Herinner: voorbeeld $y' + \frac{y}{x} = 1 \quad (*)$

homogene vgl: $y' + \frac{y}{x} = 0$

homogene oplossing: $y(x) = \frac{c}{x}$

inhomoge vgl oplossen:

methode I: integrerende factor

II: variatie van parameter / constante

Vat de integratieconst op als functie $c(x)$

Dan heb je dus $y(x) = \frac{c(x)}{x}$. Dit moet voldoen aan $(*)$

Welnu, $y'(x) = \frac{c'(x)}{x} - \frac{c(x)}{x^2}$

eis wegens $(*)$

$$\underbrace{y' + \frac{y}{x} = \frac{c'(x)}{x} - \cancel{\frac{c(x)}{x^2}}}_{y'} + \cancel{\frac{c(x)}{x^2}} = \frac{c'(x)}{x} = 1$$

$c'(x) = x$

$c(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$

Conclusie: $y(x) = \frac{\frac{1}{2}x^2 + c}{x} = \frac{1}{2}x + \frac{c}{x}$ ☒

§7.9 Ex. 8 later (na $\int$ met subs)

Kwadraat afsplitsen?

§6.2. Primitiveren van Rat. fies $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ met P, Q veeltermen.

Aanpak:

1). indien graad $P \geq$ graad Q: uitdelen.

Voorbeeld: $\int \frac{x^3+3x^2}{x^2+1}\,dx = \int x+3 - \frac{x+3}{x^2+1}\,dx$

$\cancel{(x^3+3x^2)(x^2+1)^{-1}}$

2). Nu is graad $P <$ graad Q

2A). Als graad $Q = 1$ dwz. $Q(x) = ax+b$, $P(x) = c$

Vb. $\int \frac{1}{9x+6}\,dx = \frac{1}{9}\log|9x+6| + c = \frac{\log|9x+6| + c}{9}$

2B). graad $Q = 2$: afh. van factorisatie van Q.

0, 1 of 2 nulpunten [kwadraatafsplitsen kan hier nodig zijn]

- Q heeft geen nulpunten:

$$\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3} + c$$

- Q heeft 1 nulpunt:

$$\int \frac{dx}{(3+x)^2} = \frac{-1}{3+x} + c.$$

$$\frac{1}{(3+x)^2} = (3+x)^{-2}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(3+x)^2} = \int \frac{3+x-3}{(3+x)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{3+x}{(3+x)^2} - \frac{3}{(3+x)^2}\,dx = \underbrace{\int \frac{1}{3+x}\,dx}_{\text{al gehad.}} - 3\underbrace{\int\frac{1}{(3+x)^2}\,dx}_{\text{ook.}}$$

• Q heeft twee verschillende nulpunten: factoriseren!

$$\int \frac{dx}{(3-x)(x-2)} \rightarrow \text{breuksplitsen.}$$

$$\frac{a}{3-x} + \frac{b}{x-2} = \frac{a(x-2)+b(3-x)}{(3-x)(x-2)}$$

$$= \frac{(a-b)x + 3b-2a}{(3-x)(x-2)} \underset{\text{WILT}}{=} \frac{1}{(3-x)(x-2)}$$

Voor welke a, b lukt dit?

$$\begin{cases} a-b = 0 \\ 3b-2a = 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} a=b \\ b=1 \end{matrix}$$

$$\frac{1}{3-x} + \frac{1}{x-2} = \frac{x-2+3-x}{(3-x)(x-2)} = \frac{1}{(3-x)(x-2)}$$

Dus $\int \frac{dx}{(3-x)(x-2)} = \int \frac{1}{3-x} + \frac{1}{x-2}\, dx$ etc.

2c). graad Q > 2: ongeveer net zo, maar niets aan doen

(Bijv. $\int \frac{3x+27}{x^5-x^4+x-8}\, dx$ dus niet.)

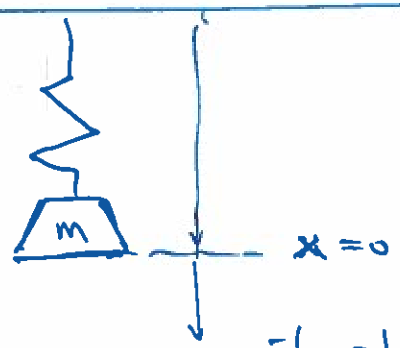
2e orde <u>lineaire</u> d.v. met const. coeff.

$$3x'' + 7x' - 8x = \sin t \qquad \text{je zoekt } x(t)$$

Niet-lineair: $3\underline{x''x} + 7x' - 8x = \sin t$

$$3\,\underline{\sin}(x'') + 7x' - 8x = \sin t$$

<u>Harmonische Oscillator</u>



uitwijking x, fie van t

Hooke: veer heeft spankracht $-k^2x$

~~Newton: spankracht = mx'' (F = ma~~)

Newton: $F = ma$

$$\boxed{mx'' + k^2x = 0}$$

$$\underset{\substack{\| \\ ma}}{mx''} \qquad \underset{\substack{\| \\ -F}}{k^2x}$$

Dissipatie (wrijving): $m x'' + \underbrace{\mu x'}_{\text{dissipatie term}} + k^2 x = 0$ ← Homogeen.

verondersteld wrijving evenredig met snelheid

Stel: $x = e^{\lambda t}$ is een oplossing.

dan: $x' = \lambda e^{\lambda t}$

$x'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$$m x'' + \mu x' + k^2 x = m\lambda^2 e^{\lambda t} + \mu \lambda e^{\lambda t} + k^2 e^{\lambda t}$$

$$= (m\lambda^2 + \mu\lambda + k^2) e^{\lambda t} = 0$$

Dan moet dus $\boxed{m\lambda^2 + \mu\lambda + k^2 = 0}$ → OPSCHRIJVEN. KARAKTERISTIEKE VGL

of $\lambda_{1,2} = \dfrac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4mk^2}}{2m}$

Dus $x = e^{\lambda_1 t}$ is een opl? en $x = e^{\lambda_2 t}$ ook?

Dan is ook $\boxed{x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}}$ met constanten c_1, c_2

ook een opl van de $m x'' + \mu x' + k^2 x = 0$.

Drie mogelijkheden

1). $\mu^2 - 4mk^2 > 0$ dan λ_1, λ_2 allebei reeel.

2). $\mu^2 - 4mk^2 < 0$ dan λ_1 en λ_2 complex geconjugeerden

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\mu}{2m} \pm \frac{\sqrt{4mk^2 - \mu^2}}{2m}\, i$$

$$x = e^{-\frac{\mu}{2m}t} \cdot e^{\pm i\left(\sqrt{4mk^2 - \mu^2}/2m\right)t}$$

Hocus pocus (zie filmpje Youtube)

$$\cancel{x = e^{-\frac{\mu}{2m}}(\cos}$$

$$\boxed{x = \underset{?}{r}\, e^{-\frac{1}{2m}\mu t}\left(\cos(\underset{?}{\omega} t + \underset{?}{\varphi})\right)}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4k^2 - \mu^2}{m^2}}$$

3). $\mu^2 - 4mk^2 = 0$: dan is $\boxed{x = (a + bt)e^{-\frac{\mu}{2m}t}}$ de $\frac{\text{hom.}}{\text{oplossing}}$

(magisch)