Int. technieken : TIP   Chapter Review van H. 6

Lijst 1 t/m 80   oefenmateriaal!

①

§ 3.4 Stelling 5   Zij $a > 0$, dan geldt

(b) $\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x^a} = 0}$

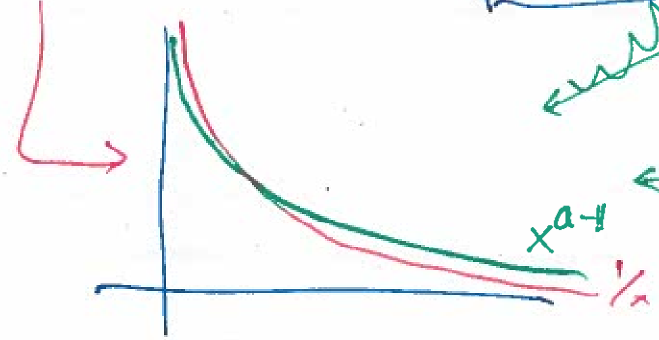
betekenis: alle (positieve) machten van x groeien harder dan log.

bewijs: zie boek maar geeft geen inzicht

inzicht: kijk naar de helling van $\log x$ en x^a

$\frac{d}{dx} \log x = x^{-1}$ resp.   met $a > 0$

$$\boxed{\frac{d}{dx} x^a = a x^{a-1} = a x^a (x^{-1})}$$



(d) $\boxed{\lim_{x\to 0^+} x^a \log x = 0}$

betekenis: x^a "overwint" $\log x$ als $x \to 0^+$

volgt uit (b) met $x \to \frac{1}{x}$

(a) $\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0}$

betekenis: e^x groeit harder dan x^a als $x \to \infty$

volgt uit (b) met $x \to e^x$

(c) $\boxed{\lim_{x\to -\infty} e^x |x|^a = 0}$

volgt uit (a) met $x \to -x$

$|x|$ is nodig
immers $x < 0$
we zitten in $\mathbb{R}$
Wat betekent $(-3)^{\sqrt{2}}$?

§. 3.1 Inverse fies.

al veel aan gedaan

o.a. $f^{-1\prime}(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ etc.

Manipuleren met inverse fies.

Voorbeeld: laat f een ~~bijectieve~~ injectief fie zijn (bijectief niet nodig)

MITS je het domein van f^{-1} beperkt tot het bereik van f.

dwz: 1-op-1

dwz: • als $f(x) = f(y)$ dan $x = y$.

• ~~voor elke a in bereik van f zit er een x in domein met f(x) = a.~~

dan bestaat de inverse, f^{-1}.

Stel je weet: $s(x) = \dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$

Vraag: bepaal $s^{-1}(x)$

Oplossing: 2 stappen: van s terug naar f

van f terug naar x → makkelijk $x = f^{-1}(f)$

- Van s naar f:

$$s = \frac{1+f}{1-f} \quad \text{dus} \quad s(1-f) = 1+f$$

$$s - sf - 1 - f = 0$$

$$s - 1 - f(s+1) = 0$$

$$f = \frac{s-1}{s+1}$$

- Van s naar x: $\quad x = f^{-1}(f) = f^{-1}\left(\frac{s-1}{s+1}\right)$

of $s^{-1}(s) = f^{-1}\left(\frac{s-1}{s+1}\right)$

Zie verder opgaven.

en opgavenblad van hyperbolische fies.

5

Zij $y = e + 2^x$. Wat is x?

BLAUW $x = \frac{\log y - 1}{\log 2}$

GEEL $x = \frac{\log(y-1)}{\log 2}$

ROOD $x = \frac{\log y}{\log 2} - 1$

ZWART $x = \frac{\log(y-e)}{\log 2}$

Rangschik van klein naar groot

$\log 30 - \log 2 = \log \frac{30}{2} = \log 15$ (3)

$2 \log 4 = \log 16$ (4)

$\log 3 + \log 4 = \log 12$ (2)

$\frac{\log 4}{\log 2} = \frac{\log 2^2}{\log 2} = 2 = \log(e^2) \approx \log 7\ ?$ (1)

nb. log stygend.

Rangschik van klein naar groot; als $x \to \infty$

x^{100}

$x^{-100} e^{x}$. $\leftarrow$ e^{x} groeit heel hard

$x^{99} \log(x^{2})$ $\leftarrow$ log gaat langzamer dan x

$e^{x} \log x$.

x^{-100} vgl met $\log x$

$x^{-100} \to 0$

$\log x \to +\infty$

Hier was een vraag over.
Antwoord:
$x^{200} < e^{x}$ als $x \to \infty$

$x^{99} \log x^{2} < x^{100} \overset{?}{<} x^{-100} e^{x} < e^{x} \log x$

$2x^{99} \log x < x^{99} \cdot x$

$\dfrac{e^{x}}{x^{100}}$

§4.3 l'Hopital wordt vaak verkeerd gebruikt!

Voorbeeld bepaal $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$ help, $[\infty - \infty]$

kun je niks over zeggen

herschrijf: $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x - x}{x \sin x}$ help, $\left[\frac{0}{0}\right]$

AH l'Hôpital!

Stelling:

ALS $\lim_{x \to a} f(x) = 0$

en $\lim_{x \to a} g(x) = 0$

en f, g diffb.

en $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (met $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$)

DAN $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ ook.

Dus hier: $f(x) = \sin x - x$

$g(x) = x \sin x$

We hebben: $\lim_{x \to 0^+} \sin x - x = 0$

$\lim_{x \to 0^+} x \sin x = 0$

f, g diffb met $f'(x) = \cos x - 1$

$g'(x) = \sin x + x \cos x$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \text{help } \left[\frac{0}{0}\right].$$

Pas l'Hôpital opnieuw toe op

[--- lang Verhaal kort..]

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{-\sin x}{2\cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

Conclusie: $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = 0$

Alternatief.

We zoeken $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x - x}{x \sin x}$ zonder l'Hôpital.

Taylor:

$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3$ + hogere orde

dus

$\sin x - x = -\frac{1}{6}x^3$ + hogere orde

$x \sin x = x^2 - \frac{1}{6}x^4$ + hogere orde

dus $\frac{\sin x - x}{x \sin x} = \frac{-\frac{1}{6}x^3 + \text{hogere orde}}{x^2 - \frac{1}{6}x^4 + \text{hogere orde}}$ = grootte-orde x (als $x \to 0$)

Conclusie $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = 0$

Vraag.

Stel je onderzoekt $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ via Taylor van f en g

en je vindt $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{27}x^3$ + hogere orde.

$g(x) = 27x^2 + \frac{1}{2}x^3$ + hogere orde.

dan is $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{2}x^2 + \text{hogere orde}}{27x^2 + \text{hogere orde}}$

GEEL ☐ 54

BLAUW ☐ $13\frac{1}{2}$

ROOD ☐ $\frac{2}{27}$

ZWART ☐ $\frac{1}{54}$