

# 1e deeltentamen wiskunde NW&I

vrijdag 14 oktober 2005, 14.00-17.00.

- Schrijf op ieder vel uw naam en studentnummer.
- Geef een toelichting bij uw antwoorden.
- normering: opg. 1: 20 pt, opg 2: 15 pt, opg. 3 :15 pt, opg 4: 15 pt, opg 5: 10 pt.

## Opgave 1

Populaties zoogdieren hebben vaak te lijden onder het Allee-effect. Dit houdt in dat als in een gebied te weinig dieren van een bepaalde soort leven, deze populatie uitsterft omdat de kans dat een mannetje en een vrouwtje elkaar tegenkomen te klein is om voor voldoende nageslacht te zorgen. Het onderstaande populatie-model houdt rekening met het Allee-effect.

$$\dot{x} = ax(x - b)(M - x) \quad , \quad a, b, M > 0, \quad b > M.$$

- Bepaal de vaste punten van de vergelijking.
- Bepaal de stabiliteit van de vaste punten door middel van een berekening.
- Teken het fase-plaatje behorend bij de vergelijking.
- Leg uit hoe je het Allee-effect terugziet in de oplossing van de vergelijking. Geef een biologische interpretatie van het instabiele evenwicht.

## Opgave 2

Geef de oplossing van onderstaande vergelijkingen.

- $y'' + 2y' + 4y = 0$  (algemene oplossing)
- $y'' + 9y' + 8y = 0$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = -4$ .
- $y'' + y' = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = -1$ .

## Opgave 3

Geef de oplossing van de volgende vergelijkingen:

- $\dot{x} = x + tx$  (algemene oplossing)
- $\dot{x} = \sin t + t^3$ ,  $x(0) = 4$ .
- $\dot{x} - x/t = 0$ ,  $x(1) = -2$

#### Opgave 4

We laten een bolvormige capsule oplossen in water. Neem aan dat de vermindering van het volume per tijdseenheid evenredig is met het oppervlak van het bolletje. Deze aanname leidt tot de vergelijking:

$$\frac{dV}{dt} = -kV^{2/3} \quad , \quad k > 0$$

- a) Geef de algemene oplossing van deze vergelijking.
- b) De eenheid van volume is mililiter, die van tijd is minuten. Stel  $k = 0,4836$  en  $V(0) = 300$ . Bepaal op welk tijdstip het volume van het bolletje is gehalveerd.
- c) Leid de vergelijking af. Hint: een bol met straal  $R$  heeft een volume  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$  en een oppervlak  $S = 4\pi R^2$ . Gebruik deze gegevens om  $S$  in  $V$  uit te drukken.

#### Opgave 5

Los op met behulp van een integrerende factor (geef de algemene oplossing):

a)

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x^2}y = e^{-1/x}$$

b)

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x(1-x)}y = 1 - x$$