

Inleveropgave 3: de $\tan \frac{t}{2}$ -substitutie

Infi A okt 2018

Met de $\tan \frac{t}{2}$ -substitutie is het mogelijk om allerlei goniometrische integralen om te zetten in integralen van rationale functies. De werking berust op een combinatie van verdubbelingsformules en goed gekozen algebraïsche manipulaties. In de opgaven hieronder werk je eerst uit hoe de substitutie werkt, en daarna pas je hem toe op $\int \sec t dt$.

Dit soort werk moet je goed leren uitvoeren. Het gaat hier echt om de vaardigheid; het heeft totaal geen zin om deze substitutie uit je hoofd te leren.

Schrijf eerst, voor je aan de opgaven begint, voor jezelf de verdubbelingsformules op. Voor de cosinus zijn er drie vormen: geef ze alledrie.

$$\begin{aligned}\sin 2\xi &= \dots \\ \cos 2\xi &= \dots = \dots = \dots\end{aligned}$$

Dit hoeft niet bij je uitwerking van de inleveropgave te komen. Je hoort deze formules paraat te hebben, of op z'n minst hoor je ze zelf te kunnen afleiden met de Stelling van De Moivre of $e^{2\xi i}$.

1. Laat zien dat

$$\cos^2 \xi = \frac{1}{1 + \tan^2 \xi}, \quad (1)$$

en

$$\sin 2\xi = 2 \tan \xi \cos^2 \xi. \quad (2)$$

Strikt genomen gelden deze formules alleen als $\cos \xi \neq 0$, maar deze beperking is verder niet zo belangrijk en mag je negeren. We gaan nu uitzoeken hoe de substitutie $u = \tan \frac{t}{2}$ werkt bij integratie.

2. Druk $\cos t$, $\sin t$ en $\tan t$ uit als rationale functies van u . Geef je drie antwoorden elk als één breuk. Hint: gebruik een verdubbelingsformule en opgave 1 met $\xi = \frac{1}{2}t$.
3. Als we deze substitutie willen gebruiken bij het primitiveren dan hebben we ook een verband tussen du en dt nodig. Vind dit verband, en schrijf het in de vorm $dt = \dots du$ waarbij op de stippels een functie van u staat.

4. **Toepassing:** Gebruik de voorgaande substitutie om de onbepaalde integraal $\int \frac{dt}{\cos t}$ te herschrijven als een integraal van een rationale functie. Primitiveer die, en laat daarmee zien dat $\log \left| \frac{1}{\cos t} + \tan t \right|$ een primitieve is van $\frac{1}{\cos t}$.

Hint: aan het eind, bij het terugsubstitueren helpt het volgende (wat je nog wel moet aantonen):

$$\frac{1+u}{1-u} = \frac{1+u^2}{1-u^2} + \frac{2u}{1-u^2}.$$

5. Controleer je primitieve door differentiëren.