Partieel Integreren

↓ integraal versie van de prod. regel bij diff.

Herinner:
integreren met subs. is de int. versie van kettingregel bij diff.

Stel u, v fies.

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Herschrijf:

$$\int u'v\,dx = \int (uv)' - uv'\,dx$$

$$\boxed{\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx} = \text{part. int.}$$

Voorbeeld:

$\int x \sin x\,dx \longrightarrow$ keuze: bijv. $u' = x$ en $v = \sin x$ OPTIE 1

$u' = \sin x$ en $v = x$ OPTIE 2

OPTIE 1: $u = \frac{1}{2}x^2$ en $v' = \cos x$

$$\int \underset{u'}{x} \underset{v}{\sin x}\,dx = \underset{uv}{\frac{1}{2}x^2 \sin x} - \underset{\int uv'dx}{\int \frac{1}{2}x^2 \cos x\,dx}$$

☹ Dit werkt misschien niet

OPTIE 2 : $u = -\cos x$, $v' = 1$

$$\int \underset{v}{\underline{x}}\, \underset{u'}{\underline{\sin x}}\, dx = -x\cos x + \int \cos x\, dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + c$$

Check: $\cancel{-\cos x} + x\sin x \cancel{+ \cos x}$

Voorbeeld 2

$$\int \log x\, dx = \int \underset{u'}{1} \cdot \underset{v}{\log x}\, dx = x\log x - \int 1\, dx = x\log x - x + c.$$

Werkt ook bij arctan.

Voorbeeld 3

$$\int e^x \sin x\, dx$$

OPTIE 1: $u' = e^x$ en $v = \sin x$

OPTIE 2: $u' = \sin x$ en $v = e^x$

OPTIE 1

$$I = \boxed{\int e^x \sin x\, dx} = e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx$$

Nu nog een keer:

$$\int \underset{u'}{e^x} \underset{v}{\cos x}\, dx = e^x \cos x + \boxed{\int e^x \sin x\, dx} = I$$

$$I = e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - I$$

$$2I = e^x(\sin x - \cos x) + c \quad \text{dus} \quad \int e^x \sin x\, dx = \tfrac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c$$

<u>OPTIE 2</u> $I = \int \underset{v}{e^x} \underset{u'}{\sin x}\, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx$

waarin $\int \underset{v}{e^x} \underset{u'}{\cos x}\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$

dus $I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I$

oftewel $I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c$.

$\int x^{27} e^{-x}\, dx$ Huh wat?! 27x partieel?!

Handiger: geeft het beestje een naampje met parameter

$$I_n = \int \underset{v}{x^n}\, \underset{u'}{e^{-x}}\, dx$$

partieel:

$$\boxed{\begin{aligned} I_n &= -e^{-x}x^n + n\underbrace{\int e^{-x}x^{n-1}\, dx} \\ &= -e^{-x}x^n + n I_{n-1} \end{aligned}}$$

Reductie formule

Bovendien

$$I_0 = \int e^{-x}\, dx = -e^{-x} (+c)$$

$$I_1 = -e^{-x}x + I_0 = -e^{-x}(x+1)$$

$$I_2 = -e^{-x}x^2 + 2I_1 = -e^{-x}(x^2+2x+2)$$

I_3 = etc.