1. Cardano (in *Ars Magna*, 1545) geeft onder andere een recept voor het oplossen van vergelijkingen van type

$$x^3 + px = q.$$

Hij geeft er ook een (meetkundig) bewijs van, wat algebraïsch ongeveer als volgt gaat.

Laat de grote kubus zijde u hebben, en het kleintje in de hoek zijde v. Stel u en v zijn zo gekozen dat

$$u^3 - v^3 = q \tag{1}$$

$$3uv = p \tag{2}$$

(a) Ga na dat $x = u - v$.

(b) Vermenigvuldig (1) met u^3 en los op voor u.

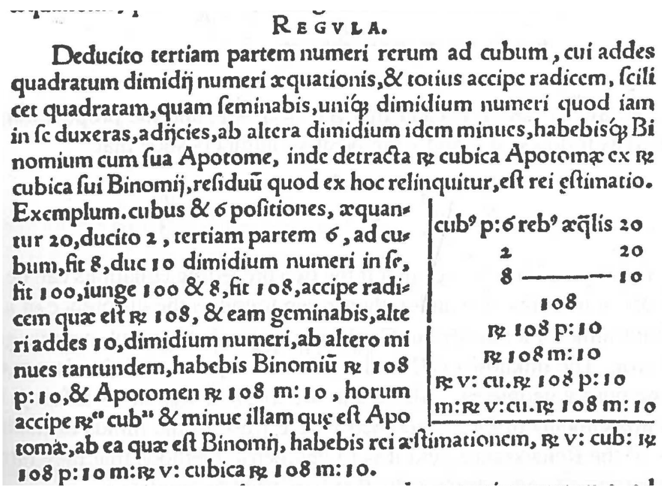
(c) Laat nu zien dat

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}. \tag{3}$$

Bij Cardano zijn $p, q > 0$ en dus moet hij voor elk type zoals $x^3 = px + q$, $x^3 + q = px$ etc. steeds opnieuw een afleiding geven. Wij kunnen ook $p, q \leq 0$ toelaten en in alle gevallen dezelfde formule (3) gebruiken.

(d) Controleer (3) in het geval $x^3 + 6x = 20$. Hint: kijk ook naar $(1 + \sqrt{3})^3$.

(e) In de figuur hieronder staat in het kadertje Cardano's eigen oplossing bij deze vergelijking. Probeer zijn notatie te ontcijferen.



REGVLA.

Deducito tertiam partem numeri rerum ad cubum, cui addes quadratum dimidij numeri æquationis, & totius accipe radicem, scilicet quadratam, quam seminabis, uni'qꝫ dimidium numeri quod iam in se duxeras, adijcies, ab altera dimidium idem minues, habebis'qꝫ Binomium cum sua Apotome, inde detracta ℞ cubica Apotomæ ex ℞ cubica sui Binomij, residuū quod ex hoc relinquitur, est rei æstimatio.

Exemplum. cubus & 6 positiones, æquantur 20, ducito 2, tertiam partem 6, ad cubum, fit 8, duc 10 dimidium numeri in se, fit 100, iunge 100 & 8, fit 108, accipe radicem quæ est ℞ 108, & eam geminabis, alteri addes 10, dimidium numeri, ab altero minues tantundem, habebis Binomiū ℞ 108 p: 10, & Apotomen ℞ 108 m: 10, horum accipe ℞[ae] cub[as] & minue illam quę est Apotomæ, ab ea quæ est Binomij, habebis rei æstimationem, ℞ v: cub: ℞ 108 p: 10 m: ℞ v: cubica ℞ 108 m: 10.

cub⁹ p: 6 reb⁹ æq̄lis 20

2   20

8 ——— 10

108

℞ 108 p: 10

℞ 108 m: 10

℞ v: cu. ℞ 108 p: 10

m: ℞ v: cu. ℞ 108 m: 10

2. Bij sommige vergelijkingen lijkt de Cardanoformule onzinnige antwoorden te geven.

(a) Los op $x^3 = 15x + 4$. Wat gebeurt er voor vreemds?

Tartaglia gebruikte voor zulke gevallen de uitdrukking *casus irreducibilis*, om aan te geven dat de oplossingsmethode niet werkt. Maar Bombelli beweerde dat je "gewoon" door kon rekenen alsof er niets aan de hand was.

(b) Vereenvoudig je antwoord van de vorige opgave. Hint: werk $(2+\sqrt{-1})^3$ uit.

3. Bewering: de *casus irreducibilis* treedt precies dan op als het polynoom $x^3 + px - q$ drie reële nulpunten heeft. Ga het volgende rijtje beweringen na:
   - de kromme $y = x^3 + px - q$ heeft een lokaal maximum bij $x = -\sqrt{-p/3}$ als $p < 0$;
   - het maximum is $M = 2(-\frac{p}{3})^{3/2} - q$;
   - $M > 0$ precies als $\left(-\frac{p}{3}\right)^3 > \left(\frac{q}{2}\right)^2$;
   - daaruit volgt de bewering.

4. Viète had een algemene reductieformule gevonden om $\cos n\theta$ en $\sin n\theta$ uit te drukken in $\cos\theta$ en $\sin\theta$, bijvoorbeeld

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta.$$

   (a) Substitueer hierin $x = \cos\theta$, $y = \cos 3\theta$ en vind uitdrukkingen voor p, q in x, y zodanig dat $x^3 + px = q$.

   (b) Los de vergelijking op met (3).

   (c) Substitueer $\cos\theta$ en $\cos 3\theta$ terug. Wat valt je op?

Op deze en vergelijkbare manieren zagen wiskundigen aan het begin van de 18e eeuw een (vaag) verband opduiken tussen complexe getallen en goniometrie. Bijvoorbeeld: Cotes had

$$ix = \log(cosx + i\sin x),$$

maar hij had nog geen e-macht. Euler wel.

5. Euler (*Introductio in analysin infinitorum*) laat zich inspireren door $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$; het linkerlid factoriseert hij als $(\cos x + i\sin x)(\cos x - i\sin x)$. Vervolgens gaat hij "vrij spelen" met de factoren. Om te beginnen laat hij zien dat

$$(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx.$$

   (a) Controleer dat algebraïsch voor $n = 2$ en $n = 3$.

   (b) Laat zien dat hieruit volgt:

$$\cos nx = \tfrac{1}{2}\left((\cos x + i\sin x)^n + (\cos x - i\sin x)^n\right),$$
$$\sin nx = \frac{1}{2i}\left((\cos x + i\sin x)^n - (\cos x - i\sin x)^n\right).$$

   (c) Euler neemt vervolgens $x \to 0$, $n \to \infty$, en $0 < z = nx < \infty$. Ga na dat hieruit volgt

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-z}\right),$$
$$\cos z = \frac{1}{2i}\left(e^x - e^{-z}\right).$$

   Hint: $e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$.