

Deeltentamen Wiskunde

GEO1-2202 donderdag 28 oktober 2008

1. Bepaal de algemene oplossing van de volgende stelsels en teken de bijbehorende faseportretten.

$$(a) \begin{cases} \dot{x} = -2x + 4y \\ \dot{y} = 2x \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y \\ \dot{y} = -5x + y \end{cases}$$

2. (We maken ons hier niet druk om de eenheden van de grootheden.) Een zak zand met een massa van $m = 0.5$ hangt aan een veer met een veerconstante van $k = 2$. De omgeving zorgt voor een dempingsfactor van $\mu = 0.1$. We modelleren de beweging van het massa-veersysteem als

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = 0.$$

Op tijdstip $t = 0$ laat je de massa los bij een uitrekking van de veer $x = 1$ t.o.v. de rustpositie; op dat moment is de snelheid $\dot{x} = 0$.

- (a) Los de differentiaalvergelijking op en geef de plaats x van de zak als functie van de tijd t .
 - (b) De zak is lek, het zand loopt er langzaam uit zodat de massa steeds minder wordt. Bereken bij welke massa het systeem kritische demping ondervindt (dus tussen over- en onderdemping in).
 - (c) Van een ander massa-veersysteem is de plaatsfunctie $x(t) = \frac{3}{2}e^{-t\sqrt{\pi}}$. Bereken exact het tijdstip t waarop $x(t) = \frac{1}{4}$.
3. Gegeven is het stelsel d.v.'s

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- (a) Neem $p = 4$ en $q = 0$. Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van dit stelsel. Noot: doe niet meer dan gevraagd wordt!
- (b) Kies nu zelf waarden voor p en q zodanig dat de oplossingen van het stelsel periodiek zijn (oftewel de oorsprong $(0,0)$ is een centrum). Verantwoord je keuze en bereken de periode. (Hint: dat is $2\pi/\omega$.)