Reeksen § 9.6

Veelterm: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_n x^n$ met $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$ eindige som.

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Reeks: machtreeks $a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots$ met $a_k \in \mathbb{R}$.

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

oneindige som

Let op: een oneindige sommatie kan zich onverwacht gedragen.

Vb: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2\pi x)}{k^2\pi}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}$

Wat er precies allemaal kan, is stof voor (Inf; B, F&R)

②

Taylorveelterm $\rightarrow$ Taylorreeks steunpunt 0 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$

VB: rat. fie $\frac{1}{1+x}$ staartdelen geeft $\boxed{1-x+x^2-x^3+\dots}$ $= \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$

niet gedef. in $x=-1$

$x=-1$ ↓

$1+1+1+1\dots = \infty$ divergent

maar voor $|x|<1$ gaat het goed

(? Kan dat zomaar?)

$\int \frac{dx}{1+x} = \log|x+1|$

primitiveer

$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$

dit is toevallig precies de Taylorreeks van $\log|1+x|$

<u>VB:</u> $\frac{1}{1+x^2}$ staartdelen $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$

$$\downarrow \text{prim.} \qquad\qquad\qquad \downarrow \text{prim.}$$

arctan x $\qquad x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$

Hee, dit is Taylorreeks van arctan!

<u>VB:</u> Stel $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots$

Diff: $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = f(x)$

Bovendien: $f(0) = 1$

Conclusie: $f(x) = e^x$ (want andere f-ies zijn er niet met $f' = f$ en $f(0) = 1$)

- We weten: $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$, $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~

Controleer dit voor $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ en $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

Ga vervolgens ook na:

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \cos x + i \sin x$$

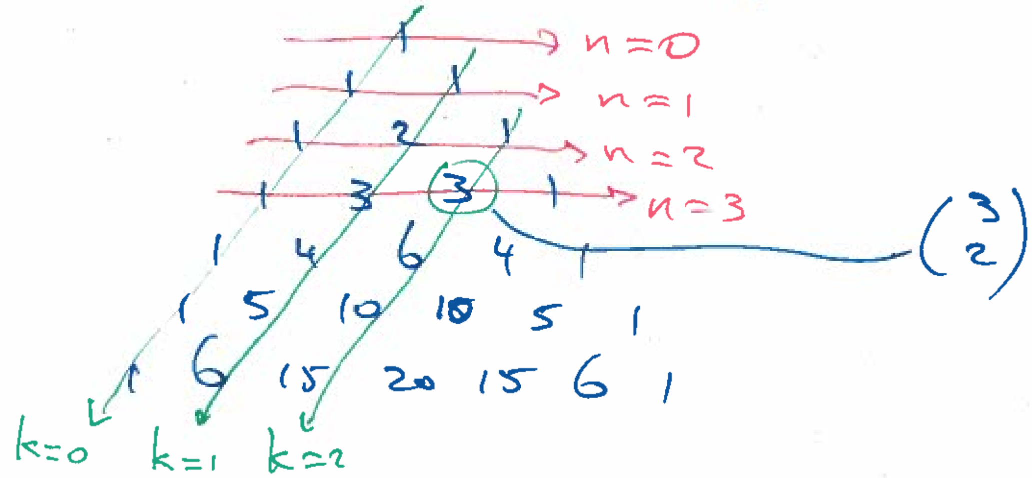
Binomiaalformule: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ waarin $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

'enn overr kaa"

binomiaal coëfficiënten

$n \in \mathbb{N}$

$$\left(\begin{array}{l} n! = n(n-1)! \\ 0! = 1 \text{ (perdef.)} \end{array} \right)$$



$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}x^3 \ldots + x^n$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}$$

en dan breekt het af.

Dit werkt ook met $n \in \mathbb{Q}$:

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2\cdot 3}x^3 + \ldots$$

$$= \boxed{1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 + \ldots}$$

dit breekt niet af

maw: een oneindige sommatie

Taylorreeks van $\sqrt{1+x}$

⑥

$\mathbb{N}$. "Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk" Kronecker 1823 – 1891

$+ \quad \times \qquad - \text{↯} \qquad \div \text{↯}$

(infinitesimaal rekening.)

$\mathbb{Z}$ uitbreiden met neg. getalle.

$+ \times - \qquad \div \text{↯}$

$\mathbb{Q}$ rationale getallen $\left\{ \frac{p}{q} \text{ met } p.q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0, \text{ equivalentieRelatie} \right\}$

$+ \times - \div$

$\frac{-14}{-7} = 2 \qquad \frac{21}{-12} = -\frac{7}{4}$

maar $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$ uitkomsten van alle convergente reeksen met equivalentierelatie

Vb. $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots$

$\mathbb{Q}$ is aftelbaar $\qquad \mathbb{R}$ is niet aftelbaar
overaftelbaar

$\mathbb{C}$: formeel $\{(x,y)$ met $x,y \in \mathbb{R}\}$ $\qquad$ $1, i$ $\qquad$ 7

optelling $(x,y) + (\xi,\eta) = (x+\xi, y+\eta)$

vermenigv. $(x,y)\cdot(\xi,\eta) = (x\xi - y\eta, x\eta + y\xi)$

"$\mathbb{R}^2$ met extra vermenigv."

prijs die je betaalt: als $w, z \in \mathbb{C}$ dan $w > z$ is niet zinvol.

Bij $\mathbb{C}$ is de ordening weg.

$\mathbb{H}$: Quaternionen (Hamilton) $\qquad$ $1, i, j, k$ $\qquad$ rotaties

viertallen $a + bi + cj + dk$

$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k = -ji \quad jk = i = -kj$ etc

prijs: quaternionenproduct is niet commutatief. $\alpha\beta \neq \beta\alpha$

$\mathbb{O}$: Octonionen

achttallen $\quad$ prijs: $\alpha(\beta\gamma) \neq (\alpha\beta)\gamma$

Het stopt nu.

Blok 2

LiAL. geen infi A nodig wel WiW

vectoren, matrices verband tussen algebra, meetk.

"lineair" als in lin. d.v.

$$\int a f(x) + b g(x)\, dx = a \int f(x)\, dx + b \int g(x)\, dx$$

Kans&Stat.

Kans: je kent de kansen, probeer iets te zeggen over de uitkomsten.

Stat: je kent de uitkomsten, probeer iets te zeggen over de kansen.

Infi nodig; veel sommaties

$$P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$ standaard normale verdeling

$$1 = P(X < \infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt \rightarrow$$ bewijs in Infi B

blok. 3.

InfiB ~~en~~ is Infi A maar dan in $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ diff. int.

integraalstelling $\longrightarrow$ $$\iiint_{bol} \operatorname{div} \vec{F}\, dV = \iint_{\text{opp bol.}} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

$\downarrow$

noodzakelijk voor natuurkunde

stroming, elektromagn, Maxwell

Inleiding Meetkunde

voorkennis ~~[illegible]~~ LiAL (+ WiW)

redelijk abstract, maar niet te

blok.4 Analyse best te doen als je het goed bijhoudt.

voorkennis: InfiA+B, WiW, (LiAl)

$\boxed{\text{THT aug. 2019}}$

Hogere jaren

Functies & Reeksen:

Fourierreeksstransf.

f periodiek $f(x) = a_0 \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx.$$

+ Inf + LiAL eigenlijk: LiAL in $\mathbb{R}^\infty$

$\mathbb{C}$ functies

valt veel op z'n plek.

$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$ complex dwz $z \in \mathbb{C}$

$\Gamma(n) = (n-1)!$ als $n \in \mathbb{N}$.

Getaltheorie

Complexe integraal $\frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\, dt = \prod_{p \text{ priem}} \frac{1}{1-p^{-z}}$ over priemgetallen

Topologie

"meetkunde zonder afstand"

met continuiteit

$$X \xrightarrow{f} Y$$

f is continu als $f^{-1}(U)$ open verz. is in X voor elke open verz. U in Y.

In $\mathbb{R}$:
f is cont in a als $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$