

# Introductie tot maansafstanden

Steven Wepster

1 april 2013

## 1 Principe

De tijd tussen twee nieuwe manen (een zgn. “lunatie”) bedraagt  $\approx 30$  dagen. In die periode beschrijft de maan t.o.v. de sterren een boog van  $\approx 360 + 30 = 390^\circ$  (een volle cirkel plus de beweging van de zon langs de ecliptica in 30 dagen). Dat is per dag gemiddeld  $13^\circ$ , per uur ruwweg  $30'$ , en per minuut ruwweg  $30''$ . Geen enkel ander hemellichaam verandert zo snel van positie.

De “maansafstandenmethode” maakt gebruik van deze snelheid. Het principe van de methode is: meet de positie van de maan t.o.v. de sterren, herleid die meting van het aardoppervlak naar het middelpunt van de aarde, en bereken op welke tijd die positie zich zou moeten voordoen. De uitkomst is onafhankelijk van je positie op aarde; het is dus een universele standaardtijd (GMT, UT, Parijse tijd of Moskoutijd, smaken verschillen). Vergelijken met de plaatselijke tijd van de waarnemer geeft de geografische lengte.

Metafoor: zie de sterren als een wijzerplaat en de maan als de grote wijzer van een klok.

## 2 Nauwkeurigheid

Aangezien we weten dat een lunatie zo'n 30 dagen duurt, zien we direct in dat de maanbeweging (uitgedrukt in hoek) zo'n 30 keer langzamer is dan de aardrotatie. In de praktijk betekent dit dat bij de lengtebepaling met behulp van maansafstanden elke fout in de meting (en in de gebruikte ephemeriden) met een factor 30 opblaast. Concreet: als het lukt om de nauwkeurigheid van de sextant ten volle te benutten, meet je de maansafstand tot maximaal  $0.1'$  nauwkeurig, waardoor de nauwkeurigheid van je lengte op  $3'$  uitkomt. Diverse factoren gooien nog extra roet in het eten: meetfouten, onzekerheden bijv. refractie, afrondfouten, . . . . Al met al mag je in je handen knijpen als de lengte er niet meer dan  $15'$  naast zit.

Die opblaasfactor van 30 maakt de maansafstandenmethode uiterst delicaat. Hij vergt het uiterste van instrument, waarneemvaardigheid, rekenkunst en (althans in vroeger tijden) ephemeriden. Bij het rekenwerk zijn dan ook veel meer correcties nodig dan voor een gewoon sters- of zonsbestek, zoals we verderop zullen zien.

### 3 Historie

Omstreeks 1754 lukte het Tobias Mayer om de maanbeweging te voorspellen tot op zo'n 0.5', en in 1762 werd de sextant ontwikkeld expliciet voor het nemen van maansafstanden. Een zuinige navigator gebruikte voor alle overige waarnemingen een goedkopere, veelal houten, octant en hield z'n sextant zo ver mogelijk uit de buurt van zoute spray. NB: bij gewone hoogtemetingen kom je nooit hoeken groter dan  $90^\circ$  tegen; bij maansafstanden wel! De *Nautical Almanac* verscheen voor het eerst in 1767 en dankt z'n bestaan ook al aan de maansafstandenmethode: dankzij de voorberekende maansafstanden die erin stonden, kon het rekenwerk verkort worden van 4 uur tot  $\frac{1}{2}$  uur. In dezelfde periode kwam de H4 van John Harrison gereed. Maar massaproductie van klokken was nog niet mogelijk; tabellen en sextanten waren veel eenvoudiger in grote hoeveelheden te produceren. Maansafstanden hebben dan ook een rol gespeeld tot ver in de 19e eeuw, en de voorberekende tabellen stonden in de *Nautical Almanac* totdat radiotijdsignalen (1905) ze overbodig maakten.

### 4 De meting

Eerst even een mogelijk misverstand uit de weg ruimen: lengtebepaling met maansafstanden vereist wel degelijk een klok. De klok hoeft echter niet erg goed te zijn. Een ongeijkt veeruurwerk volstaat. Bij het oefenen is het wel fijn om een goede chronometer te gebruiken, al was het maar om te beoordelen of het al wil lukken.

Met oog op de hieronder te bespreken correcties hebben we minimaal 3 waarnemingen nodig:

1. een maansafstand: hoek  $d_s$  tussen de maan  $\mathcal{D}$  en een ander hemellichaam  $P$ ;
2. de hoogte  $h_{\mathcal{D}s}$  van  $\mathcal{D}$ ;
3. de hoogte  $h_{Ps}$  van  $P$ .

De hoogtes moeten gelijktijdig met de maansafstand gemeten worden. Op overdadig bemande marineschepen was dat geen probleem. De jachtnavigator moet zich behelpen met een van de volgende twee alternatieven:

1. meet de hoogten zowel voor als na de maansafstand en interpoleer, of
2. gebruik een (geschatte) tijd en gispositie om de hoogten te berekenen.

Merk op: beide alternatieven vereisen een vorm van uurwerk. Alternatief 1 vereist bovendien dat de middelste waarneming (de maansafstand) vlot genomen wordt, anders worden de tijdsintervallen groter dan een paar minuten en dan kan je de hoogtes niet meer probleemloos interpoleren. De juiste volgorde is:  $h_{Ps}$ ,  $h_{\mathcal{D}s}$ ,  $d_s$ ,  $h_{\mathcal{D}s}$ ,  $h_{Ps}$ . Alternatief 2 *lijkt* op "smokkelen" maar dat valt best mee, te meer daar de hoogtes er niet heel erg op aan komen (en dus de gebruikte tijd ook niet). Om te oefenen zou ik

alternatief 2 aanbevelen. Dit heeft als bijkomend voordeel dat je in de achtertuin niet hoeft te modderen met een kunstmatige horizon.

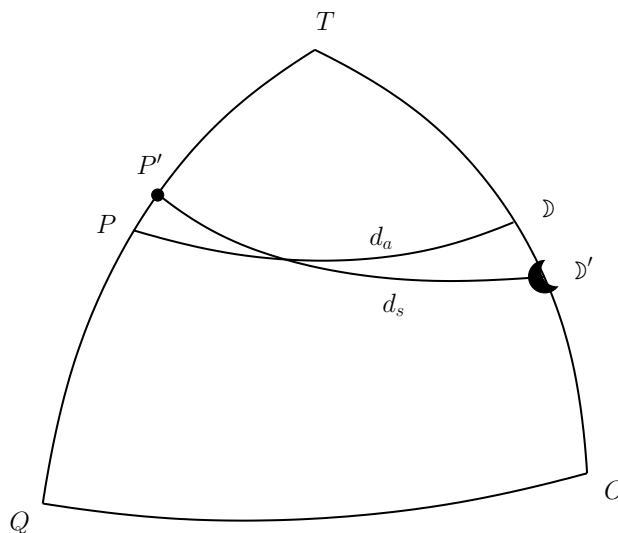
Enkele losse opmerkingen die me te binnen schieten mbt het meten van de maansafstand.

- Over de voorberekende tabellen: de dagen rondom nieuwe maan ontbreken (geen waarneming mogelijk). De hemellichamen  $P$  zijn geselecteerd dichtbij de ecliptica (optimaal gebruik van de  $\mathfrak{D}$  snelheid).  $+$  betekent toenemende hoek,  $P$  staat westelijk van  $\mathfrak{D}$ ;  $-$  betekent afnemende hoek,  $P$  oost van  $\mathfrak{D}$ . Als het er echt op aan komt doe je een oostelijke en een westelijke maansafstand om een aantal systematische fouten uit te middelen.
- Een kleine waarde in de P.L.-kolom in de tabellen (later te bespreken) duidt op een snel veranderende maansafstand, dit komt de nauwkeurigheid ten goede.
- Selecteer een  $P$  uit de tabellen. Ga na of  $P$  en  $\mathfrak{D}$  beide zichtbaar zijn en niet te dicht bij de horizon. Vermijd erg grote hoeken (die zijn lastig uitvoerbaar) en erg kleine hoeken (verlies van relatieve snelheid). Stel de sextant alvast in op de te verwachten hoek.
- Houd de sextant zo vast dat je het helderste object via de spiegels ziet, en het andere via het kimglas. Gebruik zo nodig glaasjes om het licht van  $\mathfrak{D}$  te dimmen. Eventueel de kijker verwijderen totdat je  $P$  en  $\mathfrak{D}$  visueel dicht bij elkaar hebt.
- Breng  $P$  in contact met de verlichte rand van  $\mathfrak{D}$ . “Schommelen” werkt ook hier. Hoek iets te klein/te groot instellen en wachten op het juiste contactmoment is alleen aanbevolen voor atleten en bodybuilders.
- Net als bij stersbestek: noteer zo nauwkeurig mogelijk de tijd van waarneming. Overweeg meerdere metingen te middelen.

## 5 Correcties

In figuur 1 is  $T$  het zenit van de waarnemer. De vertikaalcirkels door  $P$  resp.  $\mathfrak{D}$  snijden een deel  $QO$  van de horizon af. De ware maansafstand (gezien vanuit het middelpunt van de aarde) is  $d_a = \mathfrak{D}P$ ;  $h_{Pa} = QP$  is de ware hoogte van  $P$  en  $h_{\mathfrak{D}a} = O\mathfrak{D}$  is de ware hoogte van  $\mathfrak{D}$ . Doordat de waarnemer aan het oppervlak van de aarde staat en doordat de lichtstralen worden afgebogen in de atmosfeer neemt hij de hoogte van  $P$  te groot waar, en die van  $\mathfrak{D}$  (door de veel grotere parallax) te klein: hij ziet deze hemellichamen in  $P'$  en  $\mathfrak{D}'$ . Hij meet de schijnbare afstand  $d_s = \mathfrak{D}'P'$  tussen de zichtbare randen van  $P'$  en  $\mathfrak{D}'$ , en de schijnbare hoogten  $QP'$  en  $O\mathfrak{D}'$ . De opgave is eerst om de ware afstand  $d_a$  tussen de middens van  $P$  en  $\mathfrak{D}$  te berekenen: in het Engels heet dit “clearing the distance”. Vervolgens kan je met die ware afstand en de voorberekende tabellen de exacte tijd van de waarneming interpoleren.

Zoals eerder opgemerkt: vanwege de vereiste precisie zijn er veel meer correcties nodig dan bij andere astronavigatietechnieken; we willen de precisie zo veel mogelijk op



Figuur 1: Herleiden van schijnbare tot ware maansafstand.

het 0.1' niveau handhaven (dit is de afleesprecisie van de meeste sextanten en de Nautical Almanac). Hieronder een stappenplan.

- Indien hoogtes voor- en achteraf gemeten (alternatief 1 bij de meting) dan deze hoogtes lineair interpoleren naar het moment van de afstandsmeting. Dit vereist dat het totale tijdsinterval tussen eerste en laatste meting niet meer dan zo'n 10 minuten is.
- Op de geïnterpoleerde hoogtes moeten een aantal verbeteringen worden uitgevoerd (zie onder); zijn de hoogten daarentegen *berekend* dan moeten ze met dezelfde correcties “verslechterd” worden om kunstmatige “metingen” te krijgen. Werk daarbij de correcties in omgekeerde volgorde af, van  $h_a$  naar  $h_z$  (zie rekenschema).
- Verbeter alle gemeten hoeken voor *indexfout*, *box correction* (een goede geijkte sextant heeft een correctietabelletje in de kist), en eventuele *persoonlijke fout*.
- Verbeter de hoogtes voor *dip* en *semidiameter SD*. Dip komt op gebruikelijke wijze uit de almanak tab.A2; de *SD* van zon en maan staan onderaan de daily pages.
- Verbeter maanshoogte voor *augmentatie* (dat is de schijnbare vergroting omdat we dichterbij de maan staan dan als we in het aardmiddelpunt waren). Bremiker tab.XI.
- Verbeter maans- en (als  $P = \text{zon}$ ) zonshoogte voor verticale *verkorting* van de *SD*. Oorzaak: lichtstralen van de boven- en onderrand ondergaan verschillende

refractie in de atmosfeer waardoor de zichtbare schijven iets afgeplat lijken. Bij hoogtes boven  $15^\circ$  te verwaarlozen. Bremiker tab.XIV.

- Verbeter ook de maansafstand voor  $SD$  van maan (en evt. zon). Let op (1): optellen of aftrekken afhankelijk van of het contact aan de nabije of afgelegen kant van de maan (en de zon) plaatsvond; dit is een instinker! Let op (2): verkorting in scheve richting, Bremiker tab.XV, verwaarloosbaar behalve bij kleine hoogte.
- De aldus verbeterde hoogtes en afstand zijn gezuiverd van instrumentfouten, horizon, en diameter maar nog niet van refractie en parallax. Voor het vervolg en in het rekenschema noemen we deze hoogtes  $h_{\mathcal{D}z}$  en  $h_{Pz}$  en afstand  $d_z$ .
- Verbeter beide  $h_z$ -hoogten voor *refractie*. **Let op!** De zon's  $SD$  hebben we al verwerkt! Daarom **altijd** de stars&planets kolom van almanak tab.A2 gebruiken, ook voor de zon! Om dezelfde reden ook voor de maan **niet** de alt.corr.tables achterin de almanak gebruiken. Zo nodig **wel** beide hoogtes corrigeren voor niet-standaard atmosfeer (*temp/druk*, almanak tab.A4).
- Als  $P$  is zon of planeet: verbeter  $h_{Pz}$  voor *parallax* (zon  $+0.1'$  tenzij hoger dan  $70^\circ$ , Venus/Mars mbv almanak).
- De *maansparallax* is veel bewerkelijker; door de afplatting van de aarde werkt die niet alleen in de hoogte maar ook iets in het azimuth, en beide hebben effect op de maansafstand. Daarom hieronder een aantal stappen.
- Neem de  $h_{\mathcal{D}z}$  verbeterd met refractie en tel er een correctie bij uit Bremiker tab.XVII. Noem dit  $h^*$ . Let op: deze correctie is alleen nodig voor dit deel van de parallaxberekening, het is geen “echte” correctie op de hoogte.
- Neem de maans  $HP$  van de daily pages (dit is de Equatoriale Horizontale Parallax). Hier komt een kleine correctie op vanwege de afplatting van de aarde: Bremiker tab.XVIII, ingang met breedte en  $HP$ . Deze correctie is altijd negatief. Noem het resultaat  $HP^*$ .
- Reken de parallax in hoogte uit met  $p_h = HP^* \cdot \cos(h^*)$ . Deze  $p_h$  optellen bij de andere correcties op de maanshoogte.
- Nu nog de correctie voor parallax in azimuth: deze rekenen we nu alvast uit maar we passen hem nog niet toe. Eerst tab.XIX, ingang breedte en maansazimuth (geschat), geeft de “Seitenparallaxe” (zijwaartse parallax). Vervolgens geeft tab.XX, ingang zijwaartse parallax en de geschatte hoek  $P' \mathcal{D}'T$  (fig. 1), de correctie  $p_z$  om toe te passen op de maansafstand. Onder de tabel staat een schemaatje om het teken ervan te bepalen.

## 6 Verbeteren van de maansafstand

We zijn nu klaar met alle correcties: we hebben de hoogtes  $h_{\mathcal{D}z}$  en  $h_{Pz}$  verbeterd voor refractie en parallax. De verbeterde hoogtes noemen we  $h_{\mathcal{D}a}$  en  $h_{Pa}$ . We hebben ook een kleine correctie wegens zijwaartse parallax op de maansafstand bepaald, maar we moeten nog uitrekenen hoe de verbeterde hoogtes doorwerken op die afstand (zie fig.1). In navolging van de hierboven reeds gebruikte symboliek, noemen we  $d_a$  de maansafstand die, behalve voor instrumentfouten, dip en  $SD$ , ook verbeterd is voor refractie en parallax. De berekening stoelt op het feit dat de boldriehoeken  $PT\mathcal{D}$  en  $P'T\mathcal{D}'$  gelijke tophoek  $T$  hebben, terwijl 5 van de 6 zijden bekend zijn. De zesde zijde is gevraagd. Afleiding blijft hier achterwege. Er geldt:

$$\cos d_a = \frac{\cos h_{\mathcal{D}a} \cos h_{Pa}}{\cos h_{\mathcal{D}z} \cos h_{Pz}} (\cos d_z + \cos(h_{\mathcal{D}z} + h_{Pz})) - \cos(h_{\mathcal{D}a} + h_{Pa})$$

Deze formule is exact en laat zich programmeren in een rekenmachine. Vroeger gebruikte men verschillende benaderingsmethoden en speciaal ingerichte tabellen om het handmatige rekenwerk beheersbaar te houden.

Merk op dat de zijwaartse parallax  $p_z$  er tot slot nog bij moet (zie rekenschema).

## 7 Interpolatie in de voorberekende tabellen

Met de verbeterde afstand  $d_a$  en de voorberekende maansafstandstabellen kunnen we het tijdstip van de waarneming in UT bepalen. Dit doen we door in de tabel te interpoleren tussen twee opvolgende tijdstippen, de ene met een grotere en de andere met een kleinere maansafstand. Meestal is lineair interpoleren voldoende nauwkeurig maar soms is een tweede-orde correctie noodzakelijk. Om het handmatig interpoleren te vergemakkelijken kun je “proportionele logaritmen” (P.L.) gebruiken; de P.L. van twee opeenvolgende maansafstanden in de tabel  $d_1$  en  $d_2$  is gedefinieerd als  $\log 10800 - \log |d_1 - d_2|$ . Het gebruik hiervan licht ik hier niet verder toe; er staat wel een stukje over op de website.

Lineair interpoleren: Zoek in de tabel naar twee opeenvolgende tijdstippen  $t_1$  en  $t_2$  met bijbehorende maansafstanden  $d_1$  en  $d_2$  waar onze verbeterde afstand  $d_a$  tussenin ligt. Het tijdsverschil  $t_2 - t_1$  is steeds 3 uur of 10800 seconde. We vinden dan het tijdstip van waarnemen  $t_a$ , uitgedrukt in uren, in eerste-orde benadering met de formule

$$t_a = t_1 + 3 \frac{d_a - d_1}{d_2 - d_1}.$$

Tweede-orde correctie: Als de P.L.’s bij de twee tijdstippen  $t_1$  en  $t_2$  sterk verschillen en/of als  $t_a$  nogal middenin het tijdsinterval van 3 uur valt, kan een tweede-orde correctie nodig zijn. Gebruik hiervoor Bremiker tab.I.

## 8 Rekenschema

Op de volgende bladzijde staat een rekenschema.

REKENSHEMA MAANSAFSTANDEN

datum \_\_\_\_\_ 2e object  $P =$  \_\_\_\_\_ situatie: 

E	☾	☽	W
---	---	---	---

☽ azimut \_\_\_\_\_ hoek  $P \text{ ☽} T$  \_\_\_\_\_

tijd a/b  $P$  \_\_\_\_\_ ☽ \_\_\_\_\_  $P \text{ ☽}$ 

_____
-------

 ☽ \_\_\_\_\_  $P$  \_\_\_\_\_  
 $h$  \_\_\_\_\_

Interpoleer hoogtes naar  $P \text{ ☽}$ -tijd

$h_{Ps}$  \_\_\_\_\_  $h_{\text{☽}s}$  \_\_\_\_\_  $d_s$  \_\_\_\_\_

ic+box \_\_\_\_\_  
dip \_\_\_\_\_ Almanak A2  
 $SD$  \_\_\_\_\_ Daily Pages  
augm \_\_\_\_\_ Bremiker XI  
verkort \_\_\_\_\_ Bremiker XIV, XV

$h_{Pz}$ _____	$h_{\text{☽}z}$ _____	$d_z$ _____
----------------	-----------------------	-------------

refr \_\_\_\_\_ A2, altijd \* $P$ -kolom!

atm \_\_\_\_\_ A4

parlx \_\_\_\_\_ ☽  $< 70^\circ: +0.1'$

$h_{Pa}$ _____
----------------

 \_\_\_\_\_ +tab.XVII: \_\_\_\_\_ =  $h^*$  \_\_\_\_\_

$\text{☽}HP$  \_\_\_\_\_ daily pag.

tab.XVIII: \_\_\_\_\_ tab.XIX: \_\_\_\_\_

$HP^*$  \_\_\_\_\_ tab.XX:  $p_z$  \_\_\_\_\_  $\pm$

$HP^* \cos h^*$  \_\_\_\_\_

$h_{\text{☽}a}$ _____
-----------------------

 $d_a$  \_\_\_\_\_ volgens formule §6

$p_z$  \_\_\_\_\_  

$d_a$ _____
-------------

Interpoleer met precomputed distances en P.L.-tabellen:

$d_1$  \_\_\_\_\_  $d_2$  \_\_\_\_\_  $d_a - d_1$  \_\_\_\_\_ P.L. \_\_\_\_\_

$t_1$  \_\_\_\_\_  $t_2$  \_\_\_\_\_  $d_2 - d_1$  \_\_\_\_\_ P.L. \_\_\_\_\_

$\Delta t$  \_\_\_\_\_  $\Delta t$  P.L. \_\_\_\_\_

2e orde \_\_\_\_\_ (Bremiker tab.I)

$t_a$ _____
-------------

## 9 Voorbeeld

komt nog...

## 10 Slot

De reductiemethode die ik hierboven uiteengezet heb, volstaat om eens met de maansafstanden te experimenteren. Bremiker's tabellen zijn echter wel een beetje lastig te gebruiken o.a. omdat je steeds moet opletten of er met minuten of seconden gewerkt wordt. Bovendien laat ik een aantal stappen over aan een rekenmachine en dat kan op historische en/of principiële bezwaren stuiten. Het voordeel ervan is wel dat je aan een paar kopietjes genoeg hebt. Hieronder staan nog een aantal suggesties voor verder lezen.

- Voorberekende tabellen, prop.log tabel, en mijn scriptie *Een kwestie van tijd* zijn te downloaden van [www.amfidromie.nl](http://www.amfidromie.nl).
- De referenties naar Bremiker zijn: *Nautisches Jahrbuch oder vollständiger Ephemeriden und Tafeln für das Jahr 1865... herausgegeben von Dr. C. Bremiker*, Berlin 1863. Kopieën staan op [www.amfidromie.nl](http://www.amfidromie.nl).
- Wie serieus werk wil maken van maansafstanden doet er goed aan om de *Stark tables for clearing a lunar distance* van Bruce Stark aan te schaffen, verkrijgbaar via [www.starpath.com](http://www.starpath.com).
- De beste literatuur over maansafstanden is geschreven net na de hoogtijdagen, dus zo rond het midden van de 19e eeuw. Zo zijn er verschillende uitstekende Duitse werken over "Ortsbestimmung" en ook de Amerikaanse *A Manual of Spherical and Practical Astronomy* van William Chauvenet wil ik hier noemen. En natuurlijk de onvermijdelijke *Bowditch*-edities van die periode.
- Een ware goudmijn voor de historisch geïnteresseerde is C.H. Cotter, *A History of Nautical Astronomy*, Hollis & Carter 1968. Dit boek geeft ook een overzicht van methoden om de berekening van §6 handmatig uit te voeren. Houd de lijst met errata op [www.huxtable.u-net.com/cotter01.htm](http://www.huxtable.u-net.com/cotter01.htm) binnen handbereik.
- Over geschiedenis van de lengtebepaling warm aanbevolen: Derek Howse, *Greenwich time and the discovery of the longitude*, Oxford 1980. Howse heeft ook een boeiende biografie over Nevil Maskelyne geschreven (de Britse Astronomer Royal die aan de wieg van de Nautical Almanac stond).
- Ook warm aanbevolen: probeer eens een van de eerste Nautical Almanacs van eind 18e eeuw in handen te krijgen. Een van de plaatsen waar dat kan is in de bibliotheek van het Scheepvaartmuseum in Amsterdam.
- Recent onderzoek aangaande Tobias Mayer en zijn maantabellen: Steven Wepster, *Between Theory and Observations*, Springer Verlag 2010.