Oneigenlijke integralen

twee soorten: (i) onbegrensd interval $\left(\int_1^\infty \right) dx$

(ii) interval wel begrensd $[a,b]$ maar fie is niet gedefinieerd in a, of b.

(i). Met $\int_a^\infty f(x)\,dx$ bedoelen we per defn de $\lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx$

Als die lim bestaat dan heet de integraal convergent en anders divergent.

Idem ook $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{R\to-\infty} \int_R^a f(x)\,dx$.

Voorbeeld. $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x}\,dx = \log x\Big|_{x=1}^R = \lim_{R\to\infty} \log R = \infty$

dus deze is divergent.

Voorbeeld $\int_0^\infty \cos x\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \cos x\,dx = \lim_{R\to\infty} \sin x \Big|_{x=0}^{x=R} = ??$ bestaat niet.

divergent.

(ii) (interval begrensd maar fie doet moeilijk)

Als f gedefinieerd is op interval $(a,b]$ maar $f(a)$ is niet gedefn.

dan $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{R\downarrow a} \int_R^b f(x)\,dx$. Als lim bestaat: convergent

$\lim_{R\to a^+}$

zo niet : divergent.

Voorbeeld. $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to 0^+} \int_R^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to 0^+} \log x \Big|_{x=R}^{x=1} = \lim_{R\to 0^+} -\log R = +\infty$

dus divergent.

~~$\neq y$~~ ~~$\alpha > 0$~~

Ik beweer: $\int_1^\infty x^{-\alpha}\,dx$ convergent voor $\alpha > 1$. en div $\alpha \leq 1$

Geval $\alpha = 1$ al gehad.

Bekijk nu $\underline{\underline{\alpha \neq 1}}$: dan $\int x^{-\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} + C$

dus $\int_1^\infty x^{-\alpha}\,dx = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Big|_{x=1}^{x=R} = \lim_{R\to\infty} \frac{R^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}$ bestaat indien $\alpha > 1$.

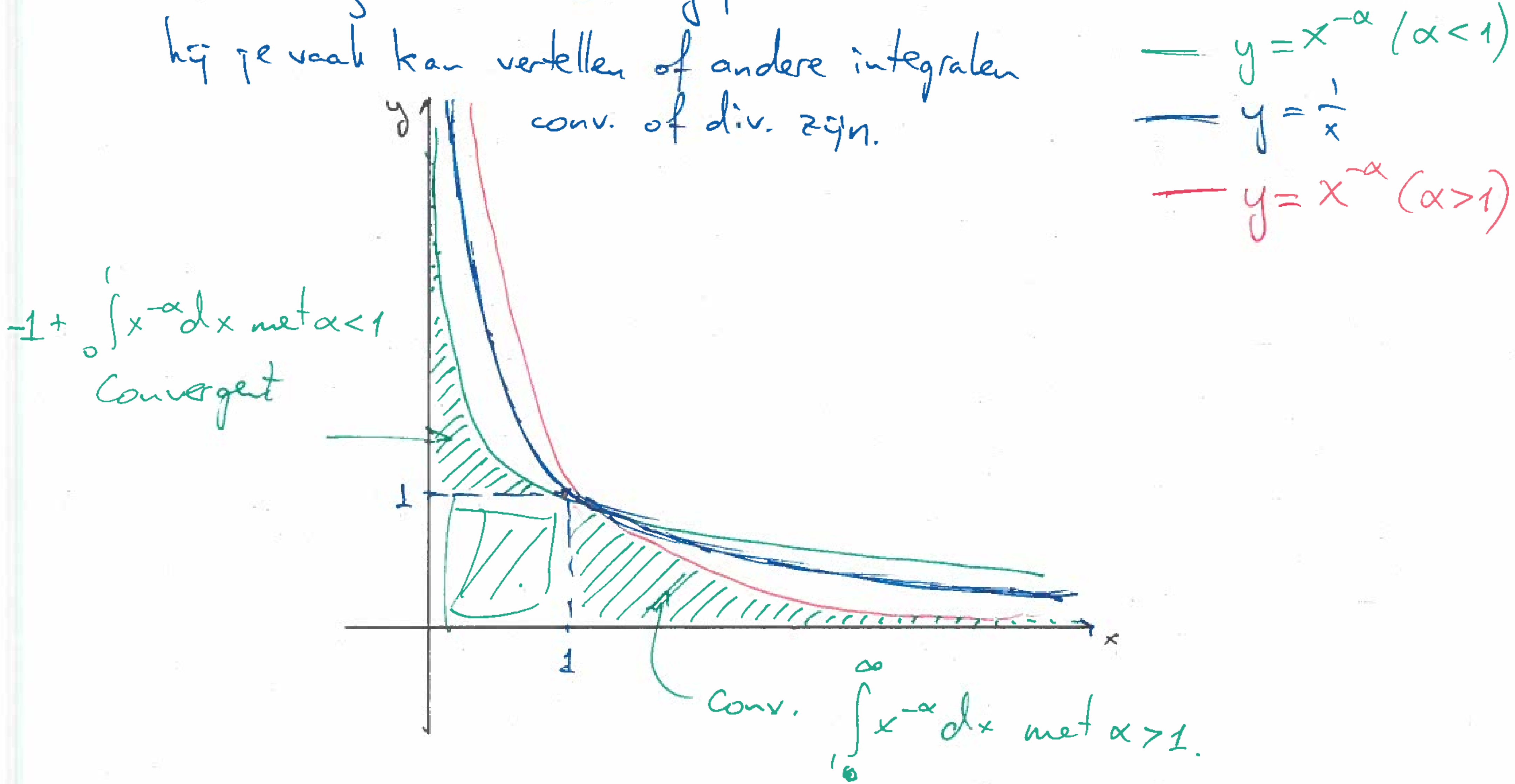
$$\left[\begin{array}{l} \text{als } 1-\alpha > 0 \text{ en } R\to\infty \text{ dan } R^{1-\alpha} \to \infty \\ \phantom{\text{als }} 1-\alpha < 0 \text{ en } R\to\infty \text{ dan } \underset{\displaystyle \frac{1}{R^{\alpha-1}}}{\underset{\parallel}{R^{1-\alpha}}} \to 0 \end{array}\right]$$

Doe nu zelf:

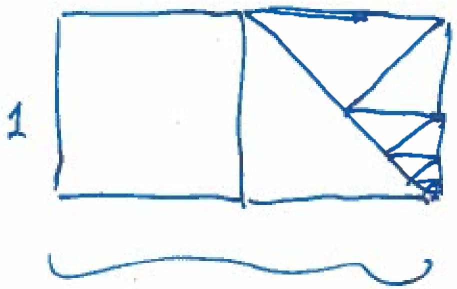
$\int_0^1 x^{-\alpha}\,dx$ is convergent voor $\alpha \underline{\ldots ?}$ en div. anders.

$\alpha < 1$

Thm. 2. §6.5 is belangrijk omdat hij je vaak kan vertellen of andere integralen conv. of div. zijn.

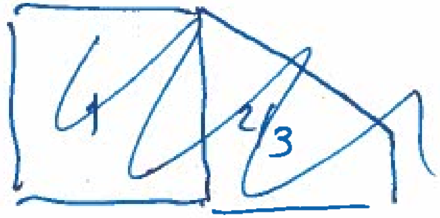


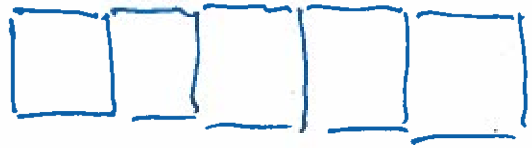
Intermezzo.



∞ veel stukjes!

oppervlakte $2 < \infty$

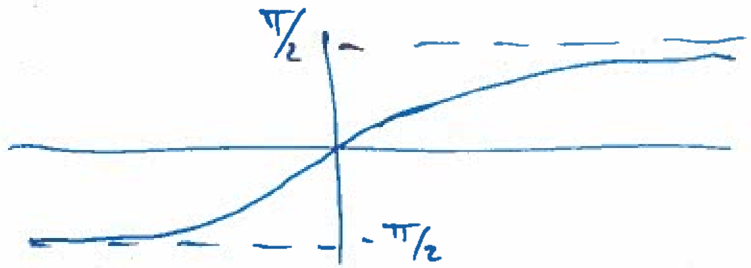




$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$ Wat nou?! Verdeel en heers:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= 2\lim_{R\to\infty} \arctan x \Big|_{x=0}^{R} = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$$ Conv.



Thm. 3 (§6.5) (vertelt hoe je Thm. 2 kunt gebruiken.)

Als op (a,b) geldt dat $0 \leq f(x) \leq g(x)$ voor alle $x \in (a,b)$

dan is ook $0 \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

en bovendien:

- als $\int_a^b g(x)\,dx$ conv. dan $\int_a^b f(x)\,dx$ ook conv.
- als $\int_a^b f(x)\,dx$ div. dan $\int_a^b g(x)\,dx$ ook div.
- als $\int_a^b f(x)\,dx$ conv ~~weet je~~ vertelt de stelling nix over g.
- als $\int_a^b g(x)\,dx$ div. weet je nog niks over $\int f\,dx$.

Voorbeeld $\int_2^\infty \frac{x\sqrt{x}}{x^2-1}\,dx$??

- "lijkt op" $\frac{x\sqrt{x}}{x^2}$ als x heel groot
- $\frac{x\sqrt{x}}{x^2-1}$ is wel begrensd, alleen interval onbegrensd.
- $\frac{x\sqrt{x}}{x^2-1} > \frac{x\sqrt{x}}{x^2} = x^{-\frac{1}{2}} > 0$

Stelling 3 met $g(x) = \frac{x\sqrt{x}}{x^2-1}$, $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{x^2}$

We weten $\int_2^\infty \frac{x\sqrt{x}}{x^2}\,dx = \int_2^\infty x^{-\frac{1}{2}}\,dx$ divergent vgs. Stelling 2

dus vgs. Stelling 3: $\int_2^\infty \frac{x\sqrt{x}}{x^2-1}\,dx$ divergent.

Laatste voorbeeld.

$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}$ $\underline{\text{conv.}}$ of div? gaat 2x mis: verdeel & heers.

KIS keep it simple

$$\underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}}$$

$\hookrightarrow$ afschatten: $0 < \frac{1}{\sqrt{x}+x^2} \leq \frac{1}{x^2} = \underline{x^{-2}}$
conv. (St. 2)

Thm. 3: $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}$ conv.

afschatten:

$0 < \frac{1}{\sqrt{x}+x^2} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} = \underline{x^{-\frac{1}{2}}}$
conv. (St. 2)

St 3: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}$ conv.

Dus $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}$ conv.

Allerlaatste

We hebben gezien: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$

Nota bene: Eerst splitsen, dan lim!

Dit is niet goed:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{dx}{1+x^2} = \cancel{\lim_{R\to\infty} \arctan(R) - \arctan(-R)}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \arctan x \Big|_{-R}^{R} = \lim \arctan R$$