

1e deeltentamen wiskunde NW&I

vrijdag 13 oktober 2006, 14.00-17.00.

- Schrijf op ieder vel uw naam en studentnummer.
- Geef een toelichting bij uw antwoorden.
- normering: opg. 1: 20 pt, opg 2: 20 pt, opg. 3: 20 pt, opg 4: 20 pt.

Opgave 1

We beschouwen een economisch model van een markt waar één product wordt verhandeld. De prijs, het aanbod en de vraag zijn functies van de tijd: $p = p(t)$, $q_a = q_a(t)$, $q_v = q_v(t)$. Volgens de klassieke economische theorie neemt het aanbod toe als de prijs hoger wordt, neemt de vraag toe als de prijs lager wordt, stijgt de prijs als het aanbod kleiner is dan de vraag en daalt de prijs als het aanbod groter is dan de vraag.

We nemen aan dat de vraag- en aanbodsfuncties gegeven worden door $q_v = 8 - 2p$, $q_a = 2 + p$ en dat de prijs reageert op veranderingen in vraag en aanbod volgens de differentiaalvergelijking:

$$\dot{p} = c(q_v - q_a) \quad , \quad \text{met } c > 0$$

a) Laat zien dat de de vraag- en aanbodsfuncties voldoen aan de aannames van de klassieke economische theorie, evenals de vergelijking voor de prijs.

$q_a(p)$ **stijgend: 1p**

$q_v(p)$ **dalend: 1p**

als $q_v > q_a$ dan $\dot{p} > 0$ dus p neemt dan toe, als $q_v < q_a$ dan $\dot{p} < 0$ dus p neemt dan af: 3p.

b) Stel een vergelijking op voor $p(t)$ van de vorm $\dot{p} = f(p)$.

$$\dot{p} = c(6 - 3p) : \mathbf{5p.}$$

c) Teken het fase-plaatje behorend bij de vergelijking. Bepaal met behulp van een berekening de stabiliteit van vaste punt(en).

plaatje: 2p , berekening: 3p

d) De markt is in evenwicht als prijs, vraag en aanbod niet meer veranderen. Wat is de relatie tussen vraag en aanbod als de markt in evenwicht is?

in evenwicht is $\dot{p} = 0$: 2p

dus vraag=aanbod: 3p

Opgave 2

Geef de oplossing van onderstaande vergelijkingen.

a) $y'' - 10y' + 9y = 0$ (algemene oplossing)

k-verg: 2p, goede lambda's: 2p, oplossing: 1p

b) $\ddot{x} + \omega^2 x = -k\dot{x}$, met $\omega = \sqrt{17}$, $k = 8$ (algemene oplossing).

k-verg: 2p, goede lambda's: 2p, oplossing: 1p

c) $y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

k-verg: 1p, juiste lambda's: 1p, $y(t) = e^t(c_1 + c_2 t)$: 1p, c_1 en c_2 goed bepaald: 2p

d) $\ddot{x} - q^2 x = 0$, $q > 0$, $x(0) = 1$, $x(t) \rightarrow 0$ als $t \rightarrow \infty$.

k-verg: 1p, juiste lambda's: 1p, $y(t) = (c_1 e^{qt} + c_2 e^{-qt})$: 1p, berekenen dat $c_1 = 0$ en $c_2 = 1$: 2p

Opgave 3

Geef de oplossing van de volgende vergelijkingen:

a) $\dot{x} = \frac{\sin 2t}{x}$, $x(0) = a > 0$.

$\int x dx = \int \sin(2t) dt$: **1p**

$(1/2)x^2 = -(1/2)\cos(2t) + c$: **2p**

$x(t) = \sqrt{-\cos(2t) + a^2 + 1}$: **2p**

b) $\dot{x} = t\sqrt{x}$, $x(0) = 2$.

$$\int x^{1/2} dx = \int t dt: \mathbf{1p}$$

$$(2/3)x^{3/2} = (1/2)t^2 + c: \mathbf{2p}$$

$$x(t) = ((3/4)t^2 + 2^{3/2})^{2/3}: \mathbf{2p}$$

c) $t\dot{x} - 1/t = 0, x(1) = 2$

$$\dot{x} = (1/t^2): \mathbf{1p}$$

$$x(t) = -(1/t) + c: \mathbf{2p}$$

$$x(t) = -(1/t) + 3: \mathbf{2p}$$

d) (met behulp van een integrerende factor)

$$y' + \frac{y}{x+1} = x - 1 \quad , \quad y(0) = -1$$

vermenigvuldig met $e^{\ln(x+1)} = x + 1$: $\mathbf{2p}$

$$(y(1+x))' = x^2 - 1: \mathbf{1p}$$

$$y(x) = ((1/3)x^3 - x + c)/(x+1): \mathbf{1p}$$

$$y(x) = ((1/3)x^3 - x)/(x+1): \mathbf{1p}$$

Opgave 4

Een kweekbak voor de visteelt heeft een volume van V liter. Op tijdstip $t = 0$ is deze bak volledig gevuld met zoet water. Men laat water, dat een concentratie van k gram zout per liter bevat, de bak inlopen met een snelheid van v liter per minuut. Gelijktijdig loopt een zelfde hoeveelheid water via een overloop de bak weer uit. Het water in de bak wordt ondertussen goed geroerd. Zij $x(t)$ de concentratie zout in de bak, uitgedrukt in gram per liter. De vergelijking voor $x(t)$ is:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v}{V}(k - x) \quad , \quad x(0) = 0$$

a) Laat zien dat de oplossing van deze vergelijking gegeven wordt door:

$$x(t) = k(1 - e^{-(v/V)t})$$

oplossing invullen: 5p of oplossen

$$\int (1/(k-x)) dx = \int (v/V) dt: \mathbf{2p}$$

$$\ln(k-x) = -(v/V)t + c: \mathbf{1p}$$

$$k-x = Ce^{-(v/V)t}: \mathbf{1p}$$

$$x(t) = k - ke^{-(v/V)t}: \mathbf{1p}$$

b) Stel $k = 5$, $v = 2$ en $V = 1000$. Bepaal na hoeveel tijd de concentratie zout in de bak gelijk is aan 4 gram per liter.

los op $x(t) = 4$: 1p, goed antwoord 4p, per rekenfout: -1p.

c) Men wil de tijd verkorten die het duurt om tot een concentratie in de bak van 4 gram per liter te komen. Wat is effectiever: de zoutconcentratie van het instromende water verdubbelen bij onveranderde instroomsnelheid, of de instroomsnelheid verdubbelen bij onveranderde zoutconcentratie van de instroom?

de juiste tijd berekenen per geval: 2p, juiste antwoord 1p. per rekenfout: -1p.

d) Leid de differentiaalvergelijking af. Hint: de verandering van de zoutconcentratie in de bak is gelijk aan het verschil in concentratie van het instromend water en dat van het uitstromend water.

5p gratis! De hint is misleidend (om niet te zeggen fout)

correcte afleiding (hiermee kunnen 5 extra p worden verdiend): verandering hoeveelheid zout in bak per tijdseenheid = instroom hoeveelheid zout/t.e. - uitstroom hoeveelheid zout/t.e.: 2p

$$\frac{d}{dt}(xV) = vk - vx: \mathbf{2p}$$

$$\dot{x} = (v/V)(k-x): \mathbf{1p}$$