Infi A oefententamen χ

Aanwijzingen

- Motiveer alle antwoorden.
- Werk rustig, netjes en duidelijk.
- Zorg dat je uitwerking maar één interpretatie toelaat.
- Alle informatie op dit opgavenblad mag bij alle (deel)opgaven gebruikt worden.
- Gebruik van elektronica of naslagwerken is niet toegestaan.
- Totaal 48 punten.

1. Zij $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$. Laat zien dat $\dfrac{z^2 - z + 1}{z}$ reëel is. 4 pt.

Solution: Dit kan op verschillende manieren. We gebruiken dat $z = \cos x + \mathrm{i}\sin x$, $|z| = 1$ (punt op eenheidscirkel) en $\frac{1}{z} = \bar{z} = \cos x - \mathrm{i}\sin x$ (elementaire regels van exponenten, en definitie van conjugeren). De breuk kunnen we vereenvoudigen tot $z - 1 + \frac{1}{z}$; maar aangezien $1/z = \bar{z}$ geldt $z + 1/z - 1 = z + \bar{z} - 1 = 2\cos x - 1$; dit is reëel als $x \in \mathbb{R}$ (wat hier ongetwijfeld bedoeld was).

2. Vereenvoudig $\tan(\arccos x)$. *Hint: maak een plaatje.* 4 pt.

Solution: Teken een rechthoekige driehoek met schuine zijde 1, horizontale rechthoekszijde x, en noem de daartussen ingesloten hoek φ. Dan geldt $\cos\varphi = x$ oftewel $\arccos x = \varphi$. Met de stelling van Pythagoras vinden we de overstaande rechthoekszijde $\sqrt{1 - x^2}$. We concluderen $\tan\arccos x = \tan\varphi = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, naar smaak eventueel nog te schrijven als $\sqrt{1/x^2 - 1}$.

3. Laat zien dat $f(x) = \log(\sqrt{x^2+1} - x)$ een oneven functie is. 4 pt.

Solution: Voor een oneven functie f geldt dat $f(-x) = -f(x)$. In dit geval hebben we

$$-f(x) = -\log(\sqrt{x^2+1} - x)$$

wegens de elementaire eigenschappen van log is dit gelijk aan

$$\log \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x}$$

door “creatief nietsdoen”’ is dit

$$\log\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$$

hetgeen vereenvoudigt tot

$$\log\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{1}$$
$$= f(-x),$$

hetgeen te bewijzen was.

4. Laat zien dat het vierde orde Taylorpolynoom met steunpunt 0 van $\sqrt{1-x^2}$ gelijk is aan $1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4$, en geef hiermee een rationale benadering van $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. *Hint: let op, kies x goed!* 4 pt.

Solution: Je kunt het Taylorpolynoom verifiëren op twee manieren:

- hetzij door $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ te stellen, deze functie viermaal differentiëren, en evalueren in 0;
- hetzij, met wat minder werk, door $g(u) = \sqrt{1-u}$ te stellen; tweemaal differentieren en evalueren in 0 geeft het Taylorpolynoom $g(0)+g'(0)u+\frac{1}{2}g''(0)u^2$, neem hierin $u = x^2$ en je hebt het Taylorpolynoom van de opgave.

In beide gevallen: merk op dat $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; we moeten het polynoom dus uitrekenen in $x = \frac{1}{2}$ en vinden dan als benadering

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1-\frac{1}{8}-\frac{1}{128} = \frac{111}{128}.$$

5. Onderzoek of $\lim_{x\to\infty}\frac{4x-3\cos(2\sqrt{x+1})}{5-6x}$ bestaat: indien ja, bepaal de limietwaarde; indien nee: maak duidelijk waarom niet. 4 pt.

Solution: Allereerst merken we op dat voor $x > 0$ geldt:

$$-\frac{4x+3}{6x-5} \leq \frac{4x-3\cos(2\sqrt{x+1})}{5-6x} \leq -\frac{4x-3}{6x-5}.$$

Vervolgens merken we op dat

$$\lim_{x\to\infty} -\frac{4x \pm 3}{6x-5} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}.$$

Volgens de insluitstelling is dan ook $\lim_{x\to\infty} \frac{4x-3\cos(2\sqrt{x+1})}{5-6x} = -\frac{2}{3}$.

6. Zij $y(x) = (\sqrt{x})^{\sin x}$ voor $x > 0$. Bepaal $y'(x)$. 4 pt.

Solution: We schrijven $y = x^{\frac{1}{2}\sin x}$ en passen logaritmisch differentiëren toe:

$$\log y = \frac{1}{2}\sin x \log x,$$

zodat

$$y'/y = \frac{1}{2}(\cos x \log x + \frac{\sin x}{x}),$$

oftewel

$$y' = \frac{1}{2}(\sqrt{x})^{\sin x}(\cos x \log x + \frac{\sin x}{x}).$$

7. Evalueer de volgende integralen:

a. $\displaystyle\int_t^\infty t\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}x$ 4 pt.

Solution: Let op, t fungeert hier als een constante! Je krijgt dus (mits $t \neq 0$) de primitieve $-\mathrm{e}^{-tx}$; bij het evalueren moeten we onderscheid maken tussen

$t > 0$: dan $\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-tx} = 0$ en dus $\int_t^\infty t\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}x = +\mathrm{e}^{-t^2}$;

$t = 0$: we integreren de nulfunctie tussen twee grenzen, antwoord 0;

$t < 0$: dan $\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-tx} = +\infty$ zodat de integraal divergent is.

Als je het geval $t > 0$ goed hebt gedaan en de andere mogelijkheden over het hoofd zag dan levert dat niet veel aftrek op.

b. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}\,\mathrm{d}x$ 4 pt.

Solution: Als we hier $x = \sqrt{2}\sin u$, $\mathrm{d}x = \sqrt{2}\cos u\,\mathrm{d}u$ substitueren dan krijgen we

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2\cos^2 u}{\sqrt{2}\cos u}\sqrt{2}\cos u\,\mathrm{d}u \\ &= \int 2\cos^2 u\,\mathrm{d}u \\ &= \int 1+\cos 2u\,\mathrm{d}u \\ &= u + \tfrac{1}{2}\sin 2u + c.\end{aligned}$$

Voor het terugsubstitueren gebruiken we $u = \arcsin(x/\sqrt{2})$ en

$$\sin 2u = 2\sin u\cos u = (\sqrt{2}\sin u)\sqrt{2-2\sin^2 u} = x\sqrt{2-x^2},$$

zodat $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(\frac{1}{2}\sqrt{2}x) + \frac{1}{2}x\sqrt{2-x^2} + c.$

c. $\int x\arctan(2x)\,\mathrm{d}x$ 4 pt.

Solution: Partieel integreren geeft

$$\int x\arctan(2x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}x^2\arctan(2x) - \tfrac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x.$$

De nieuwe integrand is een rationale functie die we eerst vereenvoudigen:

$$\frac{x^2}{1+4x^2} = \frac{\frac{1}{4}(1+4x^2-1)}{1+4x^2} = \tfrac{1}{4} - \frac{\frac{1}{4}}{1+4x^2}$$

zodat

$$\int \frac{x^2}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{8}\arctan(2x)$$

en dus

$$\int x\arctan(2x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}x^2\arctan(2x) - \tfrac{1}{8}x + \tfrac{1}{16}\arctan(2x) + c.$$

8. Los het volgende beginwaardeprobleem op: 6 pt.

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = \mathrm{e}^{-3t},$$
$$x(0) = 0,$$
$$\dot{x}(0) = 4.$$

Hint: voor de particuliere oplossing kun je een veelvoud van de inhomogene term proberen.

Solution: Dit is een tweede orde lineaire d.v. met constante coëfficiënten en een inhomogene term. We lossen dus eerst het homogene probleem op met behulp van de karakteristieke vergelijking

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0,$$

met als dubbele oplossing $\lambda = -2$. Dit betekent dat de oplossing van het homogene probleem bestaat uit alle functies

$$x_H(t) = (a + bt)\mathrm{e}^{-2t}$$

met a en b constanten. Om een particuliere oplossing te vinden, doen we wat de hint zegt: we proberen $x_P(t) = c\mathrm{e}^{-3t}$. Deze invullen in de d.v. geeft:

$$c(9 - 3 \cdot 4 + 4)\mathrm{e}^{-3t} = \mathrm{e}^{-3t},$$

oftewel $c(9 - 12 + 4) = 1$, dus we moeten $c = 1$ nemen. De algemene oplossing van de d.v. is dus

$$x(t) = (a + bt)\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-3t}.$$

Tot slot vullen we de randwaarden in om a en b te vinden:

$$0 = x(0) = a + 1,$$
$$4 = \dot{x}(0) = b - 2a - 3.$$

Dus $a = -1$ en $b = 4 - 2 + 3 = 5$. De oplossing van het beginwaardeprobleem is dus

$$x = (5t - 1)\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-3t}.$$

9. Zij f een polynoom van graad $2n$. We definiëren de functie g als

$$g(x) = f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) - f^{(6)}(x) \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x);$$

de even afgeleides van f worden dus beurtelings afgetrokken en opgeteld.

a. Laat zien dat $g(x) + g''(x) = f(x)$. 2 pt.
Hint: heeft niets met d.v.'s te maken!

Solution: Tweemaal diff van g geeft

$$g''(x) = f''(x) - f^{(4)}(x) + f^{(6)}(x) - \cdots + (-1)^{n-1} f^{(2n)}(x) + (-1)^n f^{(2n+2)}(x).$$

Maar f is een polynoom van graad $2n$, dus $f^{2n}(x)$ is constant en alle hogere afgeleides zijn identiek nul: de laatste term die we hebben opgeschreven bij g'' verdwijnt dus. Nu volgt direct dat $g(x)+g''(x) = f(x)$, immers alle overgebleven afgeleides worden eenmaal opgeteld en eenmaal afgetrokken.
Hier is echt enorm veel geblunderd! Allerlei vormen van "wishful thinking" zijn uitgeprobeerd om van het bestaan van de laatste term in g'' af te komen. Slechts een enkeling heeft begrepen dat de woordjes "polynoom van graad $2n$" er niet voor niets staan. . . .

b. Laat zien dat $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(g'(x)\sin x - g(x)\cos x\big) = f(x)\sin(x)$. 2 pt.

Solution: Er geldt:

$$\begin{aligned}(g'(x)\sin x - g(x)\cos x)' &= g''(x)\sin x + g'(x)\cos x - g'(x)\cos x + g(x)\sin x \\ &= (g''(x) + g(x))\sin x \\ &= f(x)\sin x,\end{aligned}$$

wegens (a.).

c. Laat zien dat $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = g(0) + g(\pi)$. 2 pt.

Solution: Toepassen van de Hoofdstelling en onderdeel (b.) geeft:

$$\begin{aligned}&\int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x \\ &= g'(x)\sin x - g(x)\cos x\Big|_0^\pi \\ &= -g(\pi)\cos\pi + g(0)\cos 0 = g(0) + g(\pi).\end{aligned}$$