Infi A tentamen 8 nov 2018
13:30 – 16:30

Aanwijzingen

- Motiveer alle antwoorden.
- Werk rustig, netjes en duidelijk.
- Zorg dat je uitwerking maar één interpretatie toelaat.
- Alle informatie op dit opgavenblad mag bij alle (deel)opgaven gebruikt worden.
- Gebruik van elektronica of naslagwerken is niet toegestaan.
- Totaal 42 punten.

1. Bereken modulus en argument van $\left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^5$. 2 pt.

2. Benader $\arcsin \frac{1}{3}$ met behulp van de derde-orde Taylorveelterm van $\arcsin x$ met steunpunt 0. Leid de veelterm zelf af met de algemene Taylorformule. 4 pt.

3. We bekijken de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met 4 pt.

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin(x^3) & \text{als } x \neq 0, \\ 1 & \text{als } x = 0. \end{cases}$$

Bepaal alle $a \in \mathbb{Z}$ waarvoor f continu is.

4. a. Gebruik de limietdefinitie van differentiëren om $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ te bepalen. 2 pt.

   b. Onderzoek $\lim_{x\to 0+} (\mathrm{e}^x - 1)\log x$. 2 pt.
   Hint: gebruik opgave a.

5. Differentieer $\log(\sqrt{x^2+1} + x)$ en vereenvoudig het antwoord zo ver mogelijk. 2 pt.

6. Primitiveer $\frac{x+9}{\sqrt{x^2+9}}$. 4 pt.

7. Bereken $\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1 - \cos(2x)}\,\mathrm{d}x$. 4 pt.

8. a. Laat zien dat deze dubbel-oneigenlijke integraal convergent is: 4 pt.

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} \log x \,\mathrm{d}x$$

b. Toon aan: 4 pt.

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} \log x \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \log(\log \frac{1}{x}) \,\mathrm{d}x,$$

waarbij je mag aannemen dat beide integralen convergent zijn.

9. Los het beginwaardeprobleem op. 6 pt.
Druk je integratieconstanten uit in de constanten a, b, c en k.

$$\begin{aligned} y'' &= c + k^2 y, \\ y(0) &= a, \\ y'(0) &= b. \end{aligned}$$

Een hint voor particuliere oplossing lijkt me in dit geval niet nodig.

10. Van een zekere functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ weten we: 4 pt.

- f is tweemaal differentieerbaar en f'' is continu,
- $f(\frac{\pi}{4}) = f'(\frac{\pi}{4})$,
- $|f(x)| < \frac{1}{x^2}$ voor $x \in (\mathrm{e}^\mathrm{e}, \infty)$
- $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$, en
- $\displaystyle\int_{\pi/4}^\infty f(x) \sin x \,\mathrm{d}x = 2018.$

Bereken $\displaystyle\int_{\pi/4}^\infty f''(x) \sin x \,\mathrm{d}x.$