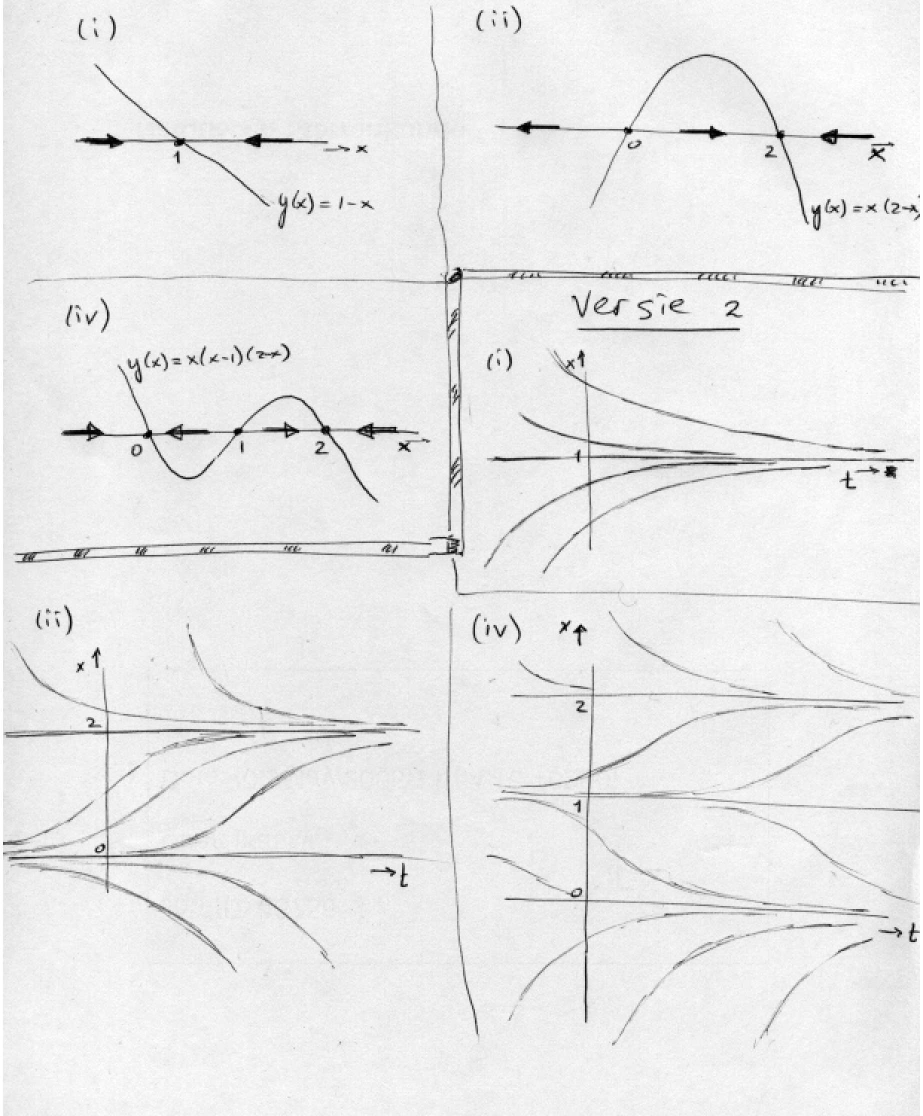
i. Stationair als $-x + 1 = 0$, dus als $x = 1$. De grafiek van $y = -x + 1$ is een rechte lijn die de x-as van boven naar beneden snijdt in $x = 1$. Volgens de d.v. is dan $\dot{x} > 0$ als $x < 1$ en $\dot{x} < 0$ als $x > 1$. Dus $x = 1$ is een stabiel stationair punt. Dit zie je ook analytisch m.b.v. de afgeleide $y'(x) = \dfrac{d}{dx}(-x + 1) = -1$: de afgeleide is (niet alleen bij $x = 1$ maar zelfs overal) negatief.

ii. Stationair als $x(2 - x) = 0$, dus als $x = 0$ of $x = 2$. De grafiek van $y = x(2-x)$ is een parabool die tussen de nulpunten $x = 0$ en $x = 2$ positief is, en aan de andere kant van de nulpunten negatief. Volgens de d.v. is dus $\dot{x} > 0$ als $0 < x < 2$ en $\dot{x} < 0$ als $x < 0$ of als $x > 2$. Dus $x = 0$ is een instabiel stationair punt en $x = 2$ is een stabiel stationair punt. Hetzelfde zie je ook analytisch m.b.v. de afgeleide $y'(x) = \dfrac{d}{dx}(x(2 - x)) = 2 - 2x$: er geldt $y'(0) = 2 > 0$ dus het stat. punt bij $x = 0$ is instabiel; en $y'(2) = -2 < 0$ dus het stat. punt bij $x = 2$ is stabiel.

iv. Stationair als $-x(1 - x)(2 - x) = 0$, dus als $x = 0$, $x = 1$, of $x = 2$. De grafiek van $y = -x(1 - x)(2 - x)$ ligt boven de x-as als $x < 0$ of als $1 < x < 2$. In die gebieden is dus blijkbaar (volgens de d.v.) $\dot{x} > 0$ en x stijgend; terwijl als $0 < x < 1$ of $x > 2$ is $\dot{x} < 0$ en dus x dalend. Daarom zijn $x = 0$ en $x = 2$ stabiele stationaire punten, en $x = 1$ is een instabiel stationair punt. Analytisch zie je dat in m.b.v. de afgeleide, die je overigens het makkelijkst vindt m.b.v. (ii) en de productregel: $y(x) = -x(1-x)(2-x) = x(2-x)(x-1)$ en daarmee $y'(x) = \dfrac{d}{dx}(x(2-x)(x-1)) = (2-2x)(x-1) + x(2-x) \cdot 1$: invullen geeft $y'(0) = -2 < 0$, $y'(1) = 1 > 0$, $y'(2) = -2 < 0$, dus wederom $x = 0$ stabiel, $x = 1$ instabiel, $x = 2$ stabiel.

7.1 + 7.2

fasediagrammen versie 1



Beoordeling: De volgende stappen dienen in de uitwerking expliciet aan de orde te komen:

1. x is stationair als $\dot{x} = 0$;
2. $\dot{x} = 0$ d.e.s.d.a. $y(x) = 0$ (met $y(x)$ de rechterkant van de d.v.);
3. nulpunten van $y(x)$ bepalen;
4. onderscheiden waar $y(x) > 0$ resp. $y(x) < 0$;
5. consequentie daarvan voor het gedrag van x onderkennen;
6. de voorgaande twee stappen ook doen d.m.v. de afgeleide van y in de stat. punten;
7. fasediagram tekenen;
8. karakteriseren van de stat. punten.

Voor elk van deze stappen 1 punt als ze expliciet in de uitwerking staan; 1 punt voor foutloos rekenwerk, en 1 punt om duidelijk betere uitwerkingen te belonen.

Het boek is niet duidelijk wat voor soort fasediagram er gevraagd wordt, beide versies ervan zijn daarom goed. NB let op dat bij de fasediagrammen langs de assen staat wat er uitgezet is (x, t, y), als dat er niet staat dan wel signaleren maar (nog) geen punten aftrekken.