

Infi A oefententamen χ

Aanwijzingen

- Motiveer alle antwoorden.
- Werk rustig, netjes en duidelijk.
- Zorg dat je uitwerking maar één interpretatie toelaat.
- Alle informatie op dit opgavenblad mag bij alle (deel)opgaven gebruikt worden.
- Gebruik van elektronica of naslagwerken is niet toegestaan.
- Totaal 48 punten.

1. Zij $z = e^{ix}$. Laat zien dat $\frac{z^2 - z + 1}{z}$ reëel is. 4 pt.
2. Vereenvoudig $\tan(\arccos x)$. *Hint: maak een plaatje.* 4 pt.
3. Laat zien dat $f(x) = \log(\sqrt{x^2 + 1} - x)$ een oneven functie is. 4 pt.
4. Laat zien dat het vierde orde Taylorpolynoom met steunpunt 0 van $\sqrt{1 - x^2}$ gelijk is aan $1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4$, en geef hiermee een rationale benadering van $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.
Hint: let op, kies x goed! 4 pt.
5. Onderzoek of $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 3 \cos(2\sqrt{x+1})}{5 - 6x}$ bestaat: indien ja, bepaal de limietwaarde; indien nee: maak duidelijk waarom niet. 4 pt.
6. Zij $y(x) = (\sqrt{x})^{\sin x}$ voor $x > 0$. Bepaal $y'(x)$. 4 pt.
7. Evalueer de volgende integralen:
 - a. $\int_t^\infty te^{-tx} dx$ 4 pt.
 - b. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}} dx$ 4 pt.
 - c. $\int x \arctan(2x) dx$ 4 pt.

8. Los het volgende beginwaardeprobleem op:

6 pt.

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x &= e^{-3t}, \\ x(0) &= 0, \\ \dot{x}(0) &= 4.\end{aligned}$$

Hint: voor de particuliere oplossing kun je een veelvoud van de inhomogene term proberen.

9. Zij f een polynoom van graad $2n$. We definiëren de functie g als

$$g(x) = f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) - f^{(6)}(x) \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x);$$

de even afgeleides van f worden dus beurtelings afgetrokken en opgeteld.

a. Laat zien dat $g(x) + g''(x) = f(x)$.

2 pt.

Hint: heeft niets met d.v.'s te maken!

b. Laat zien dat $\frac{d}{dx}(g'(x) \sin x - g(x) \cos x) = f(x) \sin(x)$.

2 pt.

c. Laat zien dat $\int_0^\pi f(x) \sin x \, dx = g(0) + g(\pi)$.

2 pt.