Infi A

toets 2, di 16 okt 2018

Aanwijzingen

- Geef een (korte) verklaring bij alle uitwerkingen
- Werk rustig, netjes en duidelijk.
- Zorg dat je uitwerking maar één interpretatie toelaat.
- Alle informatie op dit opgavenblad mag bij alle (deel)opgaven gebruikt worden.
- Gebruik van elektronica of naslagwerken is niet toegestaan.
- Alle vragen tellen even zwaar.
- **Tijd:** de toets zou in 30 minuten goed te maken moeten zijn. Iedereen krijgt 40 minuten; om logistieke redenen is het niet mogelijk om alleen bepaalde individuen extra tijd te geven.

1. Bepaal de bepaalde integraal **zonder** primitieven te gebruiken:

$$\int_{-2}^{2} 8 - \sqrt{16x^2} + \arctan(24x)\,\mathrm{d}x.$$

Oplossing: Zoals we weten is $\arctan x$ een oneven functie en dus is ook $\arctan(24x)$ oneven; het integratie-interval $[-2, 2]$ ligt symmetrisch om 0 dus de netto bijdrage van de arctan-term aan de integraal is 0.

Van het resterende deel van de integrand merken we op dat $8 - \sqrt{16x^2} = 8 - 4|x|$; de grafiek hiervan op het integratie-interval is precies een driehoek met hoekpunten $(-2, 0)$, $(0, 8)$, en $(2, 0)$: dit is een driehoek met basis 4 en hoogte 8 en deze heeft oppervlakte $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 16$.

De waarde van de bepaalde integraal is dus 16.

Opmerking: je kunt desgewenst ook de integraal over de termen 8 en $4|x|$ apart beschouwen als resp. een rechthoek en twee driehoekjes. Het is wel echt ***fout*** *(en niet een rekenfoutje) om $\sqrt{16x^2} = 4x$ zonder absolute waarde te nemen.*

2. Beschouw de d.v. $y' = -7y(y - 3)$ met beginwaarde $y(0) = 4$.
Bepaal $\lim_{t\to\infty} y(t)$.
Hint: dit kan zonder de d.v. op te lossen, maar het mag ook met (is wel meer werk).

Oplossing: Allereerst merken we op dat volgens de d.v. geldt: $y' = 0$ als $y = 0$ of als $y = 3$. Dit zijn dus twee evenwichtswaarden voor y. In het beginpunt hebben we $y(0) = 4$ en daarbij dus $y'(0) = -7 \cdot 4 \cdot (4 - 3) = -28$.

Dit betekent dat y aanvankelijk zal dalen. Aangezien de veelterm $-7y(y-3) < 0$ voor alle $y > 3$ zal y blijven dalen richting de evenwichtswaarde $y = 3$. We kunnen hieruit concluderen dat $\lim_{t\to\infty} y(t) = 3$.

3. Geef een rationale benadering van $\sqrt{47}$ met behulp van een linearisering van $\sqrt{x}$ in steunpunt 49.

Oplossing: De linearisering (of eerste orde Taylorbenadering) van een functie f in steunpunt a wordt gegeven door

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

In dit geval hebben we $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 49$, $f(a) = 7$ en $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{14}$. Dit geeft

$$P_1(x) = 7 + \tfrac{1}{14}(x - 49),$$

en dus $P_1(47) = 7 - \frac{2}{14} = 6\frac{6}{7}$. Een rationale benadering van $\sqrt{47}$ is dus $6\frac{6}{7}$.

Opmerking: wie per ongeluk uitkomt op $7\frac{1}{7}$ of een ander getal groter dan 7 moet in staat zijn om zelf te signaleren dat er iets fout is gegaan! Idem wie uitkomt op een getal kleiner dan 6.

4. Stel dat de d.v. $y'' + py' + y = x^q$ als homogene oplossing $y_H = (a + bx)e^{\lambda x}$ heeft. Bepaal precies twee onbekenden in deze opgave.
Hint: als je uitkomt op een keuze, mag je de fysisch meest relevante optie kiezen.

Oplossing: De gegeven vorm van de homogene oplossing komt alleen voor in het geval van kritische demping. Dit betekent dat de karakteristieke vergelijking $\lambda^2+p\lambda+1 = 0$ discriminant 0 moet hebben: d.w.z., er moet gelden $p^2 - 4 = 0$ en dus $p = 2$ ($p = -2$ zou eventueel ook kunnen maar is fysisch niet relevant, dan zou het systeem negatieve disspiatie ondervinden). Bij deze waarde van p heeft de karakteristieke vergelijking precies één oplossing namelijk $\lambda = -\frac{p}{2} = -1$. We hebben nu twee onbekenden bepaald, namelijk $p = 2$ en $\lambda = -1$.

Opmerking over de andere onbekenden: a en b hangen af van de beginwaarden maar die zijn niet gegeven; dus a en b zijn niet te bepalen. Evenzo is q niet te bepalen omdat we niets weten van een particuliere oplossing. Aan de homogene oplossing zien we dat x de onafhankelijke variabele is: die moet je dus sowieso niet willen bepalen, evenmin als de functie $y = y(x)$.