

Infi A oefententamen ψ

Aanwijzingen

- Motiveer alle antwoorden.
- Werk rustig, netjes en duidelijk.
- Zorg dat je uitwerking maar één interpretatie toelaat.
- Alle informatie op dit opgavenblad mag bij alle (deel)opgaven gebruikt worden.
- Gebruik van elektronica of naslagwerken is niet toegestaan.
- Totaal 48 punten.

1. Geef de complex geconjugeerde van $\frac{1}{-2i^{50} + i^{11}}$ in de vorm $a + bi$. 4 pt.
2. Zij f een differentieerbare functie met $f(2) = 2$ en $f'(2) = 3$. 2 pt.
Bepaal $\left. \frac{d}{dx}(f(f(f(x)))) \right|_{x=2}$.
3. Bepaal de afgeleide van $f(x) = \int_0^x e^{-t^2/2} dt$. 2 pt.
4. Onderzoek of de grafiek van $y = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ horizontale en/of verticale asymptoten heeft. 4 pt.
5. Laat middels een Taylorpolynoom met steunpunt 0 van $\log \frac{1+x}{1-x}$ zien dat $\log 2 \approx \frac{56}{81}$. *Hints: Tayloren kan hier naar keuze met veel of weinig werk, en let op dat je een verstandige x kiest!* 6 pt.
6. Bereken $\int_0^\infty \frac{dx}{(4+x)\sqrt{x}}$. 4 pt.
7. Evalueer $\int \frac{4x^2 + 2x + 4}{x^3 - 8} dx$. 4 pt.
Hint: laat zien dat $4x^2 + 2x + 4 = (x-2)(2x+2) + 2(x^2 + 2x + 4)$, en factoriseer de noemer.
8. a. Zij $a > 0$ gegeven. Bepaal $\int_{-a}^a \frac{x}{2 - e^{-x^4}} dx$. 4 pt.
b. Onderzoek of $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{2 - e^{-x^4}} dx$ bestaat. 4 pt.

9. Los de d.v. $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{y}$ met beginwaarde $y(0) = 2$ op. 6 pt.

10. We definiëren een familie functies $u_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ als volgt:

$$\begin{aligned}u_0(x) &= 1, \text{ constante functie,} \\u_1(x) &= 2x, \text{ en} \\u_{n+1}(x) &= 2xu_n(x) - u_{n-1}(x) \text{ als } n \geq 1.\end{aligned}$$

a. Laat zien dat $u_2(x) = 4x^2 - 1$ en bereken zelf $u_3(x)$. 2 pt.

b. Men beweert dat voor alle n geldt: 2 pt.

$$u_n(\cos \varphi) = \frac{\sin((n+1)\varphi)}{\sin \varphi}.$$

Laat zien dat deze bewering klopt voor $n = 0$ en $n = 1$.

c. Neem aan dat u_n en u_{n-1} de genoemde eigenschap hebben. Laat zien dat u_{n+1} hem dan ook heeft. 4 pt.

Hint: Probeer eerst op klad totdat je ziet hoe het werkt.