



Kosmographische
Nachrichten

und
Sammlungen

auf das Jahr

1 7 4 8.

Zum Wachstume
 der **Weltbeschreibungswissenschaft**
 von den Mitgliedern

der
Kosmographischen Gesellschaft

zusammgetragen.

Wien, bey Joh. Paul Krauß, Buchhändler, nächst der kais. Burg.

Nürnberg, bey der homännischen Handlung.

Druckt Joh. Joseph Fleischmann. 1750.



“Modelleren” met Tobias Mayer

Steven Wepster

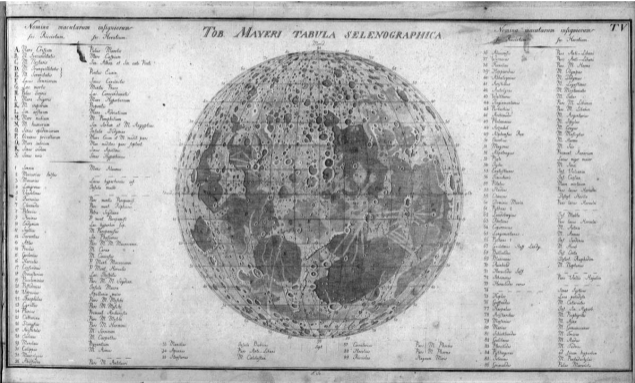
Departement Wiskunde
Universiteit Utrecht

19 maart 2024

Opdracht 1

- ▶ Wat zijn typische activiteiten en begrippen die bij je opkomen als je denkt aan *modelleren*?
- ▶ Wat zijn typische activiteiten en begrippen die bij je opkomen als je denkt aan *statistische dataverwerking*?

Selenografie



Tobias Mayer 1723–1762



- ▶ autodidact: astronomie, geografie, wiskunde, etc (dwz *gemengde wiskunde*)
- ▶ werkt in 1748 bij een geografisch bedrijf in Neuremberg
- ▶ krijgt kort daarna een leerstoel in Göttingen
- ▶ *drive*: hij vindt dat er veel betere waarnemingen gedaan kunnen worden, en dat waarnemingen veel beter gebruikt kunnen worden
- ▶ *Leitmotiv* in zijn werk: laten zien hoe je dat doet!

Achtergrondkennis: libratie

- ▶ Wij zien altijd dezelfde kant van de maan (*oh ja?!?*)

Achtergrondkennis: libratie

- ▶ Wij zien altijd dezelfde kant van de maan (*oh ja?!?*)
- ▶ ... wikimedia ...

Achtergrondkennis: libratie

- ▶ Wij zien altijd dezelfde kant van de maan (*oh ja?!?*)
- ▶ ... wikimedia ...
- ▶ *libratie* is het “wiebelen” van de maan waardoor we vanaf de aarde meer dan 50% van het maanoppervlak kunnen waarnemen

Achtergrondkennis: libratie

- ▶ Wij zien altijd dezelfde kant van de maan (*oh ja?!?*)
- ▶ ... wikimedia ...
- ▶ *libratie* is het “wiebelen” van de maan waardoor we vanaf de aarde meer dan 50% van het maanoppervlak kunnen waarnemen
- ▶ hier zijn verschillende oorzaken voor, waaronder:

Achtergrondkennis: libratie

- ▶ Wij zien altijd dezelfde kant van de maan (*oh ja?!?*)
- ▶ ... wikimedia ...
- ▶ *libratie* is het “wiebelen” van de maan waardoor we vanaf de aarde meer dan 50% van het maanoppervlak kunnen waarnemen
- ▶ hier zijn verschillende oorzaken voor, waaronder:
- ▶ de rotatie-as van de maan staat niet loodrecht op het baanvlak van de maan

Hoe maakt Mayer een nauwkeurige maankaart?



Mayer kon dus niet zomaar de positie van alle kraters etc op de maan opmeten en intekenen.

Hij moest eerst de metingen ontdoen van de effecten van libratie.

Hoe maakt Mayer een nauwkeurige maankaart?

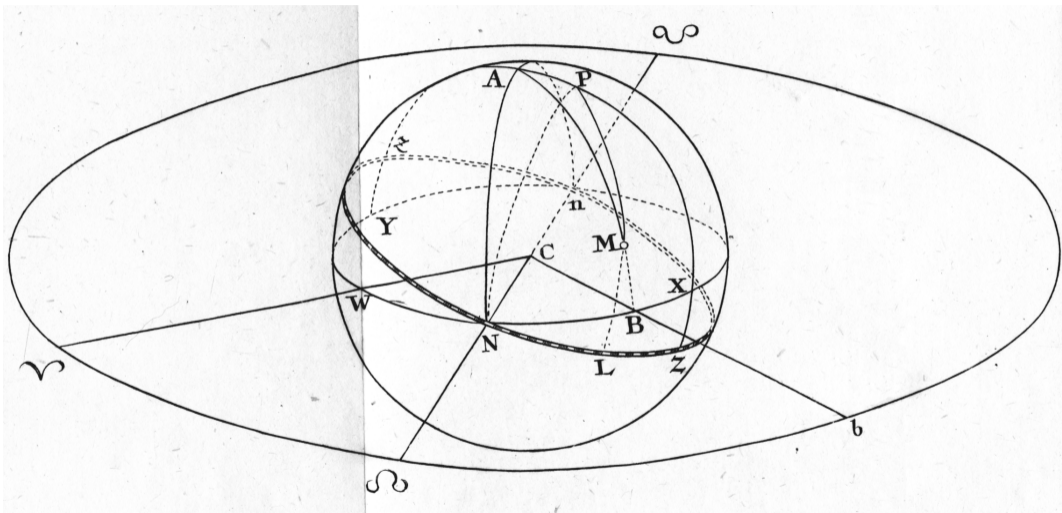


Mayer kon dus niet zomaar de positie van alle kraters etc op de maan opmeten en intekenen.

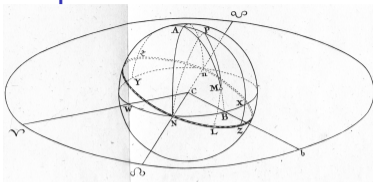
Hij moest eerst de metingen ontdoen van de effecten van libratie.

Hiervoor is o.a. precieze kennis van de stand van de maanas nodig.

Het bepalen van de stand van de maan



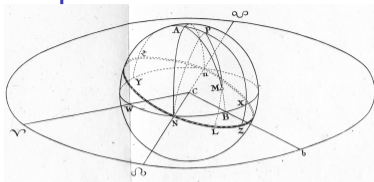
Het bepalen van de stand van de maanas



Lang verhaal kort:

- ▶ de bedoeling is om de plaats van maanpool P ten opzichte van A te vinden

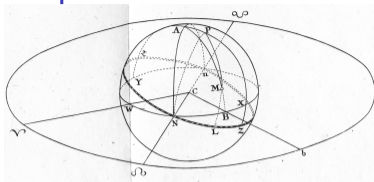
Het bepalen van de stand van de maanas



Lang verhaal kort:

- ▶ de bedoeling is om de plaats van maanpool P ten opzichte van A te vinden
- ▶ Mayer wil die vinden door metingen van de positie van het kratertje M (Manilius) op het *zichtbare* oppervlak van de maan

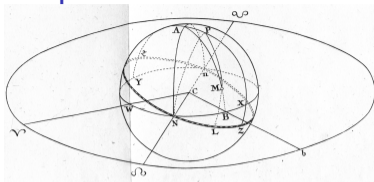
Het bepalen van de stand van de maanas



Lang verhaal kort:

- ▶ de bedoeling is om de plaats van maanpool P ten opzichte van A te vinden
- ▶ Mayer wil die vinden door metingen van de positie van het kratertje M (Manilius) op het *zichtbare* oppervlak van de maan
- ▶ dit levert hem 3 *meetbare* grootheden h , g en k ,

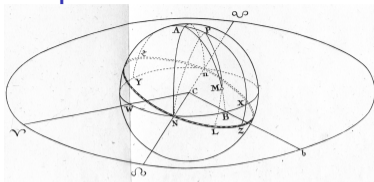
Het bepalen van de stand van de maanas



Lang verhaal kort:

- ▶ de bedoeling is om de plaats van maanpool P ten opzichte van A te vinden
- ▶ Mayer wil die vinden door metingen van de positie van het kratertje M (Manilius) op het *zichtbare* oppervlak van de maan
- ▶ dit levert hem 3 *meetbare* grootheden h , g en k ,
- ▶ waarmee hij 3 *parameters* α , β en θ wil bepalen.

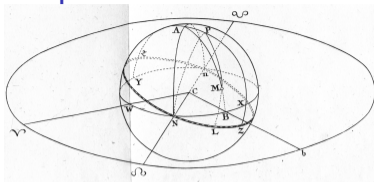
Het bepalen van de stand van de maanas



Lang verhaal kort:

- ▶ de bedoeling is om de plaats van maanpool P ten opzichte van A te vinden
- ▶ Mayer wil die vinden door metingen van de positie van het kratertje M (Manilius) op het *zichtbare* oppervlak van de maan
- ▶ dit levert hem 3 *meetbare* grootheden h , g en k ,
- ▶ waarmee hij 3 *parameters* α , β en θ wil bepalen.
- ▶ de precieze details zijn ingewikkeld en doen er nu niet toe!

Het bepalen van de stand van de maanas

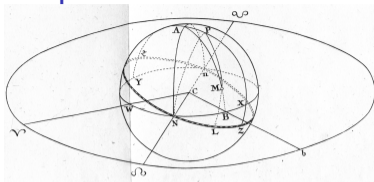


Lang verhaal kort:

- ▶ de bedoeling is om de plaats van maanpool P ten opzichte van A te vinden
- ▶ Mayer wil die vinden door metingen van de positie van het kratertje M (Manilius) op het *zichtbare* oppervlak van de maan
- ▶ dit levert hem 3 *meetbare* grootheden h , g en k ,
- ▶ waarmee hij 3 *parameters* α , β en θ wil bepalen.
- ▶ de precieze details zijn ingewikkeld en doen er nu niet toe!
- ▶ de grootheden zijn (na lineariseren) aan elkaar gerelateerd door de formule

$$\beta - (90^\circ - h) = \alpha \sin(g - k) - \alpha \sin \theta \cos(g - k)$$

Het bepalen van de stand van de maanas



Lang verhaal kort:

- ▶ de bedoeling is om de plaats van maanpool P ten opzichte van A te vinden
- ▶ Mayer wil die vinden door metingen van de positie van het kratertje M (Manilius) op het *zichtbare* oppervlak van de maan
- ▶ dit levert hem 3 *meetbare* grootheden h , g en k ,
- ▶ waarmee hij 3 *parameters* α , β en θ wil bepalen.
- ▶ de precieze details zijn ingewikkeld en doen er nu niet toe!
- ▶ de grootheden zijn (na lineariseren) aan elkaar gerelateerd door de formule

$$\beta - (90^\circ - h) = \alpha \sin(g - k) - \alpha \sin \theta \cos(g - k)$$

- ▶ VRAAG: hoeveel waarnemingen nodig om α , β , θ te bepalen?

3 onbekenden, 3 vergelijkingen

$$\beta - 13^{\circ} 5' = +0.9097\alpha - 0.4152\alpha \sin \theta,$$

$$\beta - 14^{\circ} 14' = +0.1302\alpha + 0.9915\alpha \sin \theta,$$

$$\beta - 15^{\circ} 56' = -0.8560\alpha + 0.5170\alpha \sin \theta.$$

met oplossing: $\alpha = 1^{\circ} 40'$, $\beta = 14^{\circ} 33'$, en $\theta = 3^{\circ} 36'$.

In die tijd was het gebruikelijk om hier genoeg mee te nemen.

3 onbekenden, 3 vergelijkingen

Mayer zegt:

Maar in de waargenomen grootheden g en h zijn meetfouten te verwachten die men onmogelijk kan vermijden, en die de waarden van α , β en θ kunnen beïnvloeden: daarom moeten wij op deze bepaling uit slechts 3 metingen niet vertrouwen. Men hoeft slechts 3 andere waarnemingen te nemen om hiervan overtuigd te raken. [1, p. 151].

- ▶ Wat vind je van deze opmerking?
- ▶ Wat moet je/hij dan wel doen?

Wat dan wel?

Hij gebruikt 27 afzonderlijke waarnemingen.

Nadat dit gebeurd was vormde ik [...] uit elke waarneming een afzonderlijke [vergelijking], en zo verkreeg ik 27 vergelijkingen die hieronder staan: [1, p. 153].

Zie handout.

Drie klassen

Het zou nu wel al te moeizaam zijn om al deze vergelijkingen in groepjes van 3 op te lossen voor α , β en θ . Daarom deelde ik ze allemaal in 3 afzonderlijke klassen in. Tot de eerste klasse rekende ik die waarin de coëfficiënt bij α positief en groter dan de overigen waren [...]. In de tweede klasse nam ik die waar de coëfficiënt bij α ook groter maar dan negatief was [...]. en in de derde klasse de rest [...]. Hierna telde ik alle vergelijkingen in één klasse bij elkaar op en zo verkreeg ik drie andere vergelijkingen, namelijk...

- ▶ Welke drie? Los ze op!
- ▶ Wat is het voordeel van deze methode?

In 3 klassen van 9 vergelijkingen elk

$$9\beta - 118^\circ 8' = +8.4987\alpha - 0.7932\alpha \sin \theta,$$

$$9\beta - 140^\circ 17' = -6.1404\alpha + 1.7443\alpha \sin \theta,$$

$$9\beta - 127^\circ 32' = +2.7977\alpha + 7.9649\alpha \sin \theta.$$

Met oplossing $\alpha = 1^\circ 30'$, $\beta = 14^\circ 33'$, en $\theta = -3^\circ 45'$.

Rationale

Het voordeel is dat door de verdeling in drie klassen, de verschillen tussen de drie sommen zo groot mogelijk worden. Hoe groter de verschillen, hoe nauwkeuriger we de grootheden α , β , θ kunnen bepalen [1, p. 154].

Hebben we nu zekerheid?

Wellicht wil men weten in hoeverre men kan vertrouwen op de zo gevonden waarden van α , β , θ [...] want het is niet te verwachten dat ze helemaal goed en zonder fouten zijn. [1, p. 155].

Foutschatting

Mayer zegt:

- ▶ de oplossing uit slechts 3 waarnemingen gaf: $\alpha = 1^{\circ}40'$, (etc)
- ▶ de oplossing uit alle 27 waarnemingen gaf: $\alpha = 1^{\circ}30'$, (etc)

Foutschatting

Mayer zegt:

- ▶ de oplossing uit slechts 3 waarnemingen gaf: $\alpha = 1^{\circ}40'$, (etc)
- ▶ de oplossing uit alle 27 waarnemingen gaf: $\alpha = 1^{\circ}30'$, (etc)
- ▶ omdat de laatste uit 9x zoveel waarnemingen is bepaald, is hij ook 9x zo betrouwbaar

Foutschatting

Mayer zegt:

- ▶ de oplossing uit slechts 3 waarnemingen gaf: $\alpha = 1^\circ 40'$, (etc)
- ▶ de oplossing uit alle 27 waarnemingen gaf: $\alpha = 1^\circ 30'$, (etc)
- ▶ omdat de laatste uit $9x$ zoveel waarnemingen is bepaald, is hij ook $9x$ zo betrouwbaar
- ▶ zij x de fout in α , dus $\alpha = 1^\circ 30' \pm x$. Dan moet gelden:

$$27x = 3(10 + x)$$

oftewel $x = \frac{5'}{4}$.

Foutschatting

Mayer zegt:

- ▶ de oplossing uit slechts 3 waarnemingen gaf: $\alpha = 1^\circ 40'$, (etc)
- ▶ de oplossing uit alle 27 waarnemingen gaf: $\alpha = 1^\circ 30'$, (etc)
- ▶ omdat de laatste uit $9\times$ zoveel waarnemingen is bepaald, is hij ook $9\times$ zo betrouwbaar
- ▶ zij x de fout in α , dus $\alpha = 1^\circ 30' \pm x$. Dan moet gelden:

$$27x = 3(10 + x)$$

oftewel $x = \frac{5'}{4}$.

- ▶ Wat is hierop jouw commentaar?

Conclusie

- ▶ Kijk terug naar opdracht 1: typische activiteiten van modelleren/dataverwerking?
- ▶ In hoeverre zijn ze hier van toepassing?
- ▶ ... en verder?

Bibliografie

- [1] Tobias Mayer, Abhandlung über die Umwälzung des Monds um seine Axe und die scheinbare Bewegung der Mondflecken; worinnen der Grund einer verbesserten Mondsbeschreibung aus neuen Beobachtungen geleyet wird. Erster Theil, in: *Kosmographische Nachrichten und Sammlungen auf das Jahr 1748*, 52–183, Neuremberg/Wenen 1750.
- [2] Stephen M Stigler, *The History of Statistics: the Measurement of Uncertainty before 1900*, Harvard 1986.
- [3] Steven Wepster, *Between Theory and Observations: Tobias Mayer's explorations of Lunar Motion, 1751–1755*, Springer 2008.